УДК 519.21

Д. БАНАХ, асп., Киевский университет

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРЕМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим дискретное уравнение восстановления

$$x_n = y_n + \sum_{k=0}^{n} x_k p_{n-k}, \tag{1}$$

где $y = \{y_n\}$ — числовая последовательность, $p = \{p_n\}$ — распределение вероятностей на $E_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, не сосредоточенное в нуле.

Если распределение $p = \{p_n\}$ имеет период, равный единице [1], конечное среднее $\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} np_n < \infty$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |y_k| < \infty$, то согласно дискретному варианту теоремы восстановления [1]

$$x_n \to \frac{1}{\mu_p} \sum_{k=0}^{\infty} y_k = a, \quad n \to \infty.$$

Через $\varepsilon(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$ обозначим класс распределений q, представимых в виде $q = p_\lambda * r$, т. е. $q = \{q_n = [p_\lambda * r]_n = \sum_{k=0}^{n} p_{\lambda k} r_{n-k}\}$, где $p_\lambda = \{p_{\lambda n} = \lambda(1-\lambda)^n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ — геометрическое распределение с параметром λ, r — некоторое распределение (очевидно, распределения из $\varepsilon(\lambda)$ имеют единичный шаг).

В работе получены явные оценки скорости сходимости к нулю $x_n - a$ при $n \to \infty$ для случая, когда распределение $p \in \varepsilon(\lambda)$.

Отметим, что «универсальные» оценки, действующие в классе всех распределений с периодом 1, были получены в работе [2]. Пример, рассмотренный в замечании 1, показывает, что «специализированные» оценки для класса распределений из $\varepsilon(\lambda)$, приведенные в теореме 1, могут оказаться лучше универсальных.

В идейном плане теорема 1 настоящей работы представляет собой дискретный аналог соответствующего результата [3], где подобные оценки были получены для непрерывного варианта теоремы восстановления, порождаемого функциями распределения, представляющими собой свертку произвольного распределения на $[0, \infty)$ с показательным.

Для $\varepsilon \geqslant 0$, $n = 0, 1, \ldots$ определим аналогично [3] семейство функций $V(\varepsilon, n)$, удовлетворяющих условиям: а) $V(\varepsilon, n+k) \leqslant V(\varepsilon, n)V(\varepsilon, k)$, $\varepsilon \geqslant 0$, $n, k = 0, 1, \ldots$; б) $\lim_{\varepsilon \to 0} V(\varepsilon, n) = V(0, n) \equiv 1$ при каждом n; в) $V(\alpha, n) \leqslant V(\beta, n)$, $\alpha \leqslant \beta$, $n = 0, 1, \ldots$; г) $V(\varepsilon, n) \leqslant$

$\leqslant V(\varepsilon, k)$, $n \leqslant k$, $\varepsilon \geqslant 0$, а также связанные с $V(\varepsilon, n)$ нормы

$$|x|_\varepsilon^0 = \max_{n \geqslant 0} V(\varepsilon, n) |x_n|,$$

$$|x|_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} V(\varepsilon, n) |x_n|,$$

$$|x|_\varepsilon^1 = \max_{n \geqslant 0} V(\varepsilon, n) \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right| = \max_{n \geqslant 0} V(\varepsilon, n) |\bar{x}_n|,$$

$$|x|_\varepsilon^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V(\varepsilon, n) \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right| = \sum_{n=0}^{\infty} V(\varepsilon, n) |\bar{x}_n|.$$

Здесь и далее для последовательности $x = \{x_n\}$ $\bar{x} = \left\{ \bar{x}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \right\}$.

Лемма 1. Для произвольных последовательностей $x = \{x_n\}$, $z = \{z_n\}$ имеют место неравенства: а) $|x*z|_\varepsilon^0 \leqslant |x|_\varepsilon^0 |z|_\varepsilon$; б) $|x*z|_\varepsilon \leqslant \leqslant |x|_\varepsilon |z|_\varepsilon$, в) $|x|_\varepsilon^1 \leqslant |x|_\varepsilon$.

