Для частичных сумм стационарных гауссовских последовательностей подобные результаты получены в работе [6].

Если $\varphi(u)$, $u \in R^N$ зависит только от произведения аргументов $\|u\|$, то N-кратный интеграл $I_1(\varphi)$ сводится к однократному. Действительно, как показано в работе [7]

$$\int\limits_{[0,1]^N} F(\|u\|)\,du = (1/(n-1)!)\int\limits_0^1 F(t)\ln^{n-1}(1/t)\,dt. \tag{15}$$

Заменой переменных $x_i = 1/u_i$, $i=\overline{1,N}$ из (15) для интегрирования по области $[1,\infty)^N$ получаем формулу

$$\int\limits_{[1,\infty)^N} F(\|u\|)\,du = (1/(n-1)!)\int\limits_0^1 F(1/t)\ln^{n-1}(1/t)\times$$

$$\times t^{-2}dt = (1/(n-1)!)\int\limits_0^\infty F(t)\ln^{n-1}(t)\,dt.$$

Таким образом, когда $\varphi(u)=\varphi(\|u\|)$ в теореме 2 вместо $I_1(\varphi)$ достаточно исследовать конечность интеграла

$$I_3(\varphi) = \int\limits_1^\infty \{\varphi(t)\}^{(6N/\gamma)-1}\ln^{n-1} t\exp\{-\varphi^2(t)/2\}\,t^{-1}dt.$$

1. *Quals G.*, *Watanabe H.* Asymptotic properties of Gaussian random fields.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **177**, N 1. 2. *Fernique X.* Regularite des trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes.— Lectures Notes in Mathematics, 1975, **480.** 3. *Dudly R. M.* Sample functions of the Gaussian process.— Ann. Probab., 1973, **1**, N 1. 4. *Jain N.*, *Jogdeo K.*, *Stout W.* Upper and lower functions for martingales and mixing process.— Ann. Probab., 1975, **3**, N 1. 5. *Jain N.*, *Taylor S.* Local asymptotic laws for Brownian motion.— Ann. Probab., 1973, **1**, N 4. 6. *Lai T.*, *Stout W.* The LIL and upper-lower class tests for partial sums of stationary Gaussian sequences.— Ann. Probab., 1978, **6**, N 5. 7. *Klamkin N.* On multiple integrals.— J. of Math. Analysis and Appl., 1976, **54**, N 2.

Поступила в редколлегию 08.12.80

УДК 519.21

А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук, Институт кибернетики АН УССР
С. ЦВАНЦИГ, асп., Центральный институт математики и механики, Берлин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

1. В предлагаемой работе получено асимптотическое разложение оценки наименьших квадратов (ОНК) векторного параметра регрессионной модели

$$x_j = g(j,\theta_0)+\varepsilon_j, \qquad j \geqslant 1, \tag{1}$$

Пусть $\bar{\Theta}$—замыкание Θ в одноточечном компактном расширении R^s,

$$L_n(\theta) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} f(j, \theta), \quad \theta \in \bar{\Theta}.$$

ОНК назовем B^N-измеримое отображение $\theta_n : R^N \to \bar{\Theta}$, для которого $L_n(\theta_n) = \inf(L_n(\theta), \theta \in \bar{\Theta})$. Очевидно, θ_n является функцией только $x_1, \ldots, x_n$.

2. Будем предполагать следующее.

A_m. Распределение с. в. ε_1 не зависит от θ и $E_\theta\varepsilon_1 = 0$, $E_\theta\varepsilon_1^2 = \sigma^2$, $E_\theta|\varepsilon_1|^m < \infty$, $m \geqslant 3$ — целое фиксированное число.

C. (Условие контраста). Для любого компакта $K \subset \Theta$ существует константа $c_k > 0$ такая, что для любого $r > 0$

$$\inf_{\theta_0 \in K} \inf_{\{\theta \in \bar{\Theta}: \|\theta - \theta_0\| \geqslant r\}} \varphi_n(\theta, \theta_0) \geqslant c_K r^2.$$

D_α. Для любого компакта $K \subset \Theta$ существует константа $d_K(\alpha) < \infty$ такая, что для любого $r > 0$

$$\sup_{\theta_0 \in K} \sup_{\{\theta \in \bar{\Theta}: \|\theta - \theta_0\| \leqslant r\}} \varphi_{\alpha n}(\theta, \theta_0) \leqslant d_K(\alpha) r^2.$$

