(т. е. медиана μ лежит между математическим ожиданием m и модой M).

Доказательство этого утверждения вытекает из следствия 3 и его модификации при $\mu \geqslant M$.

Замечание 2. Утверждения (см. [1, с. 64], и [7, с. 91—93]) о том, что для произвольного одновершинного распределения справедлив алфавитный порядок (прямой или обратный) взаимного расположения на числовой прямой его математического ожидания m, медианы μ и моды M, не соответствуют действительности. В этом можно убедиться на следующем контрпримере:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < -\sigma\sqrt{3},\ t > (3-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3}; \\ (2\sigma\sqrt{3})^{-1}, & \text{если } t \in [-\sigma\sqrt{3}, 0] \cup (\sigma\varepsilon/n,\ (1-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3}); \\ [(2\sqrt{3})^{-1} + n^2 t]\,\sigma^{-1}, & \text{если } t \in (0, \sigma\varepsilon/n]; \\ \varepsilon^2(4\sigma\sqrt{3})^{-1}, & \text{если } t \in [(1-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3},\ (3-2\varepsilon^2)\sigma\sqrt{3}], \end{cases}$$

где n — произвольное натуральное число, а $\varepsilon \in (0, 1/\sqrt{3}]$.

Легко показать, что $f(t)$ — плотность вероятностей одновершинного распределения с положительной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Для случая одновершинного распределения с атомом можно привести такой контрпример:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant -3; \\ 0{,}175(t+3), & \text{если } t \in (-3, 1]; \\ 0{,}8 + 0{,}05(t-1), & \text{если } t \in (1, 5], \\ 1, & \text{если } t \geqslant 5. \end{cases}$$

Как в первом, так и во втором примере $\mu < m \leqslant \inf \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — сегмент мод распределения.

1. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределения. М., 1966. 2. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.— Л., 1949. 3. *Хинчин А. Я.* Об унимодальных распределениях.— Изв. НИИ мат. и мех. Томского ун-та, 1938, вып. 2, № 2. 4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1967. 5. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948. 6. *Вулих Б. З.* Краткий курс функций вещественной переменной. М., 1965. 7. *Закс Л.* Статистическое оценивание. М., 1976.

Поступила в редколлегию 14.01.80

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, д-р физ.-мат. наук, Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ МАРКОВА. I

Изучению предельных теорем для сумм случайных величин, связанных в неоднородную цепь Маркова , посвящено огромное число работ. Центральная предельная теорема для таких сумм, как правило, доказывалась с помощью подхода, предложенного С. Н. Бернштейном. Идея этого подхода весьма проста, но доказательство теорем было громоздким. По-видимому, Р. Л. Добрушин [1] первый применил для доказательства предельных теорем предельные теоремы для сумм мартингал-разностей.

В нашей статье используется другой подход, который заключается в непосредственном сведении суммы случайных величин к суммам мартингал-разностей [2]. С помощью этого подхода просто доказывается известная центральная предельная теорема для сумм ограниченных случайных величин, связанных в цепь Маркова.

Теорема. Пусть для каждого значения n случайные величины ξ_{ns}, $s=\overline{1,n}$ связаны в цепь Маркова с фазовыми пространствами (X_{ns}, A_{ns}), переходными измеримыми функциями $Q_{ns}(x, B)$ и начальными распределениями $\mu_{n1}(B)$,

$$\sup_n \sup_{s=\overline{1,n}} \sup_{x_1,x_2,B} |Q_{ns}(x_1, B) - Q_{ns}(x_2, B)| < 1, \quad \mathbf{M}\xi_{ns}=0; \tag{1}$$

$$|\xi_{ns}| < C < \infty, \quad n, s = 1, 2, \dots; \tag{2}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} [\mathbf{D}\Sigma_{k=1}^n \xi_{nk}]\, n^{-1/2} = \infty. \tag{3}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\Sigma_{k=1}^n \xi_{kn} (\mathbf{D}\Sigma_{k=1}^n \xi_{kn})^{-1/2} < x\} =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(-y^2/2)\, dy.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\Sigma_{s=1}^n (\xi_{sn} - \mathbf{M}\xi_{sn}) = \Sigma_{s=1}^n \gamma_{sn},$$

где

$$\gamma_{sn} = \mathbf{M}_{s-1}(\Sigma_{k=s-1}^n \xi_{kn}) - \mathbf{M}_s(\Sigma_{k=s-1}^n \xi_{kn}) =$$

$$= \Sigma_{k=s}^n \int\int y [Q_{s-1}^k (dy, \xi_{(s-1)n}) - Q_{s-1}^k (dy, x)]\, Q_1^{s-1}(dx) -$$

$$- \xi_{sn} - \Sigma_{k=s+1}^n \int\int y [Q_s^k (dy, \xi_{sn}) - Q_s^k (dy, x)]\, Q_1^{s-1}(dx),$$

где $\mathbf{M}_s$ — условное математическое ожидание при фиксированной минимальной σ-алгебре событий, относительно которой измеримы случайные величины ξ_{ln}, $l=\overline{1, s-1}$, $Q_p^k(A, x) = \mathbf{P}\{\xi_{kn} \in A/\xi_{pn} = x\}$.

