мальным решением проблемы (1), (2), необходимо, чтобы существовали $(G_{xy}) \in \mathfrak{L}^2(R^n)$ и

$$\overline{\mathfrak{H}}(x, y, X^0_{xy}, U^0_{xy}, P^0_{xy}, G_{xy}) = \max_{V \in U_d} \overline{\mathfrak{H}}(x, y, X^0_{xy}, V, P^0_{xy}, G_{xy})$$

почти всюду по мере $dPdydx$, где (X^0_{xy}) есть решение уравнения (1) для $U_{xy} = U^0_{xy}$ и P^0_{xy} есть решение уравнения

$$dP^0_{xy} = -\nabla_{X^0_{xy}} \overline{\mathfrak{H}}(x, y, X^0_{xy}, U^0_{xy}, G_{xy})\, dydx + G_{xy} w(dx, dy)$$

с $P^0_{11} = 0$; $P^0_{x1} = \int\limits_x^1 \int\limits_0^1 G_{st} w(ds, dt)$; $P^0_{1y} = \int\limits_0^1 \int\limits_y^1 G_{st} w(ds, dt)$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы. Киев, 1977. 2. *Müller H. O.* Behandlung eines stochastischen Stenerproblems mit Hilfe eines abstrakten Maximumprinzipes von Spremann.— Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1979, 54. 3. *Rockafeller R. T.* Conjugate convex function in optimal control and the calcules of variationes. — J. Math. Anal. Appl. 1970, 32. 4. *Bismut J. M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control.— J. Math. Anal. Appl. 1973, 44. 5. *Wets, Roger J. B.* On the relations between stochastic and deterministic optimization. — Lecture Notes in Economics and Math. Syst., 1975, N 107. 6. *Göpfert A.* Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen. Leipzig, 1973. 7. *Иоффе А. Д., Тихомиров И. М.* Теория экстремальных задач. М., 1974. 8. *Гихман Ил. И.* О формуле Ито для двупараметрических стохастических интегралов.— Теория случайных процессов, 1976, вып. 4.

Поступила в редколлегию 10.06.80

УДК 519.21

Н. М. ЗИНЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $X(i)$, $i = (i_1, \ldots, i_N)$ — однородное и изотропное гауссовское случайное поле, определенное на целочисленной решетке Z^N в R^N_+, $\mathbf{M}X(i) = 0$, $\mathbf{M}X(i)X(i+j) = R(|j|)$. Введем обозначения: $|\cdot|$ — норма в R^N, $[\cdot]$ — целая часть числа, $i * n$ — вектор с координатами $i_\nu n_\nu$, $\nu = \overline{1, N}$, $\|n\| = n_1 \ldots n_N$, $\ln_2 a = \ln\ln(a \vee e^c)$. Операции $i \pm \pm j$ и неравенства $i \leqslant n\ (i < n)$, где $i, j, n \in Z^N$, будем понимать покоординатно, а $n \to \infty$ означает, что $n_\nu \to \infty$, $\nu = \overline{1, N}$.

Пусть $S(n) = S(n_1, \ldots, n_N) = \Sigma_{i \leqslant n} X(i)$, $V(n) = \mathbf{M}S^2(n)$. Изучим скорость роста $S(n)$ при $n \to \infty$. Когда $X(i)$ независимы, справедлив закон повторного логарифма

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}} |S(n)|(2N\sigma^2\|n\|\ln_2\|n\|)^{-1/2} = 1\} = 1, \ \sigma^2 = R(0).$$

общем случае естественно рассмотреть аналог закона повторного логарифма в форме

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S(n)|\,(2NV(n)\ln_2 V(n))^{-1/2}=1\}=1$$

при различных предположениях о $V(n)$.