E_α. Для любого компакта $K \subset \Theta$ существует константа $e_K(\alpha) > 0$ такая, что если $\varphi_{\alpha n}(\theta) \not\equiv 0$, то

$$\inf_{\theta_0 \in K} \varphi_{\alpha n}(\theta_0) \geqslant e_K(\alpha).$$

$F_{\alpha,m}$. Для любого компакта $K \subset \Theta$ существует константа $f_K(\alpha, m) < \infty$ такая, что

$$\sup_{\theta_0 \in K} n^{-1}\sum_{j=1}^{n} |g^{(\alpha)}(j, \theta_0)|^m \leqslant f_K(\alpha, m).$$

Если выполнено условие D_α, то

$$\sup_{\theta_0 \in K} \varphi_{\beta n}(\theta_0) \leqslant d_K(\alpha), \quad |\beta| = |\alpha| + 1. \tag{2}$$

Из условий C, $D_{\bar{0}}$ и дифференцируемости функций $g(j, \theta)$ следует, что матрица $I_n(\theta_0)$ равномерно по $\theta_0 \in K$ положительно определена, причем можно считать, что наименьшее собственное число $I_n(\theta_0)$ удовлетворяет неравенству

$$\inf_{\theta_0 \in K} \lambda_{\min}(I_n(\theta_0)) \geqslant c_K. \tag{3}$$

Если отказаться от условия $D_{\bar{0}}$, то в последнем неравенстве c_K можно заменить на $c_K/2$. Условие E_α при $|\alpha| = 1$ также является следствием $D_{\bar{0}}$.

где ε_j — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.); $g(j, \theta_0)$ — последовательность функций, нелинейно зависящих от неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$, Θ — открытое в R^s множество. Последовательность x_j является простым, но важным примером неодинаково распределенных наблюдений.

Пусть (R^N, B^N) — счетное произведение пространств (R^1, B^1), R^1 — вещественная прямая, B^1—σ-алгебра борелевских множеств R^1, $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ — семейство вероятностных мер на (R^N, B^N), отвечающих последовательностям $x_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j$, E_θ — усреднение по мере P_θ.

Введем ряд обозначений. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами. Положим $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_s!$, $\theta^\alpha = \theta_1^{\alpha_1} \ldots \theta_s^{\alpha_s}$, $\theta \in R^s$. Для гладкой функции $u(\theta)$ примем $u^{(\alpha)} = (\partial^{|\alpha|}/\partial^{\alpha_1}\theta_1 \ldots \partial^{\alpha_s}\theta_s)\, u$, $u_i^{(\alpha)} = (\partial/\partial\theta_i)\, u^{(\alpha)}$, $u_{il}^{(\alpha)} = (\partial^2/\partial\theta_i\partial\theta_l)\, u^{(\alpha)}$, $u^{(1,\alpha)} = (u_i^{(\alpha)})_{i=1}^s$, $u^{(2,\alpha)} = (u_{il}^{(\alpha)})_{i,l=1}^s$, $u^{(1)} = u^{(1,\bar{0})}$, $u^{(2)} = u^{(2,\bar{0})}$, $\bar{0} = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{s}$. Пусть e_i, $i = \overline{1, s}$ — вектор, i-я координата равна 1, а остальные нули.

Будем считать, что у функций $g(j, \theta)$, $\theta \in \Theta$ существуют и непрерывны все частные производные до порядка $k + 1$ включительно, $k \geqslant 1$ — фиксированное число. Пусть $f(j, \theta) = [x_j - g(j, \theta)]^2$. Положим

$$b_n^{(\alpha)}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} [f^{(\alpha)}(j, \theta) - E_\theta f^{(\alpha)}(j, \theta)] = -2n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\, g^{(\alpha)}(j, \theta),$$

$$a_n^{(\alpha)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} E_\theta f^{(\alpha)}(j, \theta),$$

$$I_n(\theta) = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_i(j, \theta)\, g_l(j, \theta) \right)_{i,l=1}^{s},$$

$$\varphi_{\alpha n}(\theta_1, \theta_2) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [g^{(\alpha)}(j, \theta_1) - g^{(\alpha)}(j, \theta_2)]^2, \quad \varphi_{\bar{0}n} = \varphi_n,$$

$$\varphi_{\alpha n}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [g^{(\alpha)}(j, \theta)]^2.$$

