$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}' \| \tilde{\xi}_t^{(n)} \|^2 = \int_{C^X_{[0,T]}} \| q_t^{(0)}(x) \|^2 d\mu_w, \quad t \leqslant T.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \| \xi_t^{(n)} - \xi_t^{(0)} \|^2 = 0$, $t \leqslant T$. Теорема 2 доказана.

1. *Скороход А. В.* К-Мартингалы и стохастические уравнения. — Труды школы-семинара по теории случайных процессов, ч. 2. Друскининкай, 1974, с. 195—234. 2. *Писанец С. И.* О мерах, соответствующих диффузионным процессам.—Докл. АН СССР, 1973, **212**, 1, с. 44—45. 3. *Писанец С. И.* О сильной сходимости последовательности процессов диффузионного типа.— Теория вероятностей и ее применения, 1979, **24**, вып. 4, с. 866—872. 4. *Скороход А., В.* Случайные линейные операторы. Киев, 1978. 200 с. 5. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961. 216 с. 6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М., 1975. Т. 2. 664 с.

Поступила в редколлегию 18.12.81

УДК 519.21

В. И. ПИТЕРБАРГ, канд. физ.-мат. наук
Московский университет

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШОГО ВЫБРОСА ДЛЯ ГАУССОВСКОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Настоящая заметка продолжает исследования, начатые в работе [1].

Пусть ξ_t, $t \in [0, 1]$—гауссовский сепарабельный случайный процесс, $M\xi_t \equiv 0$, $R(t, s) = M\xi_t\xi_s$, $R(t, t) = \sigma_t^2$, $r(t, s) = R(t, s)/\sigma_t\sigma_s$— корреляционная функция процесса. Будем предполагать выполненными следующие условия:

I) σ_t имеет единственный абсолютный максимум в точке $t_M \in [0, 1]$, и $\sigma_t = \sigma_{t_M} - A|t - t_M|^\alpha + o(|t - t_M|^\alpha)$, $t \to t_M$ для некоторых $0 < A < +\infty$ и $\alpha > 0$, причем $\sigma_{t_M} > 0$;

II) $r(t, s) = 1 - D(t, s)|t - s|^\alpha + o(|t - s|^\alpha)$, $t \to t_M$, $s \to t_M$, $D = D(t_M, t_M) > 0$, $D(t, s)$ непрерывна в точке (t_M, t_M) (локальная стационарность процесса ξ_t в точке t_M);

III) существуют $C < \infty$, $\alpha_1 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что для всех t, s, $|t - s| \leqslant t_0$ $|1 - r(t, s)| \leqslant C|t - s|^{\alpha_1}$ (гельдеровость в среднем квадратическом).

Обозначим $\Psi(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{-1} \exp(-x^2/2)$.

Лемма. Пусть ζ_t — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией вида $r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$, $\alpha > 0$, $t \to 0$. Тогда для любых $b > 0$, S, T, $T > 0 \geqslant S$

$$\lim_{u\to\infty} P(\max_{[Su^{-2/\alpha}, Tu^{-2/\alpha}]} \zeta_t/(1 + b|t|^\alpha) > u)/\Psi(u) = 1 + H_\alpha^b(S, T),$$

где

$$H_\alpha^b(S,T)=(1+b)^{-1}\int_0^\infty \exp(s/(1+b))\,P(\max_{[S(1+b)^{2/\alpha},T(1+b)^{2/\alpha}]}\chi(t)>s)$$

$\chi(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ — гауссовский процесс с непрерывными т екториями, $M\chi(t)=-|t|^\alpha$, ковариация $(\chi(t),\chi(s))=-|t-s|^\alpha+|t|^\alpha+|s|^\alpha$.

Доказательство. Нетрудно показать, что семейство усл ных распределений процесса $\chi_u(t)=u\zeta_{tu^{-2/\alpha}}/(1+b|t|^\alpha u^{-2})-u^2$ и $\chi_u(0)=y$ слабо компактно. Легко доказывается сходимость усл ных математического ожидания и ковариации этого процесса к со ответствующим функциям для процесса $\chi(t)-b|t|^\alpha$. Дальнейш доказательство основано на соотношении

$$P(\max X(t)>u)=P(X(0)>u)+\int_{-\infty}\varphi(y)\,P(\max X(t)>u\mid X(0)=y$$

где $X=\zeta/(1+b|t|^\alpha)$, φ — стандартная гауссовская плотнос Первое слагаемое в правой части эквивалентно $\Psi(u)$, второе $\Psi(u)H_\alpha^b(S,T)$. Подробные доказательства аналогичных результат содержатся во многих работах (см. ссылки в статье [1]).