Замечание 1. При $N\geqslant 2$ ни само поле $S(n)$, ни его приращения $S(n)-S(m)$ свойством однородности и изотропности не обладают, поэтому имеющиеся результаты об асимптотике однородных гауссовских полей [1] в данном случае не применимы. Однако свойством однородности обладают приращения вида

$$T(n, m)=S(n)\,\Delta S(m)=\Delta^{(1)}_{n_1,m_1}\ldots\Delta^{(N)}_{n_N,m_N}S,\quad n<m, \tag{1}$$

задаваемые N-мерными смешанными разностями. Действительно, $T(n, m)=\Sigma_{n\leqslant i\leqslant m}X(i)$ распределено так же, как $\Sigma_{i\leqslant m-n}X(i)$, в частности, $\mathbf{M}T^2(n, m)=V(|n-m|)$, что и будет использовано в дальнейшем.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

(A) $V(\cdot)$ не убывает по каждой переменной;

(B) Существуют такие N_0, c, $\gamma>0$, что для $n=(n_1, \ldots, n_N)$, $k=(k_1, \ldots, k_N)$, $n_\nu\geqslant N_0$, $k_\nu\geqslant 1$, $\nu=\overline{1, N}$

$$V(n*k)\,/\,V(n)\geqslant c\,\|k\|^\gamma. \tag{2}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S(n)|\,(2NV(n)\ln_2 V(n))^{-1/2}\leqslant 1\}=1. \tag{3}$$

Замечание 2. Условие (A) выполняется, если $\mathbf{M}X(i)X(j)\geqslant 0$ $\forall i, j\in Z^N$.

Доказательство теоремы 1 базируется на использовании экспоненциальных оценок для $\mathbf{P}(x)=\mathbf{P}\{\sup S(n)\geqslant x\}$. Подходящую оценку для $\mathbf{P}(x)$ дает неравенство Маркуса—Шеппа—Ферника. Пусть $\mathbf{P}\{\sup\limits_{n\in Z}\xi(n)<\infty\}=1$, где $\xi(n)$ — гауссовские случайные величины, а Z — счетное множество. Тогда

$$\mathbf{P}\{\sup_{n\in Z}|\xi(n)|>x\}\leqslant C_1\exp\{-x^2/2\rho\} \tag{4}$$

для $\rho>\sup\limits_n D\xi(n)$ и некоторого $C_1<\infty$ [2, 3].

Лемма 1. В предположениях теоремы 1 для любого $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|S(n)|/V^{1/2}(n)\ln^\varepsilon\|n\|<\infty\}=1. \tag{5}$$

Эта лемма дает возможность применять неравенство (4) к суммам $S(n)$ при соответствующей нормировке.

Доказательство. Для простоты выкладок положим $N=2$. Легко показать, что (5) выполняется при $\varepsilon=1/2$. Следовательно,

$\mathbf{P}\{\sup\limits_{n} \xi(n) < \infty\} = 1$ для гауссовских случайных величин $\xi(n) = |S(n)|(V(n)\ln\|n\|)^{-1/2}$, и к ним можно применять (4). Пусть, далее, $0 < \varepsilon < 1/2$. Положим $n_k = [\exp k^\alpha]$, $n_h = [\exp h^\alpha]$, $0 < \alpha < 1$, $\Delta_k = n_{k+1} - n_k$, $\Delta_h = n_{h+1} - n_h$, $b(k, h) = V^{1/2}(n_k, n_h)\ln^\varepsilon(n_k n_h)$. Тогда

$$\mathbf{P}(k, h) = \mathbf{P}\{|S(n_k, n_h)| \geqslant b(k, h)\} \leqslant C_1 \exp\left\{-\frac{1}{2}(k^\alpha + h^\alpha)^\varepsilon\right\}.$$