Если $A \in R^s$ и число $\rho > 0$, то $A_\rho = \bigcup_{\|t\| \leqslant 1} (A + \rho t)$, $A_{-\rho} = \bigcap_{\|t\| \leqslant 1} (A + \rho t)$. Положим для $A \in B^s$ $\Phi_s(A) = \int_A (2\pi)^{-s/2} e^{-\|x\|^2/2}\, dx$, ($B^s$—$\sigma$-алгебра борелевских множеств R^s). Пусть C^s—класс борелевских выпуклых множеств R^s. Там, где это удобно, будем писать $n^{-1/2} = \tau$.

$$\eta_n(\theta_0, \theta) = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} R_j(j, \theta_0, \theta) \right)_{i=1}^{s} = (\eta_{ni}(\theta_0, \theta))_{i=1}^{s},$$

$$R_i(j, \theta_0, \theta) = \sum_{|\alpha|=k} (1/\alpha!) [f_i^{(\alpha)}(j, \theta^*) - f_i^{(\alpha)}(j, \theta_0)] (\theta - \theta_0)^{\alpha},$$

$$\| \theta^* - \theta_0 \| \leqslant \| \theta - \theta_0 \| .$$

Аналогично для производных 2-го порядка функции $L_n(\theta)$ получаем

$$L_{nil}(\theta) = 2I_n^{il}(\theta_0) + \tau b_{nil}(\theta_0) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant k-1} (1/\alpha!) (a_{nil}^{(\alpha)}(\theta_0) +$$

$$+ \tau b_{nil}^{(\alpha)}(\theta_0)) (\theta - \theta_0)^{\alpha} + \eta_{nil}(\theta_0, \theta), \tag{7}$$

где $I_n^{il}(\theta_0)$ — элемент матрицы $I_n(\theta_0)$,

$$\eta_{nil}(\theta_0, \theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} R_{il}(j, \theta_0, \theta), \quad R_{il}(j, \theta_0, \theta) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=k-1} (1/\alpha!) [f_{il}^{(\alpha)}(j, \theta^*) - f_{il}^{(\alpha)}(j, \theta_0)] (\theta - \theta_0)^{\alpha},$$

$$\| \theta^* - \theta_0 \| \leqslant \| \theta - \theta_0 \| .$$

Оценим величины η_{ni} и η_{nil}. Рассмотрим при фиксированном α с $|\alpha| = k + 1$ разность

$$\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [f^{(\alpha)}(j, \theta^*) - f^{(\alpha)}(j, \theta_0)] = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [(g(j, \theta^*) -$$

$$- g(j, \theta_0)) (2x_j - g(j, \theta^*) - g(j, \theta_0)]^{(\alpha)} = {}_1\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0) - {}_2\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0);$$

$${}_1\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [g^{(\alpha)}(j, \theta^*) - g^{(\alpha)}(j, \theta_0)] [2\varepsilon_j + g(j, \theta_0) - g(j, \theta^*)],$$

$${}_2\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0) = \sum_{\beta, \gamma} c(\beta, \gamma) n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [g^{(\beta)}(j, \theta^*) - g^{(\beta)}(j, \theta_0)] \times$$

$$\times [g^{(\gamma)}(j, \theta^*) - g^{(\gamma)}(j, \theta_0)],$$

где $\sum_{\beta, \gamma}$ означает суммирование по всем векторам β, γ, удовлетворяющим условиям $\beta + \gamma = \alpha$, $|\beta| = \overline{0, k}$, $|\gamma| = \overline{1, k+1}$, $c(\beta, \gamma)$ — постоянные, которые выражаются через биномиальные коэффициенты. Заметим, что

$$| {}_1\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0) | \leqslant \varphi_{\alpha n}^{1/2}(\theta^*, \theta_0) \left[8n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 + 2\varphi_n(\theta^*, \theta_0) \right]^{1/2}.$$

Разумеется, можно было предположить, что условия $C - F_{\alpha,m}$ выполняются лишь для $n > n_k$. В доказательствах будем обозначать $\varkappa_k$ константы, не обязательно равные между собой, зависящие от данного компакта $K \subset \Theta$ и не зависящие от объема выборки n.

Теорема 1. Если выполнены условия A_m, C, D_α, $|\alpha| = \overline{0, k+1}$; E_α, F_α, $|\alpha| = \overline{1, k+1}$, то для любого компакта $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\| n^{1/2} (\theta_n - \theta_0) - h_1 - \tau h_2 - \ldots - \tau^{k-1} h_k \| > $$
$$> \varkappa_K n^{-k/2} (\log n)^{(k+1)/2}\} = o(n^{-(m-2)/2}),$$

где h_i, $i = \overline{1, k}$ — векторы, координаты которых — однородные полиномы степени i относительно величин $b_n^{(\alpha)}$, $|\alpha| = \overline{1, i}$.

