1. *Пономаренко А. И.* Псевдооднородные случайные поля на группах … нородных пространствах.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1971, вы… с. 117—122. 2. *Пономаренко П. И.* Однородные в широком смысле случа… поля на полугруппах и однородных пространствах со значениями в банах… пространстве.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1972, вып. 7, с. 110—… 3. *Гринлиф Ф.* Инвариантные средние на топологических группах и их прил… ния. М., 1977. 135 с.

Поступила в редколлегию 02.…

УДК 519.21

Г. М. РАХИМОВ, канд. физ.-мат. наук
Ташкентский университет

ОБ ОЦЕНКЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ НА СФЕРЕ. II

Настоящая работа является продолжением статьи [1].

Для произвольного набора чисел $r = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ век… столбец $\{d_{m_1}^{(T)}(\lambda), d_{m_2}^{(T)}(\lambda), \dots, d_{m_k}^{(T)}(\lambda)\}'$ обозначим через $\mathbf{d}_r^{(T)}(\lambda)$, $d_m^{(T)}(\lambda) = \int_0^T \xi_m^l(t)\, e^{-i\lambda t} dt$. Аналогично введем векторы $\xi_r^l(t)$, S_r^l…

Матрицу спектральной плотности $\xi_r^l(t)$ обозначим через $\mathbf{f}_r(\lambda)$.

Теорема 4. Пусть случайное поле $\xi(P, t)$ такое, что вы… няются условия А и Б [1]. Если $B_T \to 0$, $B_T T \to \infty$ при $T \to \infty$, … вектор

$$\sqrt{B_T T}\,[f_{m_1}^{(T)}(\lambda_1) - Mf_{m_1}^{(T)}(\lambda_1)], \dots, \sqrt{B_T T}\,[f_{m_k}^{(T)}(\lambda_k) - Mf_{m_k}^{(T)}(\lambda_k)]$$

асимптотически нормален со средним 0 и ковариационной матри… приведенной в теореме 1 [1], $-\infty < \lambda_i < \infty$, $m_i \geqslant 0$; $i = 1, 2, \dots$ k и $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство теоремы 1 [1] и 4. Согла… следствию теоремы 4.4 работы [2] для оценки спектральной пл… ности $f_m^T(\lambda)$, определенной равенством (2), имеют место соотно… ния, приведенные в теореме 1.

Доказательство теоремы 4, т. е. асимптотическая нормальн… вектора $\{B_T T\,[f_{m_j}^{(T)}(\lambda_j) - Mf_{m_j}^{(T)}(\lambda_j)],\quad j = 1, 2, \dots, k\}$ следует … теоремы 4.4 [2].

Теорема 5. Пусть для случайного поля $\xi(P, t)$ выполн… условия А и Б [1]

$$B_m^{(T)}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\mu} I_m^{(T)}(\lambda)\, d\lambda, \quad m \geqslant 0, \quad -\infty < \mu < \infty,$$

где $I_m^{(T)}(\lambda)$ определена равенством (1) [1]. Тогда вектор

$$\sqrt{T}\,[B_{m_1}^{(T)}(\mu_1) - B_{m_1}(\mu_1)], \dots, \sqrt{T}\,[B_{m_k}^{(T)}(\mu_k) - B_{m_k}(\mu_k)]$$

асимптотически нормален со средним 0 и вторым моментом, указанным в теореме 2 [1].

Доказательство теорем 2 [1] и 5. Из теоремы 4.1 работы [2] следует, что $MI_m^{(T)}(\lambda) = f_m(\lambda) + O(T^{-1})$. Используя это равенство, как и в случае дискретного времени [3, 4], получаем первое соотношение теоремы 2. Далее, согласно (3)

$$\operatorname{cov}\{B_m^{(T)}(\mu_1), B_p^{(T)}(\mu_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1\mu_1}e^{-i\lambda_2\mu_2}(2\pi T)^{-2}\times$$

$$\times \operatorname{cov}\{|d_m^{(T)}(\lambda_1)|^2, |d_p^{(T)}(\lambda_2)|^2\}\,d\lambda_1 d\lambda_2.$$