Так как $\Sigma_{k,h}\mathbf{P}(k, h) < \infty$, то для больших k, h

$$|S(n_k, n_h)| \leqslant V(n_k, n_h)\ln^\varepsilon\|n_k n_h\|. \tag{6}$$

Определим $M_0(k, h) = \max_{n\in D(k,h)}|S(n_1, n_2) - S(n_k, n_2) - S(n_1, n_h) + S(n_k, n_h)|$, $M_1|(k, h) = \max_{n_1\in D(k)}|S(n_1, n_h) - S(n_k, n_h)|$, $M_2(k, h) = \max_{n_2\in D(h)}|S(n_k, n_2) - S(n_k, n_h)|$, где $D(k) = [n_k, n_{k+1}]$, $D(h) = [n_h, n_{h+1}]$, $D.(k, h) = D(k) \times D(h)$. Оценим сверху $M_i(k, h)$; $i = 0, 1, 2$. Пусть $\mathbf{P}(k, h) = \mathbf{P}\{M_0(k, h) > b(k, h)\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(k, h) \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{n_1\geqslant n_k, n_2\geqslant n_h}|S(n)\Delta S(n_k, n_h)| \times$$

$$\times (V(n_1 - n_k, n_2 - n_h)\ln(n_1 - n_k)(n_2 - n_h))^{-1/2} \geqslant$$

$$\geqslant b(k, h)(V(n_1 - n_k, n_2 - n_h)\ln(n_1 - n_k)(n_2 - n_h))^{-1/2}\}.$$

Учитывая, что $\Delta_k \geqslant n_1 - n_k$, $\Delta_h \geqslant n_2 - n_h$, а $V(\cdot)$ возрастает по каждой переменной, в силу (1) и замечания 1 находим

$$\mathbf{P}(k, h) \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{n\in Z^2}|S(n)|(V(n)\ln\|n\|)^{-1/2} \geqslant$$

$$\geqslant b(k, h)(V(\Delta_k, \Delta_h)\ln\Delta_k\Delta_h)^{-1/2}\}.$$

Заметим, что для больших k, h $\ln^\varepsilon n_k n_h \geqslant 1$, $\Delta_k < \exp(k^\alpha)$, $\Delta_h < \exp(h^\alpha)$, $\ln(\Delta_k\Delta_h) \leqslant (kh)^\alpha$, $n_k/\Delta_k \sim k^{1-\alpha}$, $n_h/\Delta_h \sim h^{1-\alpha}$, $V(n_k, n_h)/V(\Delta_k, \Delta_h) \geqslant c(kh)^{\gamma(1-\alpha)}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(k, h) \leqslant C_1\exp\{-\theta(kh)^{\gamma(1-\alpha)-\alpha}\},\ \theta > 0.$$

Выбираем α столь малым, чтобы $\gamma(1-\alpha) - \alpha > 0$. По лемме Бореля—Кантелли существует такое K_0, что при $k, h > K_0$

$$M_0(k, h) \leqslant b(k, h). \tag{7}$$

Аналогично доказываем существование таких K_1 и H_1, что при $k > K_1$ для любого h

$$M_1(k, h) \leqslant b(k, h) \tag{8}$$

и при $h > H_1$ для любого k

$$M_2(k, h) \leqslant b(k, h). \tag{9}$$

Так как $|S(n_1, n_2)| \leqslant |S(n_k, n_h)| + M_0(k, h) + M_1(k, h) + M_2(k, h)$, находим, что по (6) — (9) с вероятностью 1

$$S(n) \leqslant 4V^{1/2}(n_k, n_h) \ln^{\varepsilon}(n_k, n_h) \leqslant 2^N V^{1/2}(n) \ln^{\varepsilon} \| n \|$$

для $n \in D(k, h)$, где $k, h > \max(K_0, K_1, H_1)$. Отсюда и следует (5). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу однородности и изотропности поля $X(i)$ $V(n) \leqslant 2 \| n \| \mathbf{M}X^2(1)$, где $1 = (1, \dots, 1)$. Поэтому для доказательства (3) достаточно показать, что

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} |S(n)| (2V(n) \ln_2 \| n \|)^{-1/2} \leqslant 1\} = 1. \tag{10}$$

