УДК 519.21

Ю. С. ХОХЛОВ, ст. преп.
Калининский университет

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА СДВИГА КОМПОЗИЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА К МНОГОМЕРНОМУ УСТОЙЧИВОМУ ЗАКОНУ

Пусть $M(d)$ — группа движений евклидова пространства R^d. Любой элемент $g \in M(d)$ можно представить в виде $g = (U, Y)$, где U — поворот вокруг начала координат, Y — сдвиг. Если $g(n) = g_1 g_2 \ldots g_n$ — произведение нескольких движений, то $g(n) = (U(n), Y(n))$, где $U(n) = U_1 U_2 \ldots U_n$,

$$Y(n) = Y_1 + U_1 Y_2 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1} Y_n. \qquad (1)$$

Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями из $M(d)$. При достаточно общих условиях доказано [1], что $U(n)$ имеет распределение, слабо сходящееся к мере Хаара на $SO(d)$, а $U(n)$ и $Y(n)$ асимптотически независимы. Поэтому основная задача состоит в выяснении предельного поведения случайного вектора $Y(n)$. В работах [1—4] был доказан следующий результат.

Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями из $M(d)$, таких, что:

1) распределение $U(n)$ слабо сходится к нормированной мере Хаара на $SO(d)$;

2) $E\|Y_i\|^2 < \infty$.

Тогда случайный вектор $X_n = n^{-1/2}\, Y(n)$ сходится по распределению к гауссовскому случайному вектору со средним нуль и ковариационной матрицей θI, где $\theta > 0$.

Целью нашей работы является доказательство аналогичной теоремы в случае, когда у сдвигов нет моментов второго порядка. Условие конечности второго момента заменяется условием о принадлежности распределения сдвига области притяжения невырожденного многомерного закона с нормировкой $B_n = n^{1/\alpha}$.

Теорема. Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями из $M(d)$, таких, что:

1) распределение $U(n)$ слабо сходится к нормированной мере Хаара на $SO(d)$;

2) сдвиги Y_i имеют распределение из области притяжения многомерного невырожденного закона с нормировкой $B_n = n^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$.

Тогда случайный вектор $n^{-1/\alpha}\, Y(n)$ имеет при $n \to \infty$ невырожденное предельное распределение с характеристической функцией

$$\varphi(t) = \exp\{-c|t|^{\alpha}\}, \qquad t \in \mathbf{R}^d, \qquad (2)$$

причем $c > 0$.

Идея доказательства этой теоремы заимствована из работы. Обозначим через ω направляющий единичный вектор некот… прямой, проходящей через начало координат, т. е. $\omega \in S^{d-1}$, S^{d-1} — $(d-1)$-мерная единичная сфера.

Лемма 1. Пусть случайный вектор Y имеет распределение, у… летворяющее условию 2 теоремы. Тогда функция распреде… ния $F(x)$ проекции вектора Y на прямую с направлением ω об… дает свойством

$$1-F(x)=(a(\omega)+o(1))/x^{\alpha},$$
$$F(-x)=(b(\omega)+o(1))/x^{\alpha}$$

при $x \to \infty$, причем функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$ непрерывны, неотри… тельны и не равны нулю одновременно для всех ω, кроме, мо… быть, тех, которые лежат в подпространстве размерности меньше…

Доказательство. Рассмотрим последовательность … зависимых одинаково распределенных векторов Y_i, удовлетвор… щих условию 2 теоремы. При проектировании векторов на выбр… ную прямую получим последовательность независимых одинак… распределенных одномерных величин. По условию их распреде… ние принадлежит области притяжения некоторого предельного р… пределения с нормировкой $B_n = n^{1/\alpha}$, которое, как хорошо изве… но [5], может быть либо вырожденным, либо устойчивым с по… зателем α. И в том и в другом случае свойство (3) выполнено. П… дельное распределение вырождено тогда и только тогда, когда $a(\omega)$ $+ b(\omega) = 0$. Слабая сходимость к вырожденному распределен… эквивалентна сходимости по вероятности. Отсюда следует, что е… распределение вырожденное для двух значений ω, то таким же о… будет для всех ω из плоскости, задаваемой этими двумя вектора… Так как в целом многомерное предельное распределение не выро… дено, то такие ω могут заполнить лишь некоторое пространство р… мерности меньшей d.

Используя каноническое представление для одномерных уст… чивых распределений [5], можно записать характеристическую фу… цию предельного многомерного распределения в виде

$$\varphi(t)=\exp\{i\langle\gamma,t\rangle-(a(\omega)+b(\omega))\,|u|^{\alpha}\,[c_1(\alpha)+i\,(a(\omega)+ + b(\omega))^{-1}(a(\omega)-b(\omega))\,c_2(\alpha)]\},$$

где $\omega = t/|t|$, $u = |t|$.