В силу теоремы 3.1 [2]

$$\operatorname{cov}\{|d_m^{(T)}(\lambda_1)|^2, |d_p^{(T)}(\lambda_2)|^2\} = [2\pi T\Delta^{(T)}(T(\lambda_1+\lambda_2))f_{mp}(\lambda_1) + O(1)]\times$$

$$\times [2\pi T\Delta^{(T)}(T(-\lambda_1-\lambda_2))f_{mp}(-\lambda_1) + O(1)] +$$

$$+ [2\pi T\Delta^{(T)}(T(\lambda_1-\lambda_2))f_{mp}(\lambda_1) + O(1)]\times$$

$$\times 2\pi T\Delta^{(T)}(T(-\lambda_1+\lambda_2))f_{mp}(-\lambda_1) + O(1)] +$$

$$+ [(2\pi)^3 T f_{mp,mp}(\lambda_1 - \lambda_1, \lambda_2) + O(1)],$$

где

$$\Delta^{(T)}(T\lambda) = \int_0^T e^{-i\lambda t}dt.$$

Поэтому

$$\operatorname{cov}\{B_m^{(T)}(\mu_1), B_p^{(T)}(\mu_2)\} = 2\pi T^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1\mu_1}e^{i\lambda_1\mu_2}f_{mp}^2(\lambda_1)\,d\lambda_1 +$$

$$+ 2\pi T^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1\mu_1}e^{-i\lambda_1\mu_2}f_{mp}^2(\lambda_1)\,d\lambda_1 + 2\pi T^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1\mu_1+i\lambda_2\mu_2}\times$$

$$\times f_{mp,mp}(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2 + O(T^{-1}).$$

Отсюда и следует второе соотношение теоремы 2 [1].

Обратимся к семиинвариантам высших порядков:

$$\operatorname{cum}\{B_{m_1}^{(T)}(\mu_1), \ldots, B_{m_k}^{(T)}(\mu_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1\mu_1}\ldots e^{i\lambda_k\mu_k}(2\pi T)^{-k}\times$$

$$\times \operatorname{cum}\{|d_{m_1}^{(T)}(\lambda_1)|^2, \ldots, |d_{m_k}^{(T)}(\lambda_k)|^2\} = (2\pi T)^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1\mu_1}\ldots$$

$$\ldots e^{i\lambda_k\mu_k} \sum_{\nu} \left[(2\pi)^{\nu_1-1} \Delta^{(T)} \left(T \sum_{j\in\nu_1} \pm \lambda_j \right) f_{m_1,\ldots,m_k}(\lambda_j,\ j\in\nu_1) + O(1) \right]\ldots$$

$$\ldots [(2\pi)^{\nu_p-1} \Delta^{(T)} \left(T \sum_{j\in\nu_p} \pm \lambda_j \right) f_{m_1,\ldots,m_k}(\lambda_j,\ j\in\nu_p) + O(1)],\quad \nu=(m_1,\ldots,$$

где внутренняя сумма распространена на все неразложимые разби[ения] [4, с. 26] совокупности

$$\begin{matrix} d_{m_1}^{(T)}(\lambda_1)\, d_{m_1}^{(T)}(-\lambda_1), \\ \vdots \qquad \vdots \\ d_{m_k}^{(T)}(\lambda_k)\, d_{m_k}^{(T)}(-\lambda_k). \end{matrix}$$

Из свойств $\Delta^{(T)}(T\lambda)$ вытекает, что главный член этого семиинвар[иан]та имеет порядок T^{-k+1}.

Рассматривая переменные $\sqrt{T}\,[B_{m_j}^{(T)}(\mu_j) - B_{m_j}(\mu_j)]$, $j=1, 2, \ldots$ убеждаемся, что все семиинварианты, порядок которых выше стремятся к 0, т. е. указанные переменные асимптотически норма[ль]ны. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть для случайного поля $\xi(P, t)$ выполн[ены] А, Б и (5) [1]. Тогда вектор $\sqrt{T}\,[R_N^{(T)}(\theta_j, \mu_j) - MR_N^{(T)}(\theta_j, \mu_j)]$, $j = 1, 2, \ldots, k$ асимптотически нормален со средним 0 и ковариаци[он]ной матрицей, указанной в теореме 3 [1], для $0 \leqslant \theta_j \leqslant \pi$, $-\infty < \mu_j < \infty$, $j = 1, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство теорем 3 [1] и 6. Для фиксированного

$$\lim_{T\to\infty} MR_N^{(T)}(\theta, \mu) = \omega_n^{-1} \sum_{m=0}^{N} h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} B_m(\mu),$$

и первое соотношение теоремы 3 выполняется при $N \to \infty$.