Положим $n(k) = (n(k_1), \dots n(k_N))$, где $n(k_i) = [\exp k_i^{\beta}]$, $k_i = 1, 2, \dots$ $\dots, i = 1, \dots, N$, а $0 < \beta < 1$ будет выбрано позже. Обозначим $C(k) = (2NV(n(k)) \ln_2 || n(k) ||^{1/2}$, $\Delta n(k) = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$, где $\Delta_i = n(k_i + 1) - n(k_i)$. Тогда

$$\mathbf{P}\{| S(n(k)) | > (1 + \delta) C(k)\} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i^{\beta} \right)^{-N(1+\delta)^2} \leqslant C_2 \left(\sum_{i=1}^{N} k_i \right)^{-N\beta(1+\delta)^2}.$$

Выбирая β столь близким к 1, чтобы $\beta(1+\delta)^2 > 1$, по лемме Бореля—Кантелли находим, что для всех достаточно больших k_i $| S(n(k)) | \leqslant (1 + \delta) C(k)$.

Пусть $D(k) = X_{i=1}^{N} [n(k_i), \ n(k_{i+1})]$, $n = (n_1, \dots, n_N)$, $M_0(k) = \max_{n \in D(k)} | T(n(k), n) |$, где $T(.,.)$ определяется по (1). Определим векторы $\eta = \eta(l_1, \dots, l_r) = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ и $\eta^0 = \eta^0(l_1, \dots, l_r) = (\eta_1^0, \dots$ $\dots, \eta_N^0)$, $r < N$ следующим образом: $\eta_i = n_i$ при $i = \overline{l_1, l_r}$ и $\eta_i = n(k_i)$ для всех остальных i; $\eta_i^0 = n(k_i)$ при $i = \overline{l_1, l_r}$ и для всех остальных i $\eta_i^0 = 0$. Рассмотрим приращение $T(\eta^0, \eta)$. Перебирая все возможные r-мерные подмножества $(l_1, \dots l_r)$ множества $(1, \dots, N)$, при $1 \leqslant r < N$ получаем $2^N - 2$ приращений типа $T(\eta^0, \eta)$. Обозначим их максимумы при $\eta \in D(k)$ через $M_i(k)$, $i = 1, 2^N - 2$.

Ясно, что при $n \in D(k)$

$$S(n) \leqslant | S(n(k)) | + \sum_{i=0}^{2^N-2} M_i.$$

Как и при доказательстве леммы 1, получаем

$$\mathbf{P}\{M_0(k) > \delta C(k)\} \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{n \in Z^N} | S(n) | V^{-1/2}(n) \times$$

$$\times \ln^{-\varepsilon} \| n \| \geqslant \delta C(k) V^{-1/2}(\Delta n(k)) \ln^{-\varepsilon} \| \Delta n(k) \|.$$

По лемме 1 гауссовские случайные величины $\zeta(n) = S(n) V^{-1/2}(n) \times \times \ln^{-\varepsilon}(\|n\|)$ таковы, что $\mathbf{P}\{\sup_{n\in Z^N} \zeta(n) < \infty\} = 1$, поэтому к ним можно применить неравенство (4) и получить $\mathbf{P}'(k) \leqslant C_1 \exp\{-\theta_1 g(k)\}$, $C_1, \Theta_1 > 0$, $g(k) = \{V(n(k))/V\Delta n(k)\}\{\ln_2\|\Delta n(k)\|/\ln^{2\varepsilon}\|\Delta n(k)\|\}$. Замечая, что $V(n(k))/V(\Delta n(k)) \geqslant \prod_{i=1}^{N} k_i^{\gamma(1-\beta)}$, $\ln^{2\varepsilon}\|\Delta n(k)\| \leqslant \prod_{i=1}^{N} k_i^{2\beta\varepsilon}$, $\ln_2\|\Delta n(k)\| \geqslant \geqslant 1$, находим $g(k) \geqslant \sum_{i=1}^{N} k_i^{\gamma(1-\beta)-2\varepsilon\beta}$. Поэтому

