откуда следует, что при больших T оценка (11) заведомо лучше. При $\lambda \to 0$ левая часть (11) оценивается выражением вида $n^{-1}L_3$, а (12) — $n^{-1}R_3\lambda^{-2}\lambda^{-R_4\lambda^{-2}}$, т. е. оценка (11) также оказывается лучше, Наконец, при $\lambda \to 1$ оценка (11) — порядка $n^{-1}L_4(1-\lambda)^{-L_5(1-\lambda)^{-1}} \times \times e^{L_6(1-\lambda)-1}$, а (12) — $n^{-1}(1-\lambda)^{-R^5}$, т. е. лучше оказывается оценка (12).

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М., 1964. 2. *Калашников В. В.* Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М., 1978. 3. *Карташов Н. В.* О явных оценках скорости сходимости в теореме восстановления.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1978, вып. 18.

Поступила в редколлегию 01.03.81

УДК 519.21

Д. Ф. ВЫСОЧАНСКИЙ, мл. науч. сотр., Ю. И. ПЕТУНИН, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОДНОВЕРШИННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пожалуй, ни в одной области теории вероятностей нет такого обилия неверных результатов или неправильно доказанных теорем, как в теории одновершинных распределений (см. например, [1, с. 64; 2, с. 170, 172]). Степень ошибочности этих результатов варьирует в довольно широких пределах — от абсолютно неверных утверждений до теорем, которые можно признать правильными с небольшими оговорками. В этой работе мы рассмотрим, в частности, одно весьма распространенное утверждение — так называемое алфавитное правило расположения математического ожидания, медианы и моды одновершинного распределения (см. [1, с. 64]) и покажем, что степень его ошибочности не слишком велика.

Пусть $F(t)$ — функция одновершинного по Хинчину распределения с математическим ожиданием m, медианой μ, конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$ и множеством мод $\mathfrak{M}$ (см. [2 — 4]).

Если точка $M \in \mathfrak{M}$ (т. е. M — мода распределения $F(t)$), то $F(t)$ имеет плотность вероятностей $f(t)$: $R^1 \setminus \{M\} \to [0, \infty)$, монотонно неубывающую на интервале $(-\infty, M)$ и монотонно невозрастающую на интервале (M, ∞) (см. [2, 4, 5]).

Теорема 1. Множество $\mathfrak{M}$ является сегментом («сегмент мод»).

Доказательство. Покажем вначале, что $\{\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M}\} \subset \subset \mathfrak{M}$. Из определения инфимума следует, что для любых точек $t_1, t_2 \in (\inf \mathfrak{M}, \infty)$ таких, что $t_1 < t_2$, существует $M \in \mathfrak{M} \cap (\inf \mathfrak{M}, t_1)$. Поэтому $f(t_1) \geqslant f(t_2)$ (см. [4, с. 197]). Итак, функция $f(t)$ монотонно не возрастает на интервале $(\inf \mathfrak{M}, \infty)$ и монотонно не убывает на интервале $(-\infty, \inf \mathfrak{M}) \subset (-\infty, M)$. Таким образом, $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$ (см. [4, с. 197]); аналогично доказывается, что $\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$.

Покажем теперь, что весь отрезок $[\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$. Так как для любого $M \in [\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M}]$ функция $f(t)$ является монотонно неубывающей в интервале $(-\infty, M) \subset (-\infty, \sup \mathfrak{M})$ и монотонно невозрастающей в интервале $(M, \infty) \subset (\inf \mathfrak{M}, \infty)$, то доказываемое вложение справедливо (см. [4, с. 197]). Вместе с очевидным включением $[\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M}] \supset \mathfrak{M}$ оно означает, что $\mathfrak{M} = [\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M}]$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если интервал $(\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M})$ не пустой, то распределение $F(t)$ абсолютно непрерывно на R^1, а его плотность $f(t)$ равномерно ограничена на R^1 своим значением в какой-либо точке $M \in (\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M})$; на самом интервале $(\inf \mathfrak{M}, \sup \mathfrak{M})$ функция $f(t)$ постоянна.