В частности,

$$h_1 = -0{,}5 I_n^{-1}(\theta_0)\, b_n^{(1)}(\theta_0),$$

$$h_2 = -0{,}5 I_n^{-1}(\theta_0)\, [b_n^{(2)}(\theta_0)\, h_1 + 0{,}5\, (h_1' a_n^{(2,l_j)}(\theta_0)\, h_1)_{j=1}^s],$$

$$h_3 = -0{,}5 I_n^{-1}(\theta_0)\, [b_n^{(2)}(\theta_0)\, h_2 + 0{,}5\, (h_1' b_n^{(2,l_j)}(\theta_0)\, h_1)_{j=1}^s +$$
$$+ (h_1' a_n^{(2,l_j)}(\theta_0)\, h_2)_{j=1}^s + \sum_{|\alpha|=3} (1/\alpha!)\, a_n^{(1,\alpha)}(\theta_0)\, h_1^\alpha].$$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 при $m = 3$ и $k = 1$, то для любого компакта $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} \sup_{A \in C^s} | P_{\theta_0} \{(n I_n(\theta_0))^{1/2} \sigma^{-1} (\theta_n - \theta_0) \in A\} - \Phi_s(A) | = O(n^{-1/2} \log n). \tag{4}$$

3. Доказательство теоремы 1 проводится по схеме, которая повторяет схему доказательства теоремы работы [1]. Поэтому мы остановимся лишь на деталях, связанных со спецификой модели наблюдений (1).

Лемма 1. Пусть выполнены условия A_m, C и $D_{\bar{0}}$. Тогда для любого компакта $K \subset \Theta$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\| \theta_n - \theta_0 \| \geqslant \varepsilon\} = o(n^{-(m-2)/2}). \tag{5}$$

Доказательство леммы почти не отличается от рассуждений работы [2]. Следует только дополнительно воспользоваться теоремой [3, с. 349] о скорости сходимости в законе больших чисел.

Запишем разложение Тейлора для производных 1-го порядка функции $L_n(\Theta)$:

$$L_n^{(1)}(\theta) = \tau b_n^{(1)}(\theta_0) + 2 I_n(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \tau b_n^{(2)}(\theta_0)(\theta - \theta_0) +$$
$$+ \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant k} (1/\alpha!)\, (a_n^{(1,\alpha)}(\theta_0) + \tau b_n^{(1,\alpha)}(\theta_0))\, (\theta - \theta_0)^\alpha + \eta_n(\theta_0, \theta); \tag{6}$$

Если выполнены предположения D_α, $D_{\bar 0}$ и $\|\theta-\theta_0\|\leqslant\delta$, то для любого компакта $K\subset\Theta$

$$\sup_{\theta_0\in K}|{}_1\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0)|\leqslant d_K^{1/2}(\alpha)\,\delta\left(8n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2+2d_K(\bar 0)\,\delta^2\right)^{1/2}.$$

Аналогично

$$\sup_{\theta_0\in K}|{}_2\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0)|\leqslant\sup_{\theta_0\in K}\sum_{\beta,\gamma}c(\beta,\gamma)\,\varphi_{\beta n}^{1/2}(\theta^*,\theta_0)\,(2\varphi_{\gamma n}(\theta^*)+$$

$$+2\varphi_{\gamma n}(\theta_0))^{1/2}\leqslant 2\sum_{\beta,\gamma}c(\beta,\gamma)\,d_K^{1/2}(\beta)\,d_{K_\delta}^{1/2}(\tilde\gamma)\,\delta,\ |\tilde\gamma|=|\gamma|-1.$$

Следовательно, если $\|\theta-\theta_0\|\leqslant\delta$, то

$$|\Delta_n^{(\alpha)}(\theta_0)|\leqslant\left(\varkappa_K\left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\right)^{1/2}+\varkappa_K\right)\delta. \tag{8}$$

Положим $B_n=\left\{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2\leqslant\sigma^2+1\right\}$. По теореме [3, с. 349] при выполнении условия A_m

$$P_\theta\{\hat B_n\}=o\,(n^{-(m-2)/2}). \tag{9}$$

Если осуществляется событие B_n и $\|\theta-\theta_0\|<\delta$ то, как нетрудно увидеть,

$$\sup_{\theta_0\in K}|\eta_{ni}(\theta_0,\theta)|\leqslant\varkappa_K\delta^{k+1}. \tag{10}$$

Аналогично получаем оценку

$$\sup_{\theta_0\in K}|\eta_{nil}(\theta_0,\theta)|\leqslant\varkappa_K\delta^{k}. \tag{11}$$

Введем события $C_{nil}^{(\alpha)}(\theta,\delta)=\{|b_{nil}^{(\alpha)}(\theta)|\leqslant\delta n^{1/2}\}$, $|\alpha|=\overline{0,k-1}$.

