УДК 519.21

В. В. АНИСИМОВ, д-р физ.-мат. наук, А. И. ЧЕРНЯК, асп.,
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ РЕДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ЦЕПЯХ МАРКОВА И ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

Данная работа является продолжением работы [1], где доказаны предельные теоремы для редких событий на конечной однородной цепи Маркова. Здесь исследованы потоки редких событий, встречающихся при анализе более общих моделей.

1. Пусть $\varkappa(l)$, $l \geqslant 0$ — однородная неприводимая цепь Маркова с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, k\}$ и матрицей переходных вероятностей $P = \| p_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, k}$; π_i, $i = \overline{1, k}$ — стационарное распределение цепи. Выделим из фазового пространства состояний цепи Маркова подмножество состояний $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_{m_0}\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{m_0} \leqslant k$, $m_0 < k$. Если цепь Маркова находится в подмножестве A некоторое время $r > 1$, то происходит редкое событие длины r. Пусть $\xi_n(r_n)$ — количество редких событий длины r_n, момент начала которых не превосходит n. Обозначим через P_A следующую матрицу: $P_A = \| p_{ij} \|$, $i, j \in A$, $\Delta_A(z) = | zE - P_A |$ — характеристический многочлен, E — единичная матрица. Ясно, что все характеристические числа z_i, $i = \overline{1, m_0}$ матрицы P_A таковы, что $|z_i| < 1$, $i = \overline{1, m_0}$. Предположим, что все z_i, $i = \overline{1, m_0}$ различны по модулю. Пусть α — максимальное по модулю характеристическое число. Тогда по формуле Перрона [2]

$$P_A^n = \alpha^n R + o(\alpha^n), \tag{1}$$

где

$$R = [\Delta'_A(\alpha)]^{-1} \| D_{js}(\alpha) \|, \quad j, s \in A, \tag{2}$$

$D_{js}(\alpha)$ — алгебраическое дополнение к элементу s-й строки j-го столбца матрицы $\alpha E - P_A$, а $\Delta'_A(\alpha)$ — производная $\Delta_A(z)$ в точке α. Введем обозначение

$$d_{js} = [\Delta'_A(\alpha)]^{-1} D_{js}(\alpha), \quad d_j = \sum_{s \in A} d_{js}, \quad j, s \in A.$$

Теорема 1. Если

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \alpha^{r_n - 1} = \beta_0 < \infty, \tag{3}$$

то $\xi_n(r_n) \overset{сл}{\Rightarrow} \xi$, где ξ — пуассоновская случайная величина с параметром $a = \beta_0 (1-\alpha)^2 \sum_{j \in A} \pi_j d_j$.

Доказательство. Пусть (μ_h), $h = 1, 2, \ldots$ — моменты вхождений в подмножество A, $k_l^{(i)}$ — индекс l-го вхождения в подмножество A через состояние $i \in A$. Тогда $\omega_l^{(i)} = \mu_{k_l^{(i)}}$ — момент l-го вхождения через состояние $i \in A$ в подмножество A, т. е. $\omega_0^{(i)} = 0$, $\omega_l^{(i)} = \min\{s : \varkappa(s) = i, \varkappa(s-1) \bar{\in} A, s > \omega_{l-1}^{(i)}\}$, $\omega_1^{(i)} = 0$, если $\varkappa(0) = i$.

Введем семейство случайных величин $\{\chi^{(i)}(l, r_n),\ i \in A,\ l \geqslant 1\}$, где

$$\chi^{(i)}(l, r_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varkappa(s) \in A,\ \omega_l^{(i)} \leqslant s < \omega_l^{(i)} + r_n, \\ & \varkappa(\omega_l^{(i)} + r_n) \bar{\in} A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\nu_i(n)$ — это количество попаданий в состояние i цепи Маркова за время n, $\nu_{ji}(n)$ — количество попаданий в состояние i из состояния j цепи Маркова $\varkappa(\cdot)$ за время n, $\nu_i^*(n)$ — количество вхождений в подмножество A через состояние $i \in A$ за время n. По построению

$$\xi_n(r_n) = \sum_{i \in A} \sum_{l=1}^{\nu_i^*(n)} \chi^{(i)}(l, r_n).$$

Известно, что для $\nu_i(n)$ и $\nu_{ji}(n)$ выполняется закон больших чисел, т. е.