Если распределение $F(t)$ в некоторой точке $t_0 \in R^1$ не будет абсолютно непрерывным (имеет в точке t_0 атом), то сегмент мод вырождается в данную точку: $\mathfrak{M} = \{t_0\}$, а во всех остальных точках $t \in R^1 \setminus \{t_0\}$ распределение $F(t)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Лемма. Пусть на некотором полуинтервале $[a, b)$, где $a < b$, функции $k(t)$, $l(t)$ и $m(t)$ удовлетворяют условиям:

1) $\infty > \int_a^b k(t)\,dt \geqslant \int_a^b l(t)\,dt > -\infty$;

2) $\exists c \in [a, b) : \forall t \in [a, c) : k(t) \leqslant l(t)$ и $\forall t \in (c, b) : k(t) \geqslant l(t)$;

3) $m(t)$ — неотрицательная и строго возрастающая функция на $[a, b)$;

4) произведения $m(t)\,k(t)$ и $m(t)\,l(t)$ — интегрируемые на $[a, b)$ функции.

Тогда справедливо неравенство

$$\int_a^b m(t)\,k(t)\,dt \geqslant \int_a^b m(t)\,l(t)\,dt, \tag{1}$$

в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$k(t) = l(t) \text{ почти всюду на } [a, b). \tag{2}$$

Доказательство. I. Из условий $a < b$ и 2) следует

$$a \leqslant c < b. \tag{3}$$

Учитывая неравенство 1), получаем

$$\int_c^b [k(t) - l(t)]\,dt \geqslant \int_a^c [l(t) - k(t)]\,dt, \tag{4}$$

где оба подынтегральных выражения неотрицательны. Отсюда и из условий 3), 4), (3) следует, что

$$\int_a^b m(t)\,k(t)\,dt = \int_a^c m(t)\,k(t)\,dt + \int_c^b m(t)\,[k(t) - l(t)]\,dt +$$

$$+\int_c^b m(t)\,l(t)\,dt \geqslant \int_a^c m(t)\,k(t)\,dt + m(c)\int_c^b [k(t)-l(t)]\,dt +$$

$$+\int_c^b m(t)\,l(t)\,dt \geqslant \int_a^c m(t)\,k(t)\,dt + m(c)\int_a^c [l(t)-k(t)]\,dt +$$

$$+\int_c^b m(t)\,l(t)\,dt \geqslant \int_a^c m(t)\,k(t)\,dt + \int_a^c m(t)\,[l(t)-k(t)]\,dt +$$

$$+\int_c^b m(t)\,l(t)\,dt = \int_a^b m(t)\,l(t)\,dt,$$

значит, справедливо неравенство (1).

II. Из условия (2) следует, что почти всюду на $[a, b)$ $m(t)\,k(t) = m(t)\,l(t)$. Последнее соотношение вместе с условием 4) означает, что в этом случае в неравенстве (1) имеет место равенство.

III. Если в (1) имеет место равенство, то в силу условий 3), 4), (3) все неравенства в I, начиная с формулы (4), превращаются в равенства, поэтому на основании 4) и (3) справедливо соотношение

$$\int_c^b [m(t)-m(c)]\,[k(t)-l(t)]\,dt = \int_a^c [m(c)-m(t)]\,[l(t)-k(t)]\,dt = 0. \tag{5}$$

Поскольку в предыдущих интегралах подынтегральные выражения неотрицательны (см. неравенство (3) и условия 2), 3)), то из равенства (5) в силу хорошо известных результатов математического анализа (см. [6, с. 210]) вытекает $[m(t)-m(c)]\,[k(t)-l(t)] = 0$ почти всюду на $[a, b)$, откуда, используя еще раз условие 3), находим, что $k(t) = l(t)$ почти всюду на $[a, b)$. Лемма доказана.

Следствие 2. Если на некотором полуинтервале $[a, b)$ для функций $k(t)$, $l(t)$ и $m(t)$, кроме условий 2), и 3), справедливо неравенство

$$-\infty < \int_a^b m(t)\,k(t)\,dt \leqslant \int_a^b m(t)\,l(t)\,dt < \infty, \tag{6}$$

а функции $k(t)$ и $l(t)$ интегрируемы на $[a, b)$, то

$$\int_a^b k(t)\,dt \leqslant \int_a^b l(t)\,dt, \tag{7}$$

где равенство выполняется тогда и только тогда, когда $k(t) = l(t)$ почти всюду на $[a, b)$.