Лемма 2. Пусть для последовательности $x = \{x_n\}$ и для некоторого $\alpha > 0$ выполнено условие $|x|_\alpha < \infty$. Тогда $|x|_\varepsilon$ является непрерывной в нуле функцией от ε.

Лемма 3. Пусть $x = \{x_n\}$ удовлетворяет уравнению (1), где $p = \{p_n\}$ — вероятностное распределение, для которого $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = = |p|_0 < 1$, $y = \{y_n\}$ — числовая последовательность. Тогда:

а) если $|p|_\alpha < \infty$, $|y|_\alpha^0 < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$, то $|x|_\varepsilon^0 \leqslant \leqslant \dfrac{|y|_\varepsilon^0}{1 - |p|_\varepsilon}$ для всех $\varepsilon > 0$ таких, что $|p|_\varepsilon < 1$;

б) если $|p|_\alpha < \infty$, $|y|_\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$, то $|x|_\varepsilon \leqslant \leqslant \dfrac{|y|_\varepsilon}{1 - |p|_\varepsilon}$ для тех же ε.

Доказательство. Из условия леммы и непрерывности $|p|_\varepsilon$ в нуле следует, что существуют $\varepsilon > 0$, для которых $|p|_\varepsilon < 1$. Для таких ε рассмотрим отображение $z \to z*p$ как линейный оператор в пространстве конечных числовых функций, определенных на $E_+ = = \{0, 1, \ldots\}$ с нормой $|\cdot|_\varepsilon^0$. Согласно лемме 1 $|z*p|_\varepsilon^0 \leqslant |z|_\varepsilon^0 |p|_\varepsilon$, где $|p|_\varepsilon < 1$, и поэтому указанный оператор является сжимающим. Следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение, представимое в виде $x = \sum_{k=0}^{\infty} y * p^{*k}$ [1]. При этом

$$|x|_\varepsilon^0 \leqslant |y|_\varepsilon^0 \sum_{k=0}^{\infty} (|p|_\varepsilon)^k = \frac{|y|_\varepsilon^0}{1 - |p|_\varepsilon}.$$

Утверждение а) доказано. Доказательство б) проводится аналогично.

Лемма 4. Распределение q принадлежит классу $\varepsilon(\lambda)$ тогда и только тогда, когда последовательность $Q_n = \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{q}_n - q_n$ не возрастает на $[0, \infty)$.

Доказательство. Если $q_n = [p_\lambda * r]_n$, то

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{q}_n = \frac{\lambda}{1-\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} p_{\lambda i} r_{k-i} =$$

$$= \frac{\lambda}{1-\lambda}\sum_{i=0}^{n}\left(r_i \sum_{k=n+1-i}^{\infty} p_{\lambda k}\right) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{\lambda k}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} r_k\right) =$$

$$= [p_\lambda * r]_n + \frac{\lambda}{1-\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty} r_k.$$

В этом случае $Q_n = \frac{\lambda}{1-\lambda}\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} r_k$ и не возрастает на $[0, \infty)$. Для доказательства достаточности заметим, что если последовательность $Q_n = \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{q}_n - q_n$, $n = 0, 1, \ldots$ монотонно не возрастает, то $Q_n \geqslant 0$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = 0$. Определим

$$r_n = \begin{cases} \frac{1-\lambda}{\lambda}(Q_{n-1} - Q_n) \text{ для } n \geqslant 1, \\ 1 - \frac{1-\lambda}{\lambda} Q_0 \text{ для } n = 0. \end{cases}$$

Так как $Q_{n-1} - Q_n \geqslant 0$ и $Q_0 = \frac{\lambda}{1-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k - q_0 = \frac{1}{1-\lambda}(\lambda - q_0) \leqslant \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}$, то $r_n \geqslant 0$ для $n = 0, 1, \ldots$. Легко проверить, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n = 1$ и, следовательно, $r = \{r_n\}$ — вероятностное распределение. Осталось еще показать, что $q = p_\lambda * r$. Действительно,

$$[p_\lambda * r]_n = \left(1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\lambda}(\lambda - q_0)\right)\lambda(1-\lambda)^n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} q_k - q_{k-1} + q_k\right)\lambda(1-\lambda)^{n-k} = q_n.$$

