УДК 519.21

М. Н. МАРУШИН, д-р физ.-мат. наук
Киевский институт инженеров гражданской авиации

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПОЛУЧЕННЫХ СИММЕТРИЗАЦИЕЙ ЦЕПИ МАРКОВА С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Рассмотрим два одинаковых независимых дискретных марковских процесса $\{x_{nt}, t \geqslant 1\}$ и $\{x'_{nt}, t \geqslant 1\}$, принимающих только два значения 0 и 1. Переходные вероятности $p_{sr}^{(i)} = P(x_{ni} = r \mid x_{n,t-1} = s)$ $(s, r = 0, 1)$ и начальное распределение $P(x_{n1} = 1) = p_1$, $P(x_{n1} = 0) = q_1$. Полагая $y_{nt} = x_{nt} - x'_{nt}$, построим в результате симметризации цепи Маркова $\{x_{nt}, t \geqslant 1\}$ новый случайный процесс $\{y_{nt}, t \geqslant 1\}$.

Впервые подобная симметризация случайных величин была использована в работе [1] при изучении условий сходимости моментов сумм независимых случайных величин к моментам нормального закона. В ней было установлено, что симметризация величин не изменяет условий этой сходимости.

Иными словами, обозначая $S_{nk} = \sum_{i=1}^{k} x_{ni}$, $\bar{S}_{nk} = \sum_{i=1}^{k} y_{ni}$, где $k = k(n)$ — неограниченная возрастающая последовательность целых положительных чисел, можно утверждать, что законы и моменты сумм $\Sigma_{nk} = \frac{S_{nk} - MS_{nk}}{\sqrt{DS_{nk}}}$, $\Sigma'_{nk} = \frac{\bar{S}_{nk}}{\sqrt{D\bar{S}_{nk}}}$ одновременно сходятся или одновременно не сходятся к нормальному закону и соответствующим его моментам.

Моменты суммы Σ_{nk} трудно определяемы, имеют довольно громоздкий вид и оперировать ими чрезвычайно сложно. В то же время моменты суммы Σ'_{nk} сравнительно просты и поэтому удобны для исследований. Это позволяет упростить решение задачи об асимптотической нормальности суммы Σ_{nk}, изучая, вместо Σ_{nk}, условия сходимости моментов суммы Σ'_{nk} четного порядка. Заметим, что моменты нечетного порядка этой суммы равны 0.

Целью настоящей работы является изучение моментов суммы Σ'_{nk} порядка $q > 0$, которые в пределе совпадают с соответствующими моментами нормального закона.

Обозначим

$$\Pi_{i+1,i+j} = \prod_{h=1}^{j} \lambda_{i+h}, \quad M_{nk} = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} T_i, \quad B_{nk} = 2 \sum_{i=1}^{k} p_i q_i \mathfrak{L}_i,$$

где

$$p_i = P(x_{ni} = 1), \quad q_i = P(x_{ni} = 0), \quad \lambda_t = p_{11}^{(t)} - p_{01}^{(t)},$$

$$\mathfrak{L}_i = \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{k-i} \Pi_{i+1,i+h}, \quad T_i = \frac{1}{2} + \mathfrak{L}_i \quad (T_k = 1).$$

Теорема. Если $\lambda_t \geqslant 0 \quad (t = 2, \ldots, k)$,

$$\varepsilon_{nk} = \frac{M_{nk}}{\sqrt{B_{nk}}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

то моменты суммы Σ'_{nk} порядка $q > 0$ в пределе совпадают с [о]тветствующими моментами нормального закона.

Доказательство. Нетрудно показать, что достато[чно] установить сходимость моментов суммы Σ'_{nk} четного поряд[ка] $2m$ (m — натуральное число) к соответствующим моментам нормал[ь]ного закона. В соответствии с полиномиальной формулой

$$M\overline{S}_{nk}^{2m} = \sum_{t=1}^{2m} \sum_{\mathfrak{N}_t} \frac{(2m)!}{\gamma_1! \ldots \gamma_t!} \sum_{\mathfrak{M}_t} M y_{ni_1}^{\gamma_1} \ldots y_{n,i_1+\ldots+i_t}^{\gamma_t}, \quad (2)$$

где $\mathfrak{N}_t = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_t) : \gamma_1 + \ldots + \gamma_t = 2m \ \gamma_r > 0, \ r = 1, \ldots, t\}$, $\mathfrak{M}_t = \{(i_1, \ldots, i_t) : t \leqslant i_1 + \ldots + i_t \leqslant k \ i_r > 0, \ r = 1, \ldots, t\}$.