Доказательство. Если неравенство (7) не имеет места, то для функций $k(t)$, $l(t)$ и $m(t)$ выполняются все условия леммы, причем функции $k(t)$ и $l(t)$ не могут быть эквивалентными. В силу леммы отсюда следует, что справедливо неравенство, противоположное (6), а это противоречит условиям теоремы. Далее, предположим, что функции $k(t)$ и $l(t)$ не эквивалентны, а в соотношении (7) имеет место знак равенства. Тогда, проводя аналогичные рассуждения, можно также доказать справедливость неравенства, противоположного (6). Следствие доказано.

Следствие 3. Для произвольной плотности вероятностей $g(t)$: $R^1 \to [0, \infty)$ с дисперсией $\sigma^2 > 0$ справедливо неравенство

$$\bar{g} = \operatorname*{vrai\,max}_{t \in R^1} g(t) \geqslant (2\sqrt{3}\sigma)^{-1}, \qquad (8)$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$g(t) \sim \begin{cases} 0, & \text{если } |t - m| > \sqrt{3}\sigma; \\ (2\sqrt{3}\sigma)^{-1}, & \text{если } |t - m| \leqslant \sqrt{3}\sigma, \end{cases} \qquad (9)$$

знак $\sim$ означает эквивалентность функций, а m — математическое ожидание случайной величины с плотностью вероятностей $g(t)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно рассмотреть нетривиальный случай, когда $m = 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\bar{g} < \infty$, $p = \int\limits_{-\infty}^{0} g(t)\,dt \geqslant 1/2$ $\left(\text{поэтому} \int\limits_{0}^{\infty} g(t)\,dt = 1 - p \leqslant 1/2\right)$. Если $k(t) = g(t)$, $l(t) = \bar{g}$ при $|t| \leqslant p/\bar{g}$ и $l(t) = 0$ при $|t| > p/\bar{g}$; $m(t) = t^2$, то на полуинтервале $[a, b) = [0, -\infty)$ выполняются все условия леммы с заменой обычной ориентации полуинтервала $[a, b)$ на противоположную: $a = 0 > -\infty = b$ (см. определение чисел $\bar{g}$ и p). Поэтому

$$\int\limits_{0}^{-\infty} t^2 g(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} m(t)\,k(t)\,dt \leqslant \int\limits_{a}^{b} m(t)\,l(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{-\infty} t^2 l(t)\,dt = \int\limits_{0}^{-p/\bar{g}} t^2 \bar{g}\,dt = -p^3/(3\bar{g}^2),$$

т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} t^2 g(t)\,dt \geqslant p^3/(3\bar{g}^2), \qquad (10)$$

где знак равенства имеет место лишь тогда, когда на луче $(-\infty, 0]$ вышеуказанные функции $k(t)$ и $l(t)$ эквивалентны, т. е. когда

$$g(t) \sim \begin{cases} 0, & \text{если } t < -p/\bar{g}; \\ \bar{g}, & \text{если } t \in [-p/\bar{g}, 0]. \end{cases} \qquad (11)$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\int_{-\infty}^{0} |t|\, g(t)\, dt \geqslant p^2/(2\bar{g}),$$

откуда (напомним, что $m=0$!)

$$\int_{0}^{\infty} tg(t)\, dt = m - \int_{-\infty}^{0} tg(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} |t|\, g(t)\, dt \geqslant p^2/(2\bar{g}) = \int_{0}^{\infty} tl(t)\, dt,$$

так что

$$\int_{0}^{\infty} tg(t)\, dt \geqslant \int_{0}^{\infty} tl(t)\, dt. \tag{12}$$

Из определения функции $l(t)$ и (12), (8) вытекает, что на полуинтервале $[a, b) = [0, \infty)$ для функций $k_1(t) = tg(t)$, $l_1(t) = tl(t)$, $m_1(t) = t$ справедливы все условия леммы, поэтому

$$\int_{0}^{\infty} t^2 g(t)\, dt = \int_{a}^{b} m_1(t)\, k_1(t)\, dt \geqslant \int_{a}^{b} m_1(t)\, l_1(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} t^2 l(t)\, dt,$$

где равенство имеет лишь в том случае, когда на полуинтервале $[0, \infty)$ $k_1(t) \sim l_1(t)$, т. е.

$$g(t) \sim \begin{cases} \bar{g}, & \text{если } t \in [0, p/\bar{g}]; \\ 0, & \text{если } t > p/\bar{g}. \end{cases} \tag{13}$$

Следовательно,

$$\int_{0}^{\infty} t^2 g(t)\, dt \geqslant \int_{0}^{\infty} t^2 l(t)\, dt = \int_{0}^{p/\bar{g}} t^2 \bar{g}\, dt = p^3/(3\bar{g}^2),$$