Лемма 2. Пусть $\theta_0\in K$, осуществляются события B_n, $C_{nil}^{(\alpha)}(\theta_0,\delta)$ для достаточно малого δ, $|\alpha|=\overline{0,k-1}$; $i,l=\overline{1,s}$ и выполнены неравенства (2) и (3). Тогда существует такое $\rho_K>0$, что равномерно по $\theta_0\in K$

$$\varliminf_{n\to\infty}\ \inf_{\|\theta-\theta_0\|<\rho_K}\lambda_{\min}(L_n^{(2)}(\theta))\geqslant c_K/2.$$

Доказательство леммы такое же, как в работе [1], и использует разложение (7) и оценку (11).

Если осуществляется событие $A_n(\theta_0,\rho_K)=\{\|\theta_n-\theta_0\|<\rho_K\}$, то лемма 2 позволяет заключить, что [1]

$$\|\theta_n-\theta_0\|\leqslant 2\tau\,\|b_n^{(1)}(\theta_0)\|/c_K. \tag{12}$$

Обозначим $\Lambda_k(\theta, \tau)$ разложение (6) без остаточного члена, $\Lambda(\theta, \tau)$ — ряд, полученный из $\Lambda_k(\theta, \tau)$ продолжением суммирования до бесконечности. Пусть $\theta(\tau) = \theta_0 + \tau h_1 + \tau^2 h_2 + \ldots$ — формальное разложение решения уравнения $\Lambda(\theta, \tau) = 0$. При подстановке его начального отрезка

$$\theta^{(k)}(\tau) = \theta_0 + \tau h_1 + \ldots + \tau^k h_k \tag{13}$$

в $\Lambda(\theta, \tau)$ члены, содержащие τ^i, $i = \overline{1, k}$, обращаются в нуль. Поэтому можно записать

$$\Lambda(\theta^{(k)}(\tau), \tau) = \sum_{i \geqslant k+1} \tau^i h_{i,k}. \tag{14}$$

Лемма 3. Все h_i, $i = \overline{1, k}$; $h_{i,k}$, $k \geqslant 1$, $i \geqslant k+1$ из представлений (13) и (14) — векторы, координаты которых однородные полиномы степени i относительно $b_n^{(\alpha)}(\theta_0)$, $|\alpha| = \overline{1, i}$.

Утверждение доказывается индукцией по k. Точный вид h_i можно получить, подставляя (13) в (6) и приравнивая к нулю коэффициенты при степенях τ. В формулировке теоремы 1 даны полученные таким образом векторы h_1, h_2 и h_3.

Пусть осуществляются события $A_n(\theta_0, \rho_K)$, B_n и $D_n^{(\alpha)}(\theta_0, \alpha_\alpha) = \{|b_n^{(\alpha)}(\theta_0)| \leqslant a_\alpha (\log n)^{1/2}\}$, $|\alpha| = \overline{1, k+1}$, константы $a_\alpha > 0$ будут выбраны ниже; пусть также в формуле (8) $\delta = \rho_K$. Заметим, что события $D_n^{(\alpha)}(\theta_0, a_\alpha)$ влекут события $C_{nil}^{(\alpha)}(\theta_0, \delta)$, начиная с некоторого n.