Введем следующие обозначения:

$$(V^{(\eta)})_{i_h} = \begin{cases} 0, \text{ если } i_{h-\eta+1} \times \ldots \times i_h = 0 \text{ и хотя бы один из} \\ \text{индексов } i_t \neq 0 \ (t = h - \eta + 1, \ldots, h), \\ 2^{-\eta}(-1)^{\eta-1}, \text{ если } i_{h-\eta+1} = \ldots = i_h = 0, \\ \Pi_{i_1+\ldots+i_{h-\eta+1},\, i_1+\ldots+i_h}, \text{ если } i_{h-\eta+1} \times \ldots \times i_h \neq 0 \end{cases}$$

$$(V^{(1)} = V);$$

$$(p)_{i_t} = p_{i_1+\ldots+i_t}, \qquad (q)_{i_t} = q_{i_1\ldots+i_t}, \qquad (2pq)_{i_t} = 2(p)_{i_t}(q)_{i_t}$$

$$(t = 1, 2, \ldots);$$

$$(U)_{i_t} = (2pq)_{i_t} + [(q)_{i_{t-1}} - (p)_{i_{t-1}}] \times [(q)_{i_t} - (p)_{i_t}](V)_{i_t} + \\ + (2pq)_{i_{t-1}}[(V)_{i_t}]^2 \quad ((U)_{i_1} = 2p_{i_1}q_{i_1});$$

$$(UV^{(\eta)})_{i_R} = (U)_{i_r}(V^{(\eta)})_{i_R},$$

где $r = R - \eta$;

$$\left(\prod_{h=1}^{\alpha} (UV^{(\eta_h)})\right)_{i_1, \ldots, i_l} = \prod_{h=1}^{\alpha} (UV^{(\eta_h)})_{i_{f(h)}},$$

где $f(h) = h + \sum_{s=1}^{h} \eta_s \quad (f(\alpha) = l)$.

Используя результаты работы [2], нетрудно привести правую часть (2) к следующему виду:

$$M\overline{S}_{nk}^{2m} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=0}^{m-\alpha} \Phi_{2\alpha,\beta}^{(2m)} \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_\alpha)\in D_{\alpha,\beta}} \sum_{(i_1,\ldots,i_{2\alpha+\beta})\in E_{\alpha,\beta}} \left(\prod_{i=1}^{\alpha} (UV^{(\eta_i)})\right)_{i_1,\ldots,i_{2\alpha+\beta}} \quad (3)$$

где

$D_{\alpha,\beta} = \{(\eta_1, \ldots, \eta_\alpha) : \eta_1 + \ldots + \eta_\alpha = \alpha + \beta, \quad \eta_i > 0, \quad i = 1, \ldots, \alpha\}$,

$$E_{\alpha,\beta} = \{(i_1, \ldots, i_{2\alpha+\beta}) : \alpha \leqslant i_1 + \ldots + i_{2\alpha+\beta} \leqslant k,\ i_1 > 0,$$
$$i_{\eta_1+\ldots+\eta_h} + h + 1 > 0, \quad h = 1, \ldots, \alpha - 1,\ i_t \geqslant 0,\ t \neq 1,$$
$$\eta_1 + \ldots + \eta_h + h + 1\},$$

$$\Phi^{(2m)}_{2\alpha\beta} = \frac{1}{C^{\beta}_{2\alpha+\beta}} \sum_{H_{2\alpha,\beta}} \frac{(2m)!}{\gamma_1! \cdots \gamma_{2\alpha+\beta}!},$$

причем множество $H_{2\alpha,\beta} \subset \mathfrak{N}_{2\alpha+\beta}$, а его элементы $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2\alpha+\beta})$ состоят из 2α нечетных и β четных натуральных чисел. Разобьем $M\bar{S}^{2m}_{nk}$ на две части: $M\bar{S}^{2m}_{nk} = Q^{(2m)}_{nk} + H^{(2m)}_{nk}$, где

$$Q^{(2m)}_{nk} = \Phi^{(2m)}_{2m,0} \sum_{(i_1,\ldots,i_{2m}) \in E_{m,0}} (UV)^{(m)}_{i_1,\ldots,i_{2m}},$$

$$H^{(2m)}_{nk} = \sum_{\alpha=1}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{m-\alpha} \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_\alpha) \in D_{\alpha,\beta}} \sum_{(i_1,\ldots,i_{2\alpha+\beta}) \in E_{\alpha,\beta}} \left(\prod_{i=1}^{\alpha} (UV^{(\eta_i)}) \right)_{i_1,\ldots,i_{2\alpha+\beta}}.$$