Теорема 1. Пусть $x = \{x_n\}$ удовлетворяет уравнению восстановления (1), $p \in \varepsilon(\lambda)$ и для некоторого $\alpha > 0$ $|p|_\alpha^2 < \infty$. Тогда функция $d(\varepsilon) = |\varphi|_\varepsilon$ монотонно не убывает, непрерывна в нуле и $d(0) < 1$, где

$$\varphi_n = Q_n \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\rho_k Q_n}; \quad \rho_k = \min_{i \geqslant 0} \frac{Q_i}{Q_{i+k}}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Пусть $\varepsilon_0 = \min(\alpha, \sup(\varepsilon : d(\varepsilon) < 1))$. Тогда если $|y|_0 < \infty$, $|y|_\varepsilon^0 < \infty$, $|y|_\varepsilon^1 < \infty$ для $\varepsilon < \varepsilon_0$, то для тех же ε

$$|x - a|_\varepsilon^0 \leqslant \left[\frac{\lambda}{1-\lambda}(|y|_\varepsilon^1 + |y_0|) + |y|_\varepsilon^0\right] \frac{1+d(\varepsilon)}{1-d(\varepsilon)}. \tag{2}$$

Если дополнительно $|y|_\varepsilon < \infty$, $|Q|_\varepsilon^2 < \infty$, $|y|_\varepsilon^2 < \infty$ для $\varepsilon < \varepsilon_0$, то для тех же ε

$$|x - a|_\varepsilon \leqslant \frac{|y|_\varepsilon + |a|\,|Q|_\varepsilon^2 + \frac{\lambda}{1-\lambda}|y|_\varepsilon^2}{1+|Q|_\varepsilon} \frac{1+d(\varepsilon)}{1-d(\varepsilon)}. \tag{3}$$

Доказательство. Применительно к рассматриваемой ситуации идея доказательства, использовавшаяся в непрерывном случае [3], состоит в том, чтобы показать, что в условиях теоремы 1 функция $x - a$ (x — решение уравнения (1)) является также решением некоторого несобственного уравнения восстановления (см. лемму 3) с другим свободным членом $\hat{y}$ и порождающим распределением $\hat{p}$. Благодаря этому становится возможным использование леммы 3. Так как $|p|_\alpha^2 < \infty$, $Q \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{p}$, то $|Q_\alpha| < \infty$. Отсюда $|\varphi|_\alpha < \infty$, поскольку $\varphi_n \leqslant Q_n$. Функция $d(\varepsilon) = |\varphi|_\varepsilon$ монотонно не убывает потому, что $V(\varepsilon, n)$ монотонно не убывает по n. Непрерывность $d(\varepsilon)$ в нуле следует из леммы 2,

$$d(0) = |\varphi|_0 = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\rho_k Q_k} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+Q_k} =$$

$$= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+Q_k} < 1.$$

Таким образом, существуют $\varepsilon > 0$, для которых $d(\varepsilon) < 1$. Нетрудно проверить, что $|a| \leqslant \frac{1}{\mu_p}(|y|_\alpha^1 + |y_0|) < \infty$. Последовательность $\tilde{x} = x - a$ удовлетворяет уравнению $\tilde{x} = y - a\bar{p} + \tilde{x} * p$. Добавляя к нему его свертку с постоянной функцией $\frac{\lambda}{1-\lambda}$, получаем

$$\tilde{x} = y - a\bar{p} + \frac{\lambda}{1-\lambda} * (y - a\bar{p}) + \frac{\lambda}{1-\lambda} * \tilde{x} * p - \\ - \frac{\lambda}{1-\lambda} * \tilde{x} + \tilde{x} * p. \tag{4}$$