$$\nu_i(n) n^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \pi_i, \quad i = \overline{1, k},$$

$$\nu_{ji}(n) n^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \pi_j p_{ji}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Так как $\nu_i(n) = \sum_{j \bar{\in} A} \nu_{ji}(n) + \sum_{j \in A} \nu_{ji}(n)$, $i = \overline{1, k}$, то

$$\nu_i^*(n) = \nu_i(n) - \sum_{j \in A} \nu_{ji}(n), \quad i \in A,$$

$$\nu_i^*(n) n^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \pi_i - \sum_{j \in A} \pi_j \cdot p_{ji},$$

$\chi^{(i)}(l, r_n)$, $i = \overline{1, k}$, $l \geqslant 1$ независимы и распределение их не зависит от индекса l. Вычислим величины

$$b_{j1}(\lambda) = \lim_{n \to \infty} n \left(M \exp\{i\lambda\chi^{(j_1)}(1, r_n)\} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[(e^{i\lambda}-1)\sum_{i_2,\ldots,i_{r_n}\in A}\prod_{l=1}^{r_n-1} p_{i_l i_{l+1}}\left(1-\sum_{j\in A} p_{i_{r_n} j}\right)\right], \quad j_1\in A.$$

Используя (1), (3) и равенство

$$\sum_{i_2,\ldots,i_{r_n}\in A}\prod_{l=1}^{r_n-1} p_{i_l i_{l+1}} = \sum_{i_{r_n}\in A} g_{i_1 i_{r_n}}^{(r_n-1)}, \quad j_1\in A,$$

где $g_{ij}^{(r_n-1)}$ — элемент матрицы $P_A^{(r_n-1)}$, получаем

$$b_{j_1}(\lambda) = \beta_0(1-\alpha)\, d_{j_1}(e^{i\lambda}-1), \quad j_1\in A.$$

Отсюда распределение величины $\rho_{j_1}(n) = \sum_{l=1}^{n}\chi^{(j_1)}(l, r_n)$ слабо сходится к пуассоновскому распределению с параметром $\beta_0(1-\alpha)\, d_{j_1}$. В силу того, что $n^{-1}\nu_{j_1}^*(n)$, $j_1\in A$ сходятся к вырожденному распределению, то легко проверяются условия теоремы 4 [3, с. 709]. Следовательно, распределение $\xi_n(r_n)$ слабо сходится к пуассоновскому распределению с параметром a. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $A=\{i\}$, то утверждения доказанной выше теоремы и теоремы 1[1] совпадают.

Подобная схема для цепи Маркова с двумя состояниями рассматривалась в работе [4].

Замечание 2. Утверждение теоремы справедливо и в том случае, когда характеристические числа матрицы P_A могут быть кратными, при этом A может быть не связным множеством, но нужно дополнительно потребовать, чтобы максимальное по модулю характеристическое число было единственным.

Если $A=\bigcup_{i=1}^{\beta} A_i$, где области A_i не сообщающиеся в A и каждая матрица P_{A_i}, $i=\overline{1,\beta}$ имеет единственное максимальное по модулю характеристическое число α_i, $|\alpha_s| = \max_{i=\overline{1,\beta}}|\alpha_i|$, то предельное распределение представляется в виде $\xi = \sum_{i=1}^{r}\xi(A_i)$, где $\xi(A_i)$, $i=\overline{1,r}$ — независимые пуассоновские случайные величины, параметры которых определяются на множествах A_i, $i=\overline{1,r}$, как было указано ранее, а $r\leqslant\beta$ — кратность α_s. При этом предполагаем, что первые r множеств имеют максимальные по модулю характеристические числа α_s.

Рассмотрим теперь следующее семейство случайных величин: $\{\hat{\chi}^{(j_1)}(l, r_n), j_1 \in A, l \geqslant 1\}$, где

$$\hat{\chi}^{(j_1)}(l, r_n) = \begin{cases} m+1, \text{ если } \varkappa(s) \in A, \ \omega_l^{(j_1)} \leqslant s < \omega_l^{(j_1)} + r_n + m, \\ \qquad \varkappa(\omega_l^{(j_1)} + r_n + m) \bar{\in} A, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$m = \overline{0, \infty}.$

Обозначим $\hat{\xi}_n(r_n) = \sum_{j_1 \in A} \sum_{l=1}^{\nu_{j_1}^*(n)} \chi^{(j_1)}(l, r_n).$

Теорема 2. Пусть множество A такое, что все характеристические числа z_i, $i = \overline{1, m_0}$ матрицы P_A различны по модулю и выполнено условие (3). Тогда $\hat{\xi}_n(r_n) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_1$, где ξ_1 — случайная величина с характеристической функцией вида $\varphi(\lambda) = \exp\{x_0(1-\alpha)(e^{i\lambda}-1) \times (1-\alpha e^{i\lambda})^{-1}\}$, где $x_0 = \beta_0 \sum_{j_1 \in A} \pi_{j_1} d_{j_1}$.