Далее, находим

$$\lim_{T\to\infty} T \operatorname{cov}\{R_N^{(T)}(\theta_1, \mu_1), R_N^{(T)}(\theta_2, \mu_2)\} = \sum_{m,p=0}^{N} h(m, n)\, h(p, n) \times$$

$$\times \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_1)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \frac{C_p^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_2)}{C_p^{\frac{n-2}{2}}(1)} \lim_{T\to\infty} T \operatorname{cov}\{B_m^{(T)}(\mu_1), B_p^{(T)}(\mu_2)\}$$

и второе соотношение теоремы 3 вытекает из теоремы 2 при усл[о]вии (5) [1].

Для фиксированного N асимптотическая нормальность векто[ра] $\{\sqrt{T}\,[R_N^{(T)}(\theta_j, \mu_j) - MR_N^{(T)}(\theta_j, \mu_j)],\ j = 1, 2, \ldots, k\}$ при $T \to \infty$ с[ледует]

дует согласно теореме 5 из асимптотической нормальности

$$\sqrt{T}\,[B_m^{(T)}(\mu_j) - MB_m^{(T)}(\mu_j)],\quad j = 1, 2, \ldots, k;\qquad m = 1, \ldots, N$$

и теоремы Манна и Вальда [5].

Определим

$$\mathfrak{R}_N(\theta, \mu) = \lim_{T\to\infty} \sqrt{T}\,[R_N^{(T)}(\theta, \mu) - MR_N^{(T)}(\theta, \mu)].$$

Эта величина сходится в среднем квадратическом при условии (5) [1]. Так как средняя квадратическая сходимость сохраняет нормальность, то вектор $\{\mathfrak{R}_N(\theta_1, \mu_1), \ldots, \mathfrak{R}_N(\theta_k, \mu_k)\}'$ сходится к вектору с нормальным распределением и ковариационной матрицей, приведенной в теореме 3 [1]. Теорема 6 доказана.

1. *Рахимов Г. М.* Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля на сфере. I.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 24, с. 125—129. 2. *Brillinger D. R.* The frequency analysis of relations between stationary spatial series.— Proc. XII Biennial Sem. Canad. Math. Congr. on Time Series and Stochastic Processes. Convexity and Combinatorics, 1970, p. 39—81. 3. *Brillinger D. R.* Asymptotic properties of spectral estimates of second order.— Biometrika, 1969, **56**, N 2, p. 375—390. 4. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980. 536 с. 5. *Mann H. B.*, *Wald A.* On stochastic limit and order relationships.— Ann. Math. Statist., 1943, **14**, p. 217—226.

Поступила в редколлегию 29.08.81

УДК 519.21

В. Н. РЕМНЕВ, инж.
Киевский университет

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГНОЗА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Настоящая работа посвящена изучению одного класса линейных уравнений в гильбертовом пространстве и применению свойств их решений в исследовании строения линейных несмещенных оценок среднего случайных полей и прогнозов случайных величин, стационарно связанных со случайным полем, при некоторых условиях. Полученные результаты являются обобщением нескольких теорем из работы [1] на случайные поля, заданные на множествах с некоторой полугруппой преобразований.

В работе будут приняты следующие обозначения: X — некоторое множество с заданным на нем случайным полем $\xi(x)$, $M|\xi(x)|^2 < +\infty$ для всех $x \in X$; G — полугруппа преобразований множества X, действующая слева: $g \in G: x \to gx$; K — поле вещественных чисел, если $\xi(x)$ вещественно, или поле комплексных чисел, если $\xi(x)$ комплексно; $N(A)\,(A \subset X)$ — линейная оболочка множества $\{\xi(x): x \in A\}$, а $L(A)$ — замыкание $N(A)$ по метрике $\rho(\xi, \eta) = M|\xi - \eta|^2$.