$$\mathbf{P}'(k) \leqslant C_1 \prod_{i=1}^{N} \exp\{-\theta_1 k_i^{\gamma(1-\beta)-2\varepsilon\beta}\},\ \theta_1 > 0. \tag{11}$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\gamma(1-\beta) - 2\varepsilon\beta > 0$, видим, что правая часть (11) является членом сходящегося ряда. Это и доказывает, что для больших k_i $M_0(k) \leqslant \delta C(k)$. Аналогичными рассуждениями определяем такие же оценки сверху для $M_i(k)$, $i = 1, \dots, 2^N - 2$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S(n)| (2NV(n) \ln_2\|n\|)^{-1/2} \leqslant 1 + (2^N - 1)\delta.$$

Так как $\delta > 0$ произвольно, получаем утверждение теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $V(n)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Функция $\varphi(u)$, $u \in R^N$ положительна, не убывает по каждой переменной, $\varphi(u) \to \infty$, $u_i \to \infty$, $i = \overline{1, N}$ и

$$I_1(\varphi) = \int_{[1,\infty)^N} \|u\|^{-1} \varphi(u)^{(6N/\gamma)-1} \exp(-\varphi^2(u)/2)\, du < \infty.$$

Тогда $\mathbf{P}\{A_\varphi\} = 1$, где событие $A_\varphi = \{\exists L : |S(n)| < V^{1/2}(n)\varphi(n)$ для $\forall n > L\}$.

Рассмотрим класс функций $\Phi_A = \left\{\varphi(u),\ u \in G(A) = \prod_{i=1}^{N} [A_i, \infty),\ A = (A_1, \dots A_n),\ A_i > 0\right\}$, где $\varphi(\cdot)$ — неотрицательные непрерывные неубывающие по каждой переменной функции, $\varphi(u) \to \infty$, $u_i \to \infty$, $i = \overline{1, N}$. Пусть $g: R \to R$ — невозрастающая, $h: G(A) \to R$-измеримая функция. Обозначим $F(\varphi) = \int_{G(A)} g(\varphi(u))\, h(u)\, du$, $\varphi_3 = \min\{\max(\varphi, \varphi_1), \varphi_2\}$. При доказательстве теоремы 2 используется следующая лемма.

Лемма 2. Предположим, что $\varphi \in \Phi_A$ и для любого $B > A$, $B = (b_1, \dots, b_N) \in R_+^N$ $\int_{[A,B]} g(\varphi(u))\, h(u)\, du < \infty$; существуют функции

φ_1, φ_2 такие, что $F(\varphi_2) < \infty$ $F(\varphi_1) = \infty$ и $\lim\limits_{b_i \to \infty, i=\overline{1,N}} g(\varphi_1(B)) \times$ $\times \int\limits_{[A,B]} h(u)\,du = \infty$.

1. Если $F(\varphi) < \infty$, то $\varphi_3 < \varphi$ для u больших и $F(\varphi_3) < \infty$.
2. Если $F(\varphi) = \infty$, то $F(\varphi_3) = \infty$.

Для функций одной переменной подобные утверждения приведены в работах [5, 6]. Доказательство в случае нескольких переменных такое же как в одномерном случае.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $\varphi_1(u) = (\ln_2 \|u\|)^{1/2}$, $\varphi_2(u) = (2N \ln_2 \|u\|)^{1/2}$. Так как V удовлетворяет условиям теоремы 1, то справедливо (3) и доказательство теоремы 2 достаточно провести для $\varphi(u) < \varphi_2(u)$. Тогда $\varphi_3 = \max\{\varphi, \varphi_1\}$. Поскольку $I_1(\varphi_2) < \infty$, $I_1(\varphi_1) = \infty$, $I_1(\varphi) < \infty$, то по лемме 2 $\varphi(u) > \varphi_1(u)$ при больших u. Отсюда

$$I_2(\varphi) = \int\limits_{[e,\infty)^N} \{\|u\|\,\varphi(u)\}^{-1} |\ln_2 \|u\||^{3N/\gamma} \exp\{-\varphi^2(u)/2\}\,du < \infty.$$