так что

$$\int_{0}^{\infty} t^2 g(t)\, dt \geqslant p^3/(3\bar{g}^2), \tag{14}$$

где знак равенства имеет место лишь при условии (13). Из условия $m=0$, а также (14), (10), (11) и (13) имеем

$$\sigma^2 \geqslant 2p^3/(3\bar{g}^2), \tag{15}$$

причем это неравенство обращается в равенство лишь тогда, когда

$$g(t) \sim \begin{cases} 0, & \text{если } |t| > p/\bar{g}; \\ \bar{g}, & \text{если } |t| \leqslant p/\bar{g}. \end{cases} \tag{16}$$

Из неравенства (15) с учетом предположения $p \geqslant 1/2$ получаем

$$\bar{g} \geqslant p\sqrt{2p}/(\sqrt{3}\sigma) \geqslant (2\sqrt{3}\sigma)^{-1},$$

где первый знак равенства имеет место лишь при условии (16), а второй — лишь при $p = 1/2$. Таким образом, справедливо неравенство (8), в котором знак равенства выполняется лишь для функции (9) (очевидно, неравенство (8) превращается в равенство для функции (9)). Следствие доказано.

Замечание 1. Легко показать, что в классе невырожденных распределений (т. е. когда $\sigma \neq 0$) знак равенства в (8) достигается лишь для равномерных распределений.

Определение. Будем говорить, что множество $\mathfrak{N} \subset R^1$ является почти связным, если существует множество $N \subset R^1$ лебеговой меры нуль такое, что объединение $\mathfrak{N} \cup N$ — связное множество.

Следствие 4. Пусть для некоторого одновершинного распределения с медианой μ, модой $M \geqslant \mu$ и плотностью $f(t): R^1 \to [0, \infty)$ существует точка $\alpha \in [\mu, M]$ такая, что множество $T = \{t : t \geqslant 0, f(\alpha + t) \geqslant f(\alpha - t) > 0\}$ является почти связным. Тогда для данного распределения

$$m \leqslant \alpha, \tag{17}$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда распределение симметрично относительно точки $\alpha = m = \mu$.

Доказательство. Поскольку по условию $\alpha \geqslant \mu$, то

$$\int_0^\infty f(\alpha - t)\, dt = -\int_\alpha^{-\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^\alpha f(t)\, dt = \int_{-\infty}^\mu f(t)\, dt +$$

$$+ \int_\mu^\alpha f(t)\, dt \geqslant \int_{-\infty}^\mu f(t)\, dt = 1/2;$$

с другой стороны,

$$\int_0^\infty f(\alpha - t)\, dt = \int_{-\infty}^\alpha f(t)\, dt \leqslant \int_{-\infty}^\infty f(t)\, dt = 1,$$

так что

$$1/2 \leqslant \int_0^\infty f(\alpha - t)\, dt < \infty. \tag{18}$$

Аналогично получаем

$$-\infty < \int_0^\infty f(\alpha + t)\, dt \leqslant 1/2. \tag{19}$$

Из неравенств (18) и (19) следует

$$\infty > \int_0^\infty f(\alpha - t)\, dt \geqslant \int_0^\infty f(\alpha + t)\, dt > -\infty. \tag{20}$$

Заметим, далее, что $T \neq \varnothing$, так как $0 \in T$, поэтому существует $\sup T$. Если $\sup T = \infty$, то из определения множества T и (20) вытекает, что данное распределение симметрично относительно точки α, поэтому $m = \mu = \alpha$. В самом деле,

$$T = [0, \infty) \Rightarrow \forall t \geqslant 0 : f(\alpha + t) \geqslant f(\alpha - t) \Rightarrow \forall t \in [0, \infty) : f(\alpha + t) - $$
$$- f(\alpha - t) \geqslant 0 \Rightarrow \int_0^\infty [f(\alpha + t) - f(\alpha - t)]\, dt \geqslant 0. \qquad (21)$$

Последнее неравенство из (21) вместе с (20) дает равенство

$$\int_0^\infty [f(\alpha + t) - f(\alpha - t)]\, dt = 0.$$

Отсюда и из предпоследнего неравенства (21) в силу хорошо известных теорем математического анализа (см. [6, с. 151]) следует

$$\operatorname{mes}\{t : t \geqslant 0,\ f(\alpha + t) \neq f(\alpha - t)\} = 0,$$

так что плотность вероятностей $f(t)$ можно считать симметричной относительно точки α. Обратное утверждение очевидно.

