УДК 519.21

С. А. СОЛНЦЕВ, ассист.
Киевский политехнический институт

# О ПЛОТНОЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ ГАУССОВСКОЙ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Осцилляционные свойства гауссовской марковской последовательности (г. м. п.) изучались в работах [1, 2]. Было установлено, что предельные точки почти всех траекторий плотно заполняют интервал между границами осцилляции [2]. Цель настоящей статьи показать, что в случае неограниченности г. м. п. предельные точки траекторий заполняют числовую прямую почти наверное (п.н.).

Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ — г. м. п., $\mathbf{M}X_n = 0$, $\mathbf{D}X_n \to 0$, $n \to \infty$. Под $Q\{X_n\}$ будем понимать множество предельных точек почти всех траекторий последовательности $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$,

$$Q\{X_n\} = \{\alpha\colon \mathbf{P}\{\underline{\lim_n} |X_n - \alpha| = 0\} = 1\}.$$

Через $C\{X_n\}$ обозначим размах осцилляции, т. е. такое число, что

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_n} X_n = C\{X_n\}\} = 1.$$

Пусть $\{\lambda_n,\ n \geqslant 1\}$ — последовательность действительных чисел, тогда под записью $I(t; \lambda_n)$ понимаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-t^2/2\lambda_n\}$.

**Теорема.** Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ — г. м. п., тогда

$$Q\{X_n\} = [-C\{X_n\},\ C\{X_n\}]. \tag{1}$$

Доказательство. В работе [2] было доказано, что (1) имеет место, если $\sup_n |X_n| < \infty$ п. н. Напомним, что для ограниченности г. м. п. $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ необходимо и достаточно [2], чтобы для любой последовательности $\{n_k\} \in N$ существовало $t > 0$ такое, что $I(t; \mathbf{D}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k})) < \infty$, где $N$ — множество строго возрастающих последовательностей,

$$\mathbf{D}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k}) = \mathbf{M}(X_{n_{k+1}} - \mathbf{M}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k}))^2.$$

Пусть $\sup_n |X_n| = \infty$ п. н. Согласно критерию ограниченности найдется такая последовательность $\{n_k\} \in N$, что для произвольного $t > 0$

$$I(t; \mathbf{D}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k})) = \infty. \tag{2}$$

Построим последовательность $Y_{k+1} = X_{n_{k+1}} - \mathbf{M}(X_{n_{k+1}}/X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k})$. Для корректности положим $Y_1 = X_{n_1}$. Из свойства марковости вытекает [3] $\mathbf{M}(X_{n_{k+1}}/X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k}) = \mathbf{M}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k})$. Отсюда да $\mathbf{D}Y_{k+1} = \mathbf{M}(X_{n_{k+1}} - \mathbf{M}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k}))^2 = \mathbf{D}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k})$. Учиты (2), находим, что для любого $t > 0$

$$I(t; \mathbf{D}Y_k) = \infty.$$

Для завершения доказательства нам понадобится следую вспомогательное утверждение, в котором $\{A_k, k = 1, 2, \ldots\}$, $\{B_k$, $k = 1, 2, \ldots\}$ — две последовательности событий на одном и том вероятностном пространстве [4].

**Лемма.** Пусть существует положительная постоянная $\alpha <$ такая, что $P(B_k) \geqslant \alpha$ для всех $k$; $A_k$ не зависит от алгебры собы тий, порожденной событиями $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, B_1, B_2, \ldots, B_k$. Ес $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = \infty$, то

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_k} A_k B_k\} \geqslant \alpha > 0.$$

В качестве $A_k$ возьмем события $\{t - \varepsilon/2 < Y_k < t + \varepsilon/2\}$, а качестве $B_k$ — события $\{-\varepsilon/2 < Z_k < \varepsilon/2\}$, где $Z_1 \equiv 0$, $Z_{k+1} = \mathbf{M}(X_{n_{k+1}}/X_{n_k})$, $k \geqslant 1$, $t$ — любое положительное число. Сравнив члены ряда (3) с интегралами вероятностей событий $\{A_k, k \geqslant 1\}$ получаем $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = \infty$ для произвольного $t > 0$. Так как $\mathbf{D}X_n \to$ то и $\mathbf{D}Z_k = a_k \to 0$. Поэтому найдется номер $s$ такой, что $a_s = \max_k a$ Отсюда вытекает, что для любого $k \geqslant 1$ выполняется неравенст

$$\mathbf{P}(B_k) \geqslant \mathbf{P}(B_s) = \alpha > 0.$$

Заметим, что по построению $\{Y_k, k \geqslant 1\}$ — последовательност независимых случайных величин и $Y_k$ не зависит от $Z_m$ пр $m \leqslant k$. Поэтому выполняется условие леммы. Следовательно

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_k}\{t - \varepsilon < X_{n_k} < t + \varepsilon\}\} \geqslant \mathbf{P}\{\overline{\lim_k} A_k B_k\} \geqslant \alpha > 0$$

для любого $t$ и $\varepsilon > 0$. Так как множество предельных точек не случайно [2, теорема 2], то

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_k}\{t - \varepsilon < X_{n_k} < t + \varepsilon\}\} = 1,$$

т. е. $t \in Q\{X_n\}$. Из произвольности $t$ и $\varepsilon > 0$ следует утверждение теоремы, когда $\sup_n |X_n| = \infty$ п. н.


1. *Булдыгин В. В.* Усиленные законы больших чисел и сходимость к нулю гауссовских последовательностей.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1978, вып. 19, с. 33—41. 2. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Об осцилляционных свойствах гауссовских последовательностей.— В кн.: Вероятностный бесконечномерный анализ. Киев, 1981, с. 15—29. 3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1967. Т. 2. 752 с. 5. *Baum L. E., Katz M., Stratton H. H.* Strong laws for ruled sums.— Ann. Math. Statist., 1971, 42, 2, p. 625—629.


Поступила в редколлегию 01.10.8