Положим $f(u) = \varphi(u) - b/\varphi(u)$, где $b > 0$ будет выбрано позже. Так как $f(u) \sim \varphi(u)$ при u больших, то $I_2(f) < \infty$. Заметим, что для $n(k) = (n(k_1), \dots, n(k_N))$, где $n(k_i) = [\exp k_i (\ln k_i)^{-3/\gamma}]$, $i = 1, \dots$ $\dots, N$, справедливо неравенство $\mathbf{P}\{S(n(k)) \geqslant V^{1/2}(n(k))\, f(n(k))\} \leqslant$ $\leqslant \{2f(n(k))\}^{-1} \exp\{-f^2(n(k))/2\}$. Сделаем замену переменных в $I_2(\varphi)$: $u_i = \exp(t_i (\ln t_i)^{-3/\gamma})$. Тогда

$$\ln_2 \|u\| \geqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\right) \geqslant \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln t_i;\ du_i/dt_i \geqslant (\ln t_i)^{-3/\gamma}.$$

Окончательно

$$\|u\|^{-1} (\ln_2 \|u\|)^{3N/\gamma} \geqslant \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \ln t_i\right)^{3N/\gamma} \times$$
$$\times \left(\prod_{i=1}^{N} \ln t_i\right)^{-3/\gamma} \geqslant 1/N^2.$$

Таким образом, из сходимости $I_2(\varphi)$ следует, что

$$\sum_{k_1, \dots, k_N} \{f(n(k))\}^{-1} \exp\{-f^2(n(k))/2\} < \infty.$$

По лемме Бореля—Кантелли $\mathbf{P}_{2N-1}(k) = \mathbf{P}\{S(n(k)) > V^{1/2}(n(k))\varphi(n(k)) -$ $bV^{1/2}(n(k))/\varphi(n(k)$ бесконечное число раз$\} = 0$. Пусть $M_i(k)$,

$i = 0, \ldots, 2^N - 2$ определяются, как в теореме 1. Если

$$\mathbf{P}_i(k) = \mathbf{P}\{M_i(k) > bV^{1/2}(n(k)) / (2^N - 1)\varphi(n(k)) \text{ бесконечное число раз}\} = 0, \quad i = 1, \ldots, 2^N - 2, \tag{12}$$

то $\mathbf{P}(A_\varphi) \leqslant \mathbf{P}\{|S(n)| > V^{1/2}(n(k))\varphi(n(k))$ бесконечное число раз$\} \leqslant \leqslant \sum_{i=0}^{2^N-1} \mathbf{P}_i(k) = 0.$

Обозначим $y(k) = V^{1/2}(n(k)) / \varphi(n(k)) V^{1/2}(\Delta n(k)) \ln^{1/2} \| \Delta n(k) \|$. Как и в теореме 1,

$$\mathbf{P}_0(k) = \mathbf{P}\{M_0(k) \geqslant bV^{1/2}(n(k)) / (2^N - 1)\varphi(n(k) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{\sup_{n \in Z^N} |S(n)| (V(n) \ln \| n \|)^{-1/2} \geqslant by(k) / 2^N - 1)\}. \tag{13}$$

Так как выполняется (3), к правой части (13) можно применить неравенство (4), которое дает $\mathbf{P}_0(k) \leqslant C_3 \exp\{-b^2 y^2(k) / 2(2^N - 1)^2\}$ при большом k. Заметим, что

$$\varphi(n(k)) \leqslant \varphi_2(n(k)) \leqslant \left(2N \ln\left(\sum_{i=1}^N k_i\right)\right)^{1/2}, \ \Delta n(k) \leqslant$$
$$\leqslant [\exp k_i (\ln k_i)^{-3/\gamma}] (\ln k_i)^{-3/\gamma}.$$

Следовательно,

$$\ln_2 \| \Delta n(k) \| \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^N k_i (\ln k_i)^{-3/\gamma}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^N k_i\right), \ V(n(k)) / V(\Delta n(k)) \geqslant c \prod_{i=1}^N (\ln k_i)^3.$$