Теорема. Пусть выполнены условия I) — III), тогда

$$\lim_{u\to\infty}(\Psi(u/\sigma_{t_M}))^{-1}P(\max_{[0,1]}\xi_t>u)=\begin{cases}1+{}_1H_\alpha^K, & t_M\in(0,1),\\ 1+{}_2H_\alpha^K, & t_M=0 \text{ или } 1,\end{cases}$$

где $\infty>{}_1H_\alpha^K=\lim_{T\to\infty}H_\alpha^K(-T,T)>0$, $\infty>{}_2H_\alpha^K=\lim_{T\to\infty}H_\alpha^K($ $T)>0$, $K=A/(\sigma_{t_M}D)$.

Например, если ξ_t — винеровский процесс, то $\alpha=t_M=\sigma_{t_M}=A=D=1$, откуда ${}_2H_1^1=1$, что дает асимптотику для любого др гого процесса с $\alpha=K=1$ и $t_M=0$ или 1.

Доказательство. Рассмотрим случай $t_M\in(0,1)$. В силу лем 4,5 [1] для любых $\varepsilon,\varepsilon_1>0$ найдется u_0 такое, что для всяко $u>u_0$

$$P(\max_{h(u)}\xi_t^{A^+}>u)(1-\varepsilon_1)<P(\max_{[0,1]}\xi_t>u)<$$
$$<P(\max_{h(u)}\xi_t^{A^-}>u)(1+\varepsilon_1), \qquad ($$

где $A^+=(A+\varepsilon)/\sigma_{t_M}^2$, $A^-=(A-\varepsilon)/\sigma_{t_M}^2$, $\xi_t^C=(\xi_t/\sigma_t)/(1/\sigma_{t_M}+C|t-t_M|^\alpha)$, $h(u)=[t_M-\delta(u),\ t_M+\delta(u)]\cap[0,1]$, $\delta(u)\downarrow 0$, $u^2\delta(u)$ $\ln u\to\infty$, $u\to\infty$. (В случае $t_M=0$ следует взять интервал [0 $\delta(u)]$, в случае $t_M=1$ — аналогичный интервал). В силу лемм сравнения Слепяна [2] и условия II) для любого $\varepsilon_2>0$ найдет

$u_1>0$ такое, что для всех $u>u_1$

$$P(\max_{h(u)}(\eta_t^- - u/\sigma_t^c)>0)\leqslant P(\max_{h(u)}\xi_t^c>u)\leqslant$$
$$\leqslant P(\max_{h(u)}(\eta_t^+ - u/\sigma_t^c)>0), \tag{2}$$

где η_t^- и η_t^+ — гауссовские стационарные процессы с нулевыми средними и ковариационными функциями $\exp(-(D\pm\varepsilon_2)|t|^\alpha)$, $\sigma_t^C = (1/\sigma_{t_M}+C|t-t_M|^\alpha)^{-1}$.

Обозначая через η_t либо η_t^+, либо η_t^-, для произвольного $T>0$ и $u>\max(u_0, u_1)$ находим

$$P(h(u)) = P(\max_{h(u)}(\eta_t - u/\sigma_{t_M})>0) =$$
$$= P(\max_{[-Tu^{-2/\alpha},Tu^{-2/\alpha}]}\eta_t/(\sigma_{tM}^{-1}+C|t|^\alpha)>u) +$$
$$+ P(\max_{[-Tu^{-2/\alpha},Tu^{-2/\alpha}}\eta_t/(\sigma_{t_M}^{-1}+C|t|^\alpha)<u,$$
$$\max_{h(u)\setminus[-Tu^{-2/\alpha},Tu^{-2/\alpha}]}\eta_t/(\sigma_{t_M}^{-1}+C|t|^\alpha)>u). \tag{3}$$

Асимптотику при $u\to\infty$ первого слагаемого в правой части легко найти с помощью леммы, необходимо лишь изменить масштаб времени $t=t_M+D^{-1/\alpha}\tilde{t}$ и положить $b=C\sigma_{tM}/D$. (Если $t_M=0$ или 1, то в первом слагаемом вместо $[-Tu^{-2/\alpha}, Tu^{-2/\alpha}]$ следует взять $[0, Tu^{-2/\alpha}]$). Второе слагаемое оценим сверху величиной

$$2P(\max_{[Tu^{-2/\alpha},\delta(u)]}\eta_t/(\sigma_{t_M}^{-1}+C|t|^\alpha)>u)\leqslant 2\sum_{k=1}^{[T\delta(u)u^{2/\alpha}]+1}P(A_k),$$

где $A_k = (\max_{[kTu^{-2/\alpha},(k+1)Tu^{-2/\alpha}]}\eta_t/(\sigma_{t_M}^{-1}+C|t|^\alpha)>u)$.