С использованием оценок (10) — (12) и леммы 3 так же, как в работе [1], для достаточно больших n получаем

$$\|\theta_n - \theta^{(k)}(\tau)\| \leqslant \varkappa_K (n^{-1} \log n)^{(k+1)/2}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\| n^{1/2}(\theta_n - \theta_0) - h_1 - \tau h_2 - \ldots - \tau^{k-1} h_k \| >$$
$$> \varkappa_K n^{-k/2} (\log n)^{(k+1)/2}\} \leqslant \sup_{\theta_0 \in k} P_{\theta_0} \{\hat{A}_n(\theta_0, \rho_K\} +$$
$$+ \sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\hat{B}_n\} + \sum_{|\alpha|=1}^{k+1} \sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\hat{D}_n^{(\alpha)}(\theta_0, a_\alpha)\}. \tag{15}$$

Первые два слагаемых в правой части (15) суть $o(n^{-(m-2)/2})$ по лемме 1 и (9). Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно показать, что при любом фиксированном α ($|\alpha| = \overline{1, k+1}$) для любого компакта $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\hat{D}_n^{(\alpha)}(\theta_0, a_\alpha)\} = 0\,(n^{-(m-2)/2}).$$

Из условия A_m вытекает, что для любого $\eta \in \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0} \{\hat{D}_n^{(\alpha)}(\theta_0, a_\alpha)\} = \sup_{\theta_0 \in K} P_\eta \{\hat{D}_n^{(\alpha)}(\theta_0, a_\alpha)\}.$$

Возьмем $a_\alpha = 2(m-2+\delta)^{1/2}\sigma d_K^{1/2}(\tilde{\alpha})$, где $d_K(\tilde{\alpha})$ — константа из неравенства (2), $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_\eta\{\hat{D}_n^{(\alpha)}(\theta_0, a_\alpha)\} \leqslant \sup_{\theta_0 \in K} p_\eta\{|b_n^{(\alpha)}(\theta_0)| > 2\sigma((m-2+\delta)\log n\, \varphi_{\alpha n}(\theta_0))^{1/2}\}. \tag{16}$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия A_m, E_α и F_α. Тогда правая часть (16) является величиной $o(n^{-(m-2)/2})$ для любого $\delta > 0$.

Лемма 4 — равномерный одномерный вариант следствия 17.13 [4, с.179] о вероятностях умеренных уклонений сумм независимых векторных с. в. Теорема 1 доказана.

4. Докажем теорему 2. Из условий теоремы 2 и результата теоремы 1 вытекает, что для любого $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0}\{\| n^{1/2}\sigma^{-1} I_n^{1/2}(\theta_0)(\theta_n - \theta_0) - \sigma^{-1} I_n^{1/2}(\theta_0) h_1 \| \geqslant \delta_n\} = o(n^{-1/2}),$$

$$\delta_n = \varkappa_K n^{-1/2} \log n. \tag{17}$$

Из (17) получаем для произвольного $A \in B^s$

$$P_{\theta_0}\{n^{1/2}\sigma^{-1} I_n^{1/2}(\theta_0)(\theta_n - \theta_0) \in A\} \lesseqgtr P_{\theta_0}\{I_n^{1/2}(\theta_0)\sigma^{-1} h_1 \in A_{\pm\delta_n}\} \pm o(n^{-1/2}).$$

Следовательно, величина $\sup_{A \in C^s} | P_{\theta_0}\{n^{1/2}\sigma^{-1} I_n^{1/2}(\theta_0)(\theta_n - \theta_0) \in A\} - \Phi_s(A)$ имеет такой же порядок, как сумма величин

$$\pi_1 = \sup_{A \in C^s} \left| P_{\theta_0}\left\{ \sigma^{-1} I_n^{-1/2}(\theta_0) \left(n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j g^{(1)}(j, \theta_0) \right) \in A \right\} - \Phi_s(A) \right|,$$

$$\pi_2^{\pm} = \sup_{A \in C^s} | \Phi_s(A_{\pm\delta_n}) - \Phi_s(A) |, \qquad \pi_3 = o(n^{-1/2}).$$

Из неравенства типа Берри — Ессеена для сумм независимых векторных с. в. (см., например, [4]) и условий теоремы 2 вытекает, что $\pi_1 = O(n^{-1/2})$. По лемме 1 [5] $\pi_2^{\pm} = O(n^{-1/2} \log n)$. Теорема 2 доказана. Однако следует ожидать, что в оценке (4) можно повысить точность до $O(n^{-1/2})$.

1. *Чибисов Д. М.* Асимптотическое разложение для одного класса оценок, включающего оценки максимального правдоподобия.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, **18**, № 2. 2. *Malinwaud E.* The consistency of nonlinear regressions.— Ann. Math. Statist, 1970, **40**, N 3. 3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., 1972. 4. *Bhattacharya R. N., Rao R. R.* Normal approximation and asymptotic expansions. New York, 1976. 5. *Sazonov V. V.* On the multidimensional central limit theorem.— Sankhya, 1968, **30A**, N 1.

Поступила в редколлегию 25.04.80