Доказательство. Пусть

$$\gamma_{mn}^{(j_1)} = \sum_{i_2, \ldots, i_{r_n+m} \in A} \prod_{l=1}^{r_n+m-1} p_{i_l i_{l+1}} \left(1 - \sum_{j \in A} p_{i_{r_n+m} j}\right),$$

$$b_n^{(j_1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(j_1)} = \sum_{i_2, \ldots, i_{r_n} \in A} \prod_{l=1}^{r_n-1} p_{i_l i_{l+1}}, \quad j_1 \in A,$$

$$c_m = \sum_{i_1, \ldots, i_m \in A} \max_{i_0 \in A} p_{i_0 i_1} \prod_{l=1}^{m-1} p_{i_l i_{l+1}} \left(1 - \sum_{j \in A} p_{i_m j}\right),$$

$$c_0 = 1 \quad \left(\prod_{l=1}^{0} p_{i_l i_{l+1}} = 1\right).$$

Вычислим величины: $a_{j_1}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} n(M\exp\{i\lambda\hat{\chi}^{(j_1)}(1, r_n)\} - 1) = = \lim_{n\to\infty} n \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+1)\lambda} \gamma_{mn}^{(j_1)} - \lim_{n\to\infty} n \cdot b_n^{(j_1)}, \quad j_1 \in A,$

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+1)\lambda} n\gamma_{mn}^{(j_1)}\right| \leqslant nb_n^{(j_1)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \leqslant B_{j_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

В силу того, что последовательность $\{nb_n^{(j_1)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ сходящаяся (условие (3)), а следовательно, она ограничена некоторой константой $B_{j_1} < \infty$ и ряд $\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \sum_{j_1 \in A} \max_{i_0 \in A} p_{i_0 j_1} + 1 \leqslant 2$ является сходящимся, то возможен предельный переход под знаком бесконечной суммы. Тогда, учитывая (1), (3), находим

$$a_{j_1}(\lambda) = \beta_0 (e^{i\lambda} - 1)(1 - \alpha e^{i\lambda})^{-1} d_{j_1}, \quad j_1 \in A.$$

Далее доказательство проводится подобно теореме 1.

В работе [5] аналогичный результат получен при использовании условия сходимости сумм независимых случайных величин к заданному безгранично делимому закону [6].

Замечание 3. Утверждения теорем 1,2 без изменений сохранятся в том случае, когда $\varkappa(l)$, $l \geqslant 0$ — эргодическая цепь Маркова со счетным множеством состояний, а A — конечное множество.

Замечание 4. Доказанные выше теоремы справедливы и в случае, если задана последовательность конечных цепей Маркова $\{\varkappa_n(\cdot)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ с матрицами переходных вероятностей $P_n = \| p_n(i, j) \|$, $i, j = \overline{1, k}$, для которой существует $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, и матрице P соответствует неприводимая цепь Маркова.

II. Пусть $\varkappa^{(1)}(l)$ и $\varkappa^{(2)}(l)$, $l \geqslant 0$ — две однородные неприводимые независимые цепи Маркова с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, k\}$ и матрицами переходных вероятностей

$$P^{(1)} = \| p_{ij}^{(1)} \|, \ i, j = \overline{1, k}, \ P^{(2)} = \| p_{ij}^{(2)} \|, \ i, j = \overline{1, k},$$

$\pi_i^{(1)}$, $\pi_i^{(2)}$, $i = \overline{1, k}$ — соответствующие стационарные распределения. Если для некоторого $l \geqslant 0$, $\varkappa^{(1)}(l) \neq \varkappa^{(2)}(l)$, $\varkappa^{(1)}(l + m) = \varkappa^{(2)}(l + m)$, $m = \overline{1, r_n}$, $\varkappa^{(1)}(l + r_n + 1) \neq \varkappa^{(2)}(l + r_n + 1)$, то будем считать, что возникает редкое событие длины r_n, начинающееся в момент $l + 1$.

Пусть $\eta_n(r_n)$ — количество таких редких событий на траекториях цепей Маркова длины n. Обозначим $Q = \| p_{ij}^{(1)} p_{ij}^{(2)} \|$, $i, j = \overline{1, k}$, $\Delta(z) = |zE - Q|$ — характеристический многочлен. Все характеристические числа α_i, $l = \overline{1, k}$ матрицы Q таковы, что $|\alpha_i| < 1$, $i = \overline{1, k}$; τ — максимальное по модулю характеристическое число. По формуле Перрона [2] $Q^n = \tau^n F + o(\tau^n)$, где матрица F определяется так же, как и матрица R, $F = \| f_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, k}$, $f_i = \sum_{j=1}^{k} f_{ij}$.