Сумма слагаемых в правой части, не содержавших $\tilde{x}$, имеет вид

$$\tilde{y}_n = y_n - a\bar{p}_n + \left[\frac{\lambda}{1-\lambda} * (y - a\bar{p})\right]_n = \\ = y_n + a \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \bar{p}_k - p_k\right) - \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k = \\ = y_n + a \sum_{k=n+1}^{\infty} Q_k - \frac{\lambda}{1-\lambda} \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k. \tag{5}$$

Сумма оставшихся слагаемых равна

$$\left[\frac{\lambda}{1-\lambda} * \tilde{x} * p\right]_n - \left[\frac{\lambda}{1-\lambda} * \tilde{x}\right]_n + [\tilde{x} * p]_n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \tilde{x}_k \left[\frac{\lambda}{1-\lambda} \left(\sum_{i=0}^{n-k} p_i - 1\right) + p_{n-k}\right] = -[\tilde{x} \times Q]_n.$$

Поэтому (4) эквивалентно уравнению

$$\tilde{x} = \tilde{y} - \tilde{x} * Q. \tag{6}$$

Положим $\varphi_n = Q_n \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\rho_k Q_k}$. Заметим, что $\varphi_n \geqslant 0$, так как $Q_n \geqslant 0$. Из (6) находим

$$\varphi * \tilde{y} = \tilde{x} * \varphi + \tilde{x} * Q * \varphi,$$

$$\tilde{x} = \tilde{y} - \varphi * \tilde{y} + \tilde{x} * (\varphi + Q * \varphi - Q). \tag{7}$$

Обозначим через A последовательность $\{A_n = \varphi_n + [Q * \varphi]_n - Q_n\}$ и покажем, что $A_n \geqslant 0$. Это следует из определения ρ, φ, формулы

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_k Q_k \prod_{r=0}^{k} \frac{1}{1+\rho_r Q_r} = 1 - \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\rho_k Q_k}$$

и следующих неравенств:

$$\varphi_n + [Q*\varphi]_n - Q_n \geqslant \varphi_n + Q_n \sum_{k=0}^{n} \rho_k \varphi_k - Q_n =$$

$$= \varphi_n + Q_n \left(1 - \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\rho_k Q_k}\right) - Q_n = 0.$$

Как уже было доказано, $|Q|_\alpha < \infty$, $|\varphi|_\alpha < \infty$ и для некоторых $\varepsilon > 0$ $d(\varepsilon) = |\varphi|_\varepsilon < 1$. Тогда для таких ε

$$|A|_\varepsilon = |\varphi + \varphi*Q - Q|_\varepsilon \leqslant 1 - (1 + |Q|_\varepsilon)(1 - |\varphi|_\varepsilon) < 1.$$

Используя введенную последовательность, запишем (7) в виде $\tilde{x} = \tilde{y} - \varphi*\tilde{y} + \tilde{x}*A$ и применим лемму 3:

$$|\tilde{x}|_\varepsilon^0 \leqslant \frac{|\tilde{y} - \varphi*\tilde{y}|_\varepsilon^0}{1 - |A|_\varepsilon} \leqslant \frac{|\tilde{y}|_\varepsilon^0}{1 + |Q|_\varepsilon} \frac{1 + d(\varepsilon)}{1 - d(\varepsilon)}. \tag{8}$$

Оценим $|\tilde{y}|_\varepsilon^0$, используя представление (5) и лемму 1:

$$|\tilde{y}|_\varepsilon^0 = |y + a\bar{Q} - \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{y}|_\varepsilon^0 \leqslant |y|_\varepsilon^0 + \frac{\lambda}{1-\lambda}|y|_\varepsilon^1 + |a||Q|_\varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{\lambda}{1-\lambda}(|y|_\varepsilon^1 + |y_0|) + |y|_\varepsilon^0\right](1 + |Q|_\varepsilon).$$

Подставляя полученную оценку в (8), приходим к (2).