Согласно обозначениям

$$(UV)^{(m)}_{i_1,\ldots,i_{2m}} = \prod_{t=1}^{m} (U)_{i_{2t-1}} (V)_{i_{2t}} = \prod_{t=1}^{m} [(2pq)_{i_{2t-1}} + (R)_{i_{2t-1}}] (V)_{i_{2t}} =$$
$$= \alpha_{i_1,\ldots,i_{2m}} + \bar{\alpha}_{i_1,\ldots,i_{2m}}, \tag{4}$$

где

$$\alpha_{i_1,\ldots,i_{2m}} = \prod_{t=1}^{m} (2pq)_{i_{2t-1}} (V)_{i_{2t}},$$

$$\bar{\alpha}_{i_1,\ldots,i_{2m}} = (UV)^{(m)}_{i_1,\ldots,i_{2m}} - \alpha_{i_1,\ldots,i_{2m}},$$

$$(R)_{i_{2t-1}} = [(q)_{i_{2t-2}} - (p)_{i_{2t-2}}] [(q)_{i_{2t-1}} - (p)_{i_{2t-1}}] (V)_{i_{2t-1}} +$$
$$+ (2pq)_{i_{2t-2}} [(V)_{i_{2t-1}}]^2,$$

$$(V)_{i_{2t}} = \begin{cases} \Pi_{i_1+\ldots+i_{2t-1}+1,\ i_1+\ldots+i_{2t}}, & \text{если } i_{2t} \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } i_{2t} = 0. \end{cases}$$

Полагая $i_1 = j_1$, $i_{2t} + i_{2t+1} = j_{t+1}$ $(t = 1, \ldots, m - 1)$, $(L)_{j_t} = L_{j_1+\ldots+j_t}$,

$$(\bar{L})_{j_{t+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{j_{t+1}-1} \Pi_{j_1+\ldots+j_t+1,\ j_1+\ldots+j_t+i}, \quad (L^{(1)})_{j_{t+1}} = (L)_{j_t} - (\bar{L})_{j_{t+1}}$$

и учитывая, что

$$\sum_{i_{2t}=0}^{j_{t+1}} (V)_{i_{2t}} (2pq)_{i_{2t+1}} = (\overline{L})_{j_{t+1}} (2pq)_{j_{t+1}},$$

получаем следующее равенство:

$$\alpha_{j_1,\dots,j_m} = (2pq)_{j_1} \left[\prod_{t=1}^{m-1} (\overline{L})_{j_{t+1}} (2pq)_{j_{t+1}} \right] (\overline{L})_{j_m} = \beta_{j_1,\dots,j_m} + \overline{\beta}_{j_1,\dots,j_m}$$

где

$$\beta_{j_1,\dots,j_m} = \prod_{t=1}^{m} (2pq\mathfrak{L})_{j_t},$$

$$\overline{\beta}_{j_1,\dots,j_m} = (2pq)_{j_1} \left\{ \prod_{t=1}^{m-1} [(L)_{j_t} - (L^{(1)})_{j_{t+1}}] (2pq)_{j_{t+1}} \right\} (L)_{j_m} - \prod_{t=1}^{m} (2pq\mathfrak{L}$$

а $(2pq\mathfrak{L})_{j_t} = 2(p)_{j_t} (q)_{j_t} (\mathfrak{L})_{j_t}$.