Таким образом, получаем

$$y^2(k) \geqslant C_4 \left(\prod_{i=1}^N \ln k_i\right)^3 \Big/ \left(\ln \sum_{i=1}^N k_i\right)^2 \geqslant C_4 \sum_{i=1}^N \ln k_i, \ C_4 > 0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует

$$\mathbf{P}_0(k) \leqslant C_3 \exp\left\{-\theta_3 \sum_{i=1}^N \ln k_i\right\} = C_3 \prod_{i=1}^N k_i^{-\theta_3}.$$

Выбирая b так, чтобы $\theta_3 = (bC_4)^2 / 2(2^N - 1)^2 > 1$, находим $\sum_{k_1, \ldots, k_N} \mathbf{P}_0(k) < \infty$. Отсюда следует (12) для $i = 0$. Аналогично доказывается (12) для $i = 1, \ldots, 2^N - 2$. Следовательно, $\mathbf{P}(\bar{A}_\varphi) = 0$, $\mathbf{P}(A_\varphi) = 1$. Теорема 2 доказана.

Для частичных сумм стационарных гауссовских последовательностей подобные результаты получены в работе [6].

Если $\varphi(u)$, $u \in R^N$ зависит только от произведения аргументов $\|u\|$, то N-кратный интеграл $I_1(\varphi)$ сводится к однократному. Действительно, как показано в работе [7]

$$\int\limits_{[0,1]^N} F(\|u\|)\, du = (1/(n-1)!) \int\limits_0^1 F(t) \ln^{n-1}(1/t)\, dt. \tag{15}$$

Заменой переменных $x_i = 1/u_i$, $i = \overline{1, N}$ из (15) для интегрирования по области $[1, \infty)^N$ получаем формулу

$$\int\limits_{[1,\infty)^N} F(\|u\|)\, du = (1/(n-1)!) \int\limits_0^1 F(1/t) \ln^{n-1}(1/t) \times$$

$$\times\, t^{-2} dt = (1/(n-1)!) \int\limits_0^\infty F(t) \ln^{n-1}(t)\, dt.$$

Таким образом, когда $\varphi(u) = \varphi(\|u\|)$ в теореме 2 вместо $I_1(\varphi)$ достаточно исследовать конечность интеграла

$$I_3(\varphi) = \int\limits_1^\infty \{\varphi(t)\}^{(6N/\gamma)-1} \ln^{n-1} t \exp\{-\varphi^2(t)/2\}\, t^{-1} dt.$$

1. *Quals G., Watanabe H.* Asymptotic properties of Gaussian random fields.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **177**, N 1. 2. *Fernique X.* Regularite des trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes.— Lectures Notes in Mathematics, 1975, **480**. 3. *Dudly R. M.* Sample functions of the Gaussian process.— Ann. Probab., 1973, **1**, N 1. 4. *Jain N., Jogdeo K., Stout W.* Upper and lower functions for martingales and mixing process.— Ann. Probab., 1975, **3**, N 1. 5. *Jain N., Taylor S.* Local asymptotic laws for Brownian motion.— Ann. Probab., 1973, **1**, N 4. 6. *Lai T., Stout W.* The LIL and upper-lower class tests for partial sums of stationary Gaussian sequences.— Ann. Probab., 1978, **6**, N 5. 7. *Klamkin N.* On multiple integrals.— J. of Math. Analysis and Appl., 1976, **54**, N 2.

Поступила в редколлегию 08.12.80

УДК 519.21

А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук, Институт кибернетики АН УССР
Э. ЦВАНЦИГ, асп., Центральный институт математики и механики, Берлин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

1. В предлагаемой работе получено асимптотическое разложение оценки наименьших квадратов (ОНК) векторного параметра регрессионной модели

$$x_j = g(j, \theta_0) + \varepsilon_j, \qquad j \geqslant 1, \tag{1}$$