В силу неравенства

$$\sum_{\substack{1\leqslant i_r+\ldots+i_R\leqslant k \\ i_r>0,\ i_s\geqslant 0,\ s=r+1,\ldots,R}} (UV^{(\eta_l)})_{i_r,\ldots,i_R} \leqslant B_{nk} M_{nk}^{\eta_l-1} + 2M_{nk}^{\eta_l+1},$$

$$\frac{1}{B_{nk}^m}\sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\beta=1}^{m-\alpha}\sum_{D_{\alpha,\beta}}\sum_{E_{\alpha,\beta}}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}(UV^{(\eta_l)})\right)_{i_1,\ldots,i_{2\alpha+\beta}} = O(\varepsilon_{nk}).$$

Если же $\beta=0$, то, очевидно, (см. выражение (4))

$$\frac{1}{B_{nk}^m}\sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{D_{\alpha,0}}\sum_{E_{\alpha,0}}(UV)^{(\alpha)}_{i_1,\ldots,i_{2\alpha}} = O(\varepsilon_{nk}).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{H_{nk}^{(2m)}}{\overline{B}_{nk}^m} = O(\varepsilon_{nk})$, а это вместе с (6) доказывает, что моменты суммы $\overline{S}_{nk}$ в пределе совпадают с соответствующими моментами нормального закона.

1. *Бернштейн С. Н.* Несколько замечаний о предельной теореме Ляпунова.— Докл. АН СССР, 1939, 24, с. 3—6. 2. *Марушин М. Н.* Об одном равенстве для моментов величин, полученных в результате симметризации неоднородной цепи Маркова с двумя состояниями.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1979, с. 117—123.

Поступила в редколлегию 01.06.81

УДК 519.21

И. К. МАЦАК, канд. физ.-мат. наук
Украинский филиал Центрального научно-исследовательского института комплексного использования водных ресурсов

ОЦЕНКИ МОМЕНТОВ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

1. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский непрерывный процесс, $t\in[a,b]$. Точную верхнюю границу чисел s таких, что существует последовательность $(t_i, i=1,\ldots,2s)$, $t_i<t_{i+1}$, $t_i\in[a,b]$, для которой $\xi(t_1)\geqslant V$, $\xi(t_2)\leqslant u$, $\xi(t_3)\geqslant v,\ldots,\xi(t_{2s})\leqslant u$, назовем числом пересечений $C_{u,v}^{+}$ полосы (u,v) сверху вниз случайным процессом $\xi(t)$, $t\in[a,b]$. Аналогично определяется число пересечений $C_{u,v}^{-}$ снизу вверх. Величину $C_{u,v}=C_{u,v}^{+}+C_{u,v}^{-}$ назовем числом пересечений полосы (u,v) процессом $\xi(t)$, $t\in[a,b]$.

К настоящему времени достаточно подробно исследован такой функционал от траекторий случайного процесса, как число пересечений уровня [1]. Число пересечений полосы мартингалом рассмотрено в работе [2]. В настоящей статье предлагается простой подход, позволяющий получить некоторые оценки сверху момен... числа пересечений полосы. Вопрос о нахождении каких-либо т... ных характеристик величины $C_{u,v}$, например $MC_{u,v}$, даже для... уссовских процессов представляется трудным.

2. Будем предполагать, что $M\xi(t) = 0$, $M\xi(t)\xi(s) = r(t,$ ... процесс $\xi(t)$ дифференцируем в среднем квадратическом и

$$\gamma^2(t) = M|\xi'(t)|^2 > 0, \quad \sigma^2(t) = r(t,t) > 0,$$

$$\mu(t) = M\xi'(t)\xi(t)/\sigma(t)\gamma(t),$$

$$\chi[u,v](x) = \begin{cases} 1, & x \in [u,v], \\ 0, & x \bar{\in} [u,v]. \end{cases}$$

Предложение 1. Имеет место неравенство

$$MC^n_{u,v} \leqslant \sqrt{(2n-1)!!}\,((b-a)\gamma/(v-u))^n. \quad (\ldots$$

При $n = 1$ (1) можно усилить. Обозначим через $C^*_{u,v}$ число пере... чений полосы (u, v) процессом $\xi(t)/\sigma(t)$.