Пусть теперь $\sup T = c < \infty$, тогда $c \in [0, \infty)$. Для функций $k(t) = f(\alpha - t)$, $l(t) = f(\alpha + t)$, $m(t) = t$ и числа c выполняются все условия леммы, поэтому

$$\int_0^\infty t f(\alpha - t)\, dt > \int_0^\infty t f(\alpha + t)\, dt, \qquad (22)$$

причем неравенство (22) является строгим, ибо $c < \infty$ и $\forall t > c$: $f(\alpha - t) > f(\alpha + t)$. Используя (22), получим

$$\alpha - m = \alpha \int_{-\infty}^\infty f(t)\, dt - \int_{-\infty}^\infty t f(t)\, dt = \int_{-\infty}^\alpha (\alpha - t) f(t)\, dt -$$
$$- \int_\alpha^\infty (t - \alpha) f(t)\, dt = \int_0^\infty t f(\alpha - t)\, dt - \int_0^\infty t f(\alpha + t)\, dt > 0.$$

Таким образом, если данное распределение не симметрично относительно вышеуказанной точки α, то $m < \alpha$. Справедливо и обратное утверждение: неравенство $m < \alpha$ означает, что распределение не симметрично относительно точки α. Следствие доказано.

Утверждение, аналогичное следствию 3, можно сформулировать и в случае, когда $\mu \geqslant M$. Оно доказывается так же, как и следствие 3, с использованием леммы. Мы получаем в итоге $m \geqslant \alpha \in [M, \mu]$ (ср. с неравенством (17)).

Теорема 2. Если для одновершинного распределения выполняются условия следствия 3 при $\mu \leqslant M$ (или $\mu \geqslant M$) и $\alpha = \mu$, то для данного распределения справедливо алфавитное правило (т. е. медиана μ лежит между математическим ожиданием m и модой M).

Доказательство этого утверждения вытекает из следствия 3 и его модификации при $\mu \geqslant M$.

Замечание 2. Утверждения (см. [1, с. 64], и [7, с. 91—93]) о том, что для произвольного одновершинного распределения справедлив алфавитный порядок (прямой или обратный) взаимного расположения на числовой прямой его математического ожидания m, медианы μ и моды M, не соответствуют действительности. В этом можно убедиться на следующем контрпримере:

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t<-\sigma\sqrt{3},\ t>(3-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3};\\ (2\sigma\sqrt{3})^{-1}, & \text{если } t\in[-\sigma\sqrt{3},0]\cup(\sigma\varepsilon/n,\ (1-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3});\\ [(2\sqrt{3})^{-1}+n^2t]\,\sigma^{-1}, & \text{если } t\in(0,\sigma\varepsilon/n];\\ \varepsilon^2(4\sigma\sqrt{3})^{-1}, & \text{если } t\in[(1-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3},\ (3-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3}],\end{cases}$$

где n — произвольное натуральное число, а $\varepsilon\in(0,\ 1/\sqrt{3}]$.

Легко показать, что $f(t)$ — плотность вероятностей одновершинного распределения с положительной дисперсией $\sigma^2>0$. Для случая одновершинного распределения с атомом можно привести такой контрпример:

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\leqslant-3;\\ 0{,}175(t+3), & \text{если } t\in(-3,1];\\ 0{,}8+0{,}05(t-1), & \text{если } t\in(1,5],\\ 1, & \text{если } t\geqslant 5.\end{cases}$$

Как в первом, так и во втором примере $\mu<m\leqslant\inf\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — сегмент мод распределения.

1. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределения. М., 1966. 2. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.— Л., 1949. 3. *Хинчин А. Я.* Об унимодальных распределениях.— Изв. НИИ мат. и мех. Томского ун-та, 1938, вып. 2, № 2. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1967. 5. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948. 6. *Вулих Б. З.* Краткий курс функций вещественной переменной. М., 1965. 7. *Закс Л.* Статистическое оценивание. М., 1976.

Поступила в редколлегию 14.01.80

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, д-р физ.-мат. наук, Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА. I

Изучению предельных теорем для сумм случайных величин, связанных в неоднородную цепь Маркова , посвящено огромное число работ. Центральная предельная теорема для таких сумм,