Ввиду (4) и (5)

$$Q_{nk}^{(2m)} = \Phi_{2m,0}^{(2m)} \left[\sum_{\overline{E}_m} (\beta_{j_1,\dots,j_m} + \overline{\beta}_{j_1,\dots,j_m}) + \sum_{E_{m,0}} \overline{\alpha}_{i_1,\dots,i_{2m}} \right],$$

где $\overline{E}_m = \{(j_1, \dots, j_m) : m \leqslant j_1 + \dots + j_m \leqslant k,\ j_s > 0,\ s = 1, \dots, m$

Так как

$$\sum_{\overline{E}_m} \beta_{j_1,\dots,j_m} = \frac{B_{nk}^m}{m!} + O(\varepsilon_{nk}),$$

$$\sum_{\overline{E}_m} \overline{\beta}_{j_1,\dots,j_m} + \sum_{E_{m,0}} \overline{\alpha}_{i_1,\dots,i_{2m}} = O(\varepsilon_{nk}),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_{nk}^{(2m)}}{\overline{B}_{nk}^m} = \frac{(2m)!}{m!\,2^m},$$

где $\overline{B}_{nk} = 2B_{nk}$.

При исследовании $H_{nk}^{(2m)}$ заметим, что среди натуральных чи $\eta_1, \dots, \eta_\alpha$, удовлетворяющих равенству $\eta_1 + \dots + \eta_\alpha = \alpha + \beta$ (β≠ имеется хотя бы одно $\eta_l \geqslant 2$, которому соответствует множи $(UV^{(\eta_l)})_{i_r,\dots,i_R} = (U)_{i_r} (V^{(\eta_l)})_{i_R}$ $(r = R - \eta_l)$ в произведении

$$\left(\prod_{i=1}^{\alpha} (UV^{(\eta_i)}) \right)_{i_1,\dots,i_{2\alpha+\beta}}.$$

В силу неравенства

$$\sum_{\substack{1\leqslant i_r+\ldots+i_R\leqslant k \\ i_r>0,\ i_s\geqslant 0,\ s=r+1,\ldots,R}} (UV^{(\eta_l)})_{i_r,\ldots,i_R} \leqslant B_{nk} M_{nk}^{\eta_l-1} + 2M_{nk}^{\eta_l+1},$$

$$\frac{1}{B_{nk}^m}\sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\beta=1}^{m-\alpha}\sum_{D_{\alpha,\beta}}\sum_{E_{\alpha,\beta}}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}(UV^{(\eta_l)})\right)_{i_1,\ldots,i_{2\alpha+\beta}} = O(\varepsilon_{nk}).$$

Если же $\beta=0$, то, очевидно, (см. выражение (4))

$$\frac{1}{B_{nk}^m}\sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{D_{\alpha,0}}\sum_{E_{\alpha,0}}(UV)^{(\alpha)}_{i_1,\ldots,i_{2\alpha}} = O(\varepsilon_{nk}).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{H_{nk}^{(2m)}}{\overline{B}_{nk}^m} = O(\varepsilon_{nk})$, а это вместе с (6) доказывает, что моменты суммы $\overline{S}_{nk}$ в пределе совпадают с соответствующими моментами нормального закона.

1. *Бернштейн С. Н.* Несколько замечаний о предельной теореме Ляпунова.— Докл. АН СССР, 1939, 24, с. 3—6. 2. *Марушин М. Н.* Об одном равенстве для моментов величин, полученных в результате симметризации неоднородной цепи Маркова с двумя состояниями.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1979, с. 117—123.

Поступила в редколлегию 01.06.81

УДК 519.21

И. К. МАЦАК, канд. физ.-мат. наук

Украинский филиал Центрального научно-исследовательского института комплексного использования водных ресурсов

ОЦЕНКИ МОМЕНТОВ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

1. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский непрерывный процесс, $t\in[a,b]$. Точную верхнюю границу чисел s таких, что существует последовательность $(t_i, i=1,\ldots,2s)$, $t_i<t_{i+1}$, $t_i\in[a,b]$, для которой $\xi(t_1)\geqslant V$, $\xi(t_2)\leqslant u$, $\xi(t_3)\geqslant v,\ldots,\xi(t_{2s})\leqslant u$, назовем числом пересечений $C^+_{u,v}$ полосы (u,v) сверху вниз случайным процессом $\xi(t)$, $t\in[a,b]$. Аналогично определяется число пересечений $C^-_{u,v}$ снизу вверх. Величину $C_{u,v}=C^+_{u,v}+C^-_{u,v}$ назовем числом пересечений полосы (u,v) процессом $\xi(t)$, $t\in[a,b]$.

К настоящему времени достаточно подробно исследован такой функционал от траекторий случайного процесса, как число пересечений уровня [1]. Число пересечений полосы мартингалом рассмотрено в работе [2]. В настоящей статье предлагается простой