Предложение 2. А. Пусть $L = (1/\pi)\int\limits_a^b [\gamma(t)(1-\mu^2(t))^{1\ldots}$ $/\sigma(t)]\,dt$, тогда

$$MC^*_{u,v} \leqslant L/(v-u)\int\limits_u^v \exp(-x^2/2)\,dx.$$

Б. Пусть $\xi(t)$ — стационарный процесс, $\lambda_2 = \gamma(t)$, $\lambda_0 = \sigma(t\ldots$ тогда

$$MC_{u,v} \leqslant (b-a)\lambda_2^{1/2}\left(\int\limits_u^v \exp(-x^2/2\lambda_0)\,dx\right)/\pi(v-u)\lambda_0^{1/2}.$$

Предложение 3. Если $0 < \alpha < (v-u)^2/2\gamma(b-a)^2$, то

$$M\exp(\alpha C^2_{u,v}) \leqslant [1 - 2\alpha\gamma(b-a)^2/(v-u)^2]^{-1/2}.$$

3. Положим

$$\xi_{u,v}(t) = \begin{cases} \xi(t), & \xi(t) \in [u,v], \\ u, & \xi(t) < u, \\ v, & \xi(t) > v, \end{cases}$$

$$\bigvee_a^b [f(t)] = \sup_{n,\Pi_n}\sum_1^{n-1}|f(t_{k+1}) - f(t_k)|, \quad \Pi_n = \{a \leqslant t_1 < \ldots < t_1 \leqslant b\}$$

C_x — число пересечений уровня x процессом $\xi(t)$, $t \in [a,b]$.

Лемма. С вероятностью 1 выполняются равенства

$$\bigvee_u^v C_x dx = \bigvee_a^b [\xi_{u,v}(t)] = \int\limits_a^b |\xi'(t)|\chi_{[u,v]}(\xi(t))\,dt. \quad (\ldots$$

Первое равенство в (2) это теорема Банаха [3, с. 212], примененная к функции $\xi_{u,v}(t)$. Второе равенство получаем из известной формулы [3, с. 240] $\bigvee_a^b [f(t)] = \int_a^b |f'(t)|\, dt$, справедливой для абсолютно непрерывной функции $f(t)$. Абсолютная непрерывность процесса $\xi(t)$ следует из условия $\gamma < \infty$ [4].

Доказательства предложений 1 — 3 опираются на лемму, элементарное неравенство $C_{u,v}(v-u) \leqslant \bigvee_a^b [\xi_{u,v}(t)]$ и неравенство для выпуклых функций $\varphi(t)$ [5]:

$$\varphi\left(1/(b-a)\int_a^b f dt\right) \leqslant 1/(b-a)\int_a^b \varphi(f)\, dt.$$

Докажем предложение 3. Функция $\exp(ax^2)$ — выпуклая. Тогда

$$M\exp(\alpha C_{u,v}^2) \leqslant M\exp\left[(\alpha/(v-u)^2)\left(\int_a^b |\xi'(t)|\, dt\right)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant 1/(b-a)\int_a^b M\exp[\alpha(b-a)^2/(v-u)^2 |\xi'(t)|^2]\, dt,$$

$$M\exp[\alpha(b-a)^2/(v-u)^2 |\xi'(t)|^2] = (v-u)[(v-u)^2 -$$

$$-2\alpha(b-a)^2\gamma(t)]^{-1/2} \leqslant [1-2\alpha\gamma(b-a)^2/(v-u)^2]^{-1/2}.$$

При доказательстве предложения 2 используются также результаты [1] о числе пересечений уровня.

Замечание. Приведенную выше лемму можно использовать для изучения функционала C_x. Так, применение равенства (2) позволяет почти для всех по мере Лебега $x \in R^n$ получить равенство

$$M\prod_1^n C_{x_i} = \int_a^b \ldots \int_a^b dt_1 \ldots dt_n \int_{-\infty}^{\infty}\int \prod_1^n |y_k|\, P_t(x, y)\, dy_1 \ldots dy_n, \qquad (3)$$

$P_t(x, y) = P_t(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — совместная плотность вероятностей величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n), \xi'(t_1), \ldots, \xi'(t_n)$. При выполнении условия $\gamma < \infty$ почти для всех $x \in R^n$ правая и левая части равенства (3) конечны. Интересно, что равенство (3) не выполняется при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ [1, с. 213].

1. *Крамер Г., Лидбеттер М*. Стационарные случайные процессы. М., 1969. 398 с. 2. *Дуб Д*. Вероятностные процессы. М., 1956. 606 с. 3. *Натансон И. П*. Теория функций вещественной переменной. М., 1974. 480 с. 4. *Ибрагимов И. А*. Свойства реализаций случайных процессов и теоремы вложения.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, вып. 3, с. 468—480. 5. *Харди Г. X., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г*. Неравенства. М., 1948, 456 с.

Поступила в редколлегию 16.06.81