Доказательство (3) проходит аналогично,

$$|\tilde{x}|_\varepsilon \leqslant \frac{|\tilde{y} - \varphi*\tilde{y}|_\varepsilon}{1 - |A|_\varepsilon} \leqslant \frac{|\tilde{y}|_\varepsilon}{1 + |Q|_\varepsilon} \frac{1 + d(\varepsilon)}{1 - d(\varepsilon)},$$

$$|\tilde{y}|_\varepsilon = \left| y + a\bar{Q} - \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{y} \right|_\varepsilon \leqslant |y|_\varepsilon + |a||Q|_\varepsilon^2 + \frac{\lambda}{1-\lambda}|y|_\varepsilon^2.$$

В качестве следствий из теоремы 1 при выборе функции $V(\varepsilon, n)$ вида $(1+\varepsilon n)^\beta$ и $e^{\varepsilon n}$ могут быть получены аналогично тому, как это сделано в работе [3] в непрерывном случае, следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $p \in \varepsilon(\lambda)$, $\mu_{\beta+1} < \infty$, $|y|_0 < \infty$, $|y|_c^0 < \infty$, $|y|_c^1 < \infty$. Тогда если c — положительный корень уравнения $d(c) = 1$, то для $n \geqslant (c\beta)^{-1}$ справедлива оценка

$$|x_n - a| \leqslant 2\left[\frac{\lambda}{1-\lambda}(|y|_c^1 + |y_0|) + |y|_c^0\right] \times$$

$$\times \frac{nc(1+\beta)}{(1+nc)^{\beta+1}} \exp\left[\frac{\lambda}{1-\lambda}\mu_p(1 - \ln(1-\lambda))\right]. \tag{9}$$

Теорема 3. Пусть $p \in \varepsilon(\lambda)$, $|p|_\alpha^2 < \infty$, $|y|_0 < \infty$, $|y|_c^1 < \infty$, $|y|_c^0 < \infty$. Тогда если c — положительный корень уравнения $d(c)=1$, то для $n \geqslant c^{-1}$ справедлива оценка

$$|x_n - a| \leqslant 2\left[\frac{\lambda}{1-\lambda}(|y|_c^1 + |y_0|) + |y|_c^0\right]\frac{c}{c-\varepsilon}\times$$
$$\times \exp\left[\frac{\lambda}{1-\lambda}\mu_p(1-\ln(1-\lambda)) - \varepsilon n - 1\right], \tag{10}$$

где $\varepsilon = \min\left(\alpha, c - \frac{1}{n}\right)$.

Замечание 1. Интересно сравнить «специальные» оценки теорем 1 — 3, действующие в классе $\varepsilon(\lambda)$, с полученными в работе [2] «универсальными» оценками, действующими в классе ε всех распределений с периодом 1.

Пусть $p = q_\lambda * r^{(T)}$, где $r_n^{(T)} = \delta(T, n)$*) (сдвинутое геометрическое распределение) и $y_n = \delta(n, 0)$ (уравнению восстановления (1) с таким свободным членом удовлетворяет «плотность» восстановления $h_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_n^{*k}$).

Степенная оценка, приведенная в теореме 2 для случая $\beta = 1$, примет вид

$$\left|h_n - \frac{\lambda}{\lambda(T-1)+1}\right| \leqslant \frac{4}{n}\,\frac{1-(1-\lambda)^{T-1}(1+\lambda T-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)^T}\times$$
$$\times \exp\left[\frac{\lambda(T-1)+1}{1-\lambda}(1-\ln(1-\lambda))\right]. \tag{11}$$

Универсальная оценка, приведенная в теореме 4. 7. 2. [2, с. 155], преобразуется в данном случае к виду

$$\left|h_n - \frac{\lambda}{\lambda(T-1)+1}\right| \leqslant \frac{4}{n}\left\{(T+1)\Pi(T)K_{\lambda,T}[\lambda(1-\lambda)]^{-2\Pi(T)K_{\lambda,T}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda(T-1)^2}{\lambda(T-1)+1} + \frac{4T-5}{\lambda(T-1)+1} + \frac{3}{\lambda(\lambda T-\lambda+1)}\right\}, \tag{12}$$