Воспользовавшись леммой при $b=0$, нетрудно получить оценку

$$P(A_k)\leqslant L_1T\Psi(u/\sigma_{t_M})\exp(-L_2k^\alpha T^\alpha),$$

где L_1 и L_2 — константы, не зависящие от $u>u_2$, k, и $T\geqslant T_0$, u_2, T_0 — достаточно большие числа. (Аналогичная оценка более подробно проводится в работе [1]). Итак, для всех достаточно больших T

$$\limsup_{u\to\infty}(\Psi(u/\sigma_{t_M}))^{-1}P(h(u))\leqslant 1+H_\alpha^b(-T(D+\varepsilon)^{1/\alpha},$$
$$T(D+\varepsilon)^{1/\alpha})+\delta_1(T),$$
$$\liminf_{u\to\infty}(\Psi(u/\sigma_{t_M}))^{-1}P(h(u))\geqslant 1+H_\alpha^b(-T(D-\varepsilon)^{1/\alpha},$$
$$T(D+\varepsilon)^{1/\alpha})+\delta_2(T),$$

где $\delta_i(T)\to 0$, $T\to\infty$, $i=1,2$. Отсюда в силу соотношений (1), (2) и лемм 4, 5 из работы [1] следует, что для любого $\varepsilon>0$

$$\limsup_{u\to\infty}(\psi(u/\sigma_{t_M}))^{-1}P(\max_{[0,1]}\xi_t>u)\leqslant 1+$$

$$+ H_\alpha^{A\sigma_{t_M}^{-1}D^{-1}-\varepsilon}(-TD^{1/\alpha}, TD^{1/\alpha}) + \varepsilon_1(T),$$

$$\liminf_{u\to\infty} (\Psi(u/\sigma_{t_M}))^{-1} P(\max_{[0,1]}\xi_t > u) \geqslant 1 +$$

$$+ H_\alpha^{A\sigma_{t_M}^{-1}D^{-1}+\varepsilon}(-TD^{1/\alpha}, TD^{1/\alpha}) + \varepsilon_2(T).$$

Используя непрерывность $H_\alpha^b(-T, T)$ и $H_\alpha^b(0, T)$ по b $(b > 0$ монотонность этих функций по T, при $T \to \infty$ получаем требуем асимптотику. Соотношение ${}_iH_\alpha^K < \infty$, $i = 1, 2$ следует из (4), равенства $P(h(u)) \leqslant 2\sum_{k=0}^\infty P(A_k)$, и вышеприведенной оценки д $P(A_k)$ с $T = T_0 = \text{const}$.

В заключение заметим, что в формулировке теоремы 1 из ра ты [1] следует вместо $\beta \geqslant \alpha$ читать $\beta > \alpha$ и символ $A^{-1/\beta}$ замени на $(A/\sigma(t_m))^{-1/\beta}$. На эти неточности авторам указал В. Р. Фатал

1. *Питербарг В. И., Присяжнюк В. П.* Асимптотика вероятности боль го выброса для гауссовского нестационарного процесса.— Теория вероятнос и мат. статистика, 1978, вып. 18, с. 121—134. 2. *Slepian D.* The one-sided barr problem for Gaussian noise.— Bell System Techn. J., 1962, 41, p. 463—501.

Поступила в редколлегию 20.05.

УДК 519.21

А. И. ПОНОМАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ПСЕВДООДНОРОДНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей работе рассматриваются псевдооднородные слу чайные поля со значениями в банаховом пространстве в ситуаци когда параметрическим множеством полей служат однородные про странства и группы. Такие поля представляют обобщение комплекснозначных псевдооднородных случайных полей, изучавшихс автором в работе [1]. Многие из приведенных результатов являютс новыми и для комплекснозначных случайных полей.

Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная группа. Через $S(\mathfrak{G})$ будем в дальней шем обозначать линейное пространство комплекснозначных функ ций на $\mathfrak{G}$, инвариантное относительно операции комплексного соп ряжения и содержащее константы, а также все сдвиги принадле жащих ему функций. Линейный функционал $\mathfrak{M}$ на $S(\mathfrak{G})$ называется инвариантным средним, если удовлетворяются следующие условия: 1) при $f \geqslant 0$ $\mathfrak{M}(f) \geqslant 0$; 2) $\mathfrak{M}(1) = 1$; 3) $\mathfrak{M}(\bar{f}) = \overline{\mathfrak{M}(f)}$ для всех $f \in S(\mathfrak{G})$; 4) $\mathfrak{M}({}_gf) = \mathfrak{M}(f)$, $\mathfrak{M}(f_g) = \mathfrak{M}(f)$, где ${}_gf(s) = f(gs)$, $f_g(s) = f(sg)$, s, $g \in \mathfrak{G}$.