Используя (1), получаем $|\gamma_{sn}| \leqslant C_1$. Итак, $\Sigma_{s=1}^n \gamma_{sn}$ — это суммы ограниченных мартингал-разностей. Для них справедлива центральная предельная теорема, если выполняются следующие хорошо известные условия:

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} c_n^{-1} \Sigma_{k=1}^n (\mathbf{M}_k \gamma_k^2 - \mathbf{M}\gamma_k^2) = 0, \tag{4}$$

для любого $\tau > 0$

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} c_n^{-1} \Sigma_{k=1}^n \mathbf{M}_k \gamma_{kn}^2 \chi (c_n^{-1/2} |\gamma_{kn}| > \tau) = 0, \tag{5}$$

где $c_n = \Sigma_{k=1}^n \mathbf{M}\gamma_{kn}^2$.

Так как величины γ_{kn} ограничены и выполняется условие (3), то справедливо (5). Докажем (4). Очевидно, что $\mathbf{M}_k\gamma_{kn}^2 - \mathbf{M}\gamma_{kn}^2 = f(\xi_{k-1n})$, где f — некоторая борелевская функция. Тогда

$$\mathbf{M}\,(c_n^{-1}\Sigma_{k=1}^n (\mathbf{M}_k\gamma_{kn}^2 - \mathbf{M}\gamma_{kn}^2))^2 = c_n^{-2}\Sigma_{k,p=1}^n \mathbf{M} f(\xi_{k-1n})\, f(\xi_{p-1n}).$$

Используя это соотношение и (1) — (3), получаем (4). Теорема доказана.

1. *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова П.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 4, 2. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы. Киев, 1975.

Поступила в редколлегию 02.12.80

УДК 519.21

В. ГРЕКШ, стажер, Институт прикладной математики и механики АН УССР

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ К УПРАВЛЕНИЮ СЛУЧАЙНЫМИ ПОЛЯМИ

Рассматривается управляемая система, определенная стохастическим уравнением Гурса. С помощью интегрального критерия качества формулируется задача управления. Ее решение основано на использовании теоремы двойственности.

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ — полное вероятностное пространство. Рассмотрим управляемое стохастическое уравнение вида

$$X_{xy} = \gamma + \int_0^x \int_0^y a(u, v, X_{uv}, U_{uv})\, dv du + \int_0^x \int_0^y b(u, v, X_{uv}, U_{uv})\, w(du, dv). \tag{1}$$

Здесь $\gamma \in R^n$ — n-мерное евклидово пространство, $n \geqslant p$, коэффициенты $a: [0, 1] \times [0, 1] \times R^n \times R^p \to R^n$, $b: [0, 1] \times [0, 1] \times R^n \times R^p \to$ $\to (R^n)$ $(L(R^n)$ — множество матриц $b = (b_{ij})_{i,j=1\ldots n})$ со свойствами:

$$\| a(x, y, \varphi, \alpha) - a(x, y, \varphi, \beta) \|_{R^n} + \| b(x, y, \varphi, \alpha) - b(x, y, \varphi, \beta) \|_{L(R^n)} \leqslant$$
$$\leqslant c \| \alpha - \beta \|_{R^p},$$

$$\| a(x, y, \varphi, \alpha) - a(x, y, \psi, \alpha) \|_{R^n} + \| b(x, y, \varphi, \alpha) -$$
$$- b(x, y, \psi, \alpha) \|_{L(R^n)} \leqslant c \| \varphi - \psi \|_{R^n},$$

$$\| a(x, y, \varphi, \alpha) \|_{R^n} + \| b(x, y, \varphi, \alpha) \|_{L(R^n)} \leqslant c(1 + \| \varphi \|_{R^n} + \| \alpha \|_{R^p})$$

для всех $x, y \in [0, 1]$; $\varphi, \psi \in R^n$; $\alpha, \beta \in R^n$; $w_{(x,y)} = \begin{pmatrix} w_1(x, y) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n(x, y) \end{pmatrix}$, где