где $\Pi(T)$ — сумма всех простых чисел, не превосходящих $T+1$,

$$K_{\lambda,T} = \frac{(3T^2-6T+4)\lambda^2+(6T-9)\lambda+6}{2\lambda^2}+1.$$

При $T \to \infty$ правая часть оценки (11) имеет порядок

$n^{-1}L_1e^{L_2T}$ $(L_i, R_i = \text{const} > 0)$, а (12) — $n^{-1}R_1T^3\Pi(T)e^{R_2\Pi(T)T^2}$,

---

*) $\delta(i, j) = 1$, если $i = j$, 0, если $i \neq j$ (символ Кронекера).

откуда следует, что при больших T оценка (11) заведомо лучше. При $\lambda \to 0$ левая часть (11) оценивается выражением вида $n^{-1}L_3$, а (12) — $n^{-1}R_3\lambda^{-2}\lambda^{-R_4\lambda^{-2}}$, т. е. оценка (11) также оказывается лучше. Наконец, при $\lambda \to 1$ оценка (11) — порядка $n^{-1}L_4(1-\lambda)^{-L_5(1-\lambda)^{-1}} \times e^{L_6(1-\lambda)-1}$, а (12) — $n^{-1}(1-\lambda)^{-R^5}$, т. е. лучше оказывается оценка (12).

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М., 1964. 2. *Калашников В. В.* Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М., 1978. 3. *Карташов Н. В.* О явных оценках скорости сходимости в теореме восстановления.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 18.

Поступила в редколлегию 01.03.81

УДК 519.21

Д. Ф. ВЫСОЧАНСКИЙ, мл. науч. сотр., Ю. И. ПЕТУНИН, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОДНОВЕРШИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пожалуй, ни в одной области теории вероятностей нет такого обилия неверных результатов или неправильно доказанных теорем, как в теории одновершинных распределений (см. например, [1, с. 64; 2, с. 170, 172]). Степень ошибочности этих результатов варьирует в довольно широких пределах — от абсолютно неверных утверждений до теорем, которые можно признать правильными с небольшими оговорками. В этой работе мы рассмотрим, в частности, одно весьма распространенное утверждение — так называемое алфавитное правило расположения математического ожидания, медианы и моды одновершинного распределения (см. [1, с. 64]) и покажем, что степень его ошибочности не слишком велика.

Пусть $F(t)$ — функция одновершинного по Хинчину распределения с математическим ожиданием m, медианой μ, конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$ и множеством мод $\mathfrak{M}$ (см. [2 — 4]).

Если точка $M \in \mathfrak{M}$ (т. е. M — мода распределения $F(t)$), то $F(t)$ имеет плотность вероятностей $f(t)$: $R^1 \setminus \{M\} \to [0, \infty)$, монотонно неубывающую на интервале $(-\infty, M)$ и монотонно невозрастающую на интервале (M, ∞) (см. [2, 4, 5]).

Теорема 1. Множество $\mathfrak{M}$ является сегментом («сегмент мод»).

Доказательство. Покажем вначале, что $\{\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M}\} \subset \mathfrak{M}$. Из определения инфимума следует, что для любых точек $t_1, t_2 \in (\inf \mathfrak{M}, \infty)$ таких, что $t_1 < t_2$, существует $M \in \mathfrak{M} \cap (\inf \mathfrak{M}, t_1)$. Поэтому $f(t_1) \geqslant f(t_2)$ (см. [4, с. 197]). Итак, функция $f(t)$ монотонно не возрастает на интервале $(\inf \mathfrak{M}, \infty)$ и монотонно не убывает на интервале $(-\infty, \inf \mathfrak{M}) \subset (-\infty, M)$. Таким образом, $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$ (см. [4, с. 197]); аналогично доказывается, что $\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$.