Теорема 3. Если

$$\lim_{n\to\infty} n\tau^{r_n - 1} = \beta < \infty,$$

то $\eta_n(r_n) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_2$, где ξ_2 — пуассоновская случайная величина с параметром $b = \beta(1 - \tau)^2 \sum_{i=1}^{k} \pi_i^{(1)} \pi_i^{(2)} f_i$.

Доказательство. Построим двумерную цепь Маркова $\theta(l) =$

$=(\varkappa^{(1)}(l), \varkappa^{(2)}(l))$, $l \geqslant 0$ с матрицей переходных вероятностей $S = \| s_{(i,j)}^{(m,l)} \|$, $i, j, m, l = \overline{1, k}$, где $s_{(i,j)}^{(m,l)} = p_{im}^{(1)} p_{jl}^{(2)}$; σ_{ij}, $i, j = \overline{1, k}$ — стационарное распределение цепи $\theta(\cdot)$. Очевидно, что $\sigma_{ij} = \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)}$. Обозначим через A подмножество состояний, $A = \{(i, i), i = \overline{1, k}\}$. Теперь для доказательства теоремы 3 применяем теорему 1.

III. Пусть $x(t)$, $t \geqslant 0$ — непрерывный справа полумарковский процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, k\}$, который задается вложенной цепью Маркова $\varkappa(l)$, $l \geqslant 0$ с матрицей переходных вероятностей $P = \| p_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, k}$ и временами пребывания в состояниях на l-м шаге $\{\tau(i, l), i = \overline{1, k}, l \geqslant 1\}$ $(\tau(i, l), i = \overline{1, k}, l \geqslant 1$ независимы в совокупности и $P\{\tau(i, l) < y\} = F_i(y)$, $l \geqslant 1)$; π_i, $i = \overline{1, k}$ — стационарное распределение $\varkappa(\cdot)$. Предположим, что $m_i = M\tau(i, l) < \infty$, $i = \overline{1, k}$, $l \geqslant 1$. Обозначим $A_n^{(i)}(L) = \{x : x > z_n^{(i)} + L\}$, $L \geqslant 0$, $\chi_n^{(i)}(x)$ — индикатор множества $A_n^{(i)}(L)$,

$$\rho_i(nt, A_n^{(i)}(L)) = \sum_{l=1}^{\nu(nt)} \chi_n^{(i)}(\tau(\varkappa(l), l))\, \delta_i(\varkappa(l)),$$

где

$$\nu(t) = \min\left\{k : \sum_{l=1}^{k+1} \tau(\varkappa(l), l) \geqslant t\right\},$$

$\delta_i(j) = 1$ при $i = j$, и 0 при $i \neq j$.

Утверждение 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} n(F_i(z_n^{(i)} + L) - F_i(z_n^{(i)})) = c_i < \infty$, $i = \overline{1, k}$, то конечномерные распределения векторного процесса $\{\rho_i(nt, A_n^{(i)}(L)), i = \overline{1, k}\}$ слабо сходятся к конечномерным распределениям векторного процесса $\{\Pi_i(a_i t), i = \overline{1, k}\}$, где $\Pi_i(t)$, $i = \overline{1, k}$ — независимые пуассоновские процессы с параметром 1, а $a_i = c_i \pi_i \left(\sum_{j=1}^{k} \pi_j m_j\right)^{-1}$, $i = \overline{1, k}$.

Утверждение 1 является следствием общих предельных теорем для процессов ступенчатых сумм случайных величин, определенных на полумарковском процессе (теорема 2[7, с. 223], теорема 6.3 [8, с.51]).

1. *Анисимов В. В., Черняк А. И.* Об асимптотическом поведении i-цепочек конечной цепи Маркова.— ДАН УССР. Сер. А, 1980, № 10. 2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967. 3. *Сильвестров Д. С.* Замечания о пределе сложной случайной функции.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, № 4. 4. *Rajarshi M. B.* Success run in a two-state Markov chain.— J. Applied Probability Trust, 1974, 11. 5. *Максимов К. Н.* Предельные распределения одной случайной величины, определенной на цепи Маркова.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, 24, № 3. 6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М., 1961. 7. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. Киев, 1974. 8. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования. Киев, 1976.

Поступила в редколлегию 03.10.80