Так как $\varphi(t)$ — непрерывная функция, то из (4) следует, ч… такими же будут и $a(\omega)$, $b(\omega)$.

Замечание. Как показано в работе [6], характеристическая фу… ция случайного вектора Y_i с распределением из области притя… ния невырожденного многомерного закона с нормировкой B_n $= n^{1/\alpha}$ в окрестности нуля имеет следующий вид:

$$1-\varphi(t)=i\langle\gamma,t\rangle+c(\omega)\,|u|^{\alpha}\{c_1(\alpha)+i\beta(\omega)\,c_2(\alpha)\}+o(|u|^{\alpha},\omega),$$

где $c(\omega)=a(\omega)+b(\omega)$, $\beta(\omega)=(a(\omega)-b(\omega))\,(a(\omega)+b(\omega))^{-1}$, $u=$… $\omega = t/|t|$.

Пусть $1<\alpha<2$. Тогда существует EY_i, и согласно [4] можно найти такой неслучайный вектор λ, что для случайного вектора $Y'_i = Y_i + \lambda - U_i\lambda$ $EY'_i = 0$.

Так как $Y'(n) = Y'_1 + U_1Y'_2 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1}Y'_n = Y(n) + \lambda - U_1 \ldots U_n\lambda$ и вектор $\lambda - U_1 \ldots U_n\lambda$ ограничен, то после нормировки предельное поведение случайных векторов $Y(n)$ и $Y'(n)$ одинаково. Для величин Y'_i в формуле (5) $\gamma = 0$.

Если $0<\alpha<1$, то, аналогично переходя к величинам $Y'_i = Y_i - \gamma$, получим

$$Y'(n) = Y(n) - (I + U_1 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1})\gamma,$$

$$\|(I + U_1 + \ldots + U_1 \ldots U_{n-1})\gamma\| \leqslant n\|\gamma\|.$$

Так как при $0<\alpha<1$ $n = o(n^{1/\alpha})$, то после нормировки предельное поведение векторов $Y(n)$ и $Y'(n)$ одинаково, а для Y'_i опять $\gamma = 0$.

В силу сказанного выше можно считать, что

$$\varphi_{Y_i}(t) = 1 - c(\omega)|u|^\alpha \{c_1(\alpha) + i\beta(\omega) c_2(\alpha)\} + o(|u|^\alpha, \omega). \qquad (6)$$

Из условия 2 теоремы и представления (6) следует, что

$$\{\varphi_{Y_i}(n^{-1/\alpha}t)\}^n \to \exp\{-c(\omega)|t|^\alpha [c_1(\alpha) + i\beta(\omega) c_2(\alpha)]\}$$

равномерно по t в некотором компакте. Отсюда заключаем, что $o(|u|^\alpha, \omega)$ в представлении (6) будет равномерным по ω, так как $\omega = t/|t|$.

Лемма 2. Пусть $g = (U, Y)$ — случайное движение R^d с распределением, удовлетворяющим перечисленным выше условиям. Тогда для любой непрерывной ограниченной функции $c(\omega)$ на S^{d-1}

$$E\exp(i\langle t, Y\rangle)\, c(U^*\omega) = \hat{c}(\omega) + o(1) \qquad (7)$$

при $t \to 0$. Если $Tc(\omega) = \hat{c}(\omega)$, то

$$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} T^k c(\omega) \to c \qquad (8)$$

при $n \to \infty$ равномерно по ω.

Лемму 2 можно доказать, используя свойства распределения вектора Y и тот факт, что $U(n)$ асимптотически имеет равномерное распределение на $SO(d)$. Доказательство аналогично доказательству теоремы в работе [6].

Следующая лемма является основной во всех дальнейших рассуждениях.

Лемма 3. Пусть $\varphi_n(t)$ — характеристическая функция случайного вектора $n^{-1/\alpha}Y(n)$, $0<\alpha<2$, $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\varphi_n(t) = 1 - \tilde{c}_n(\omega)|t|^\alpha + o(|t|)^\alpha) \qquad (9)$$

при $|t| \to 0$, причем $\tilde{c}_n(\omega) \to c$ при $n \to \infty$ равномерно по $\omega = t/|t|$, $c > 0$.

Доказательство. Обозначим $c(\omega) = c_1(\alpha)[a(\omega) + b(\omega)] + ic_2(\alpha)[a(\omega) - b(\omega)]$. Тогда

$$\varphi_n(t) = E\exp(i\langle t, n^{-1/\alpha}Y(n)\rangle) = E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t,$$
$$Y(n-1)\rangle)\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t, U_1 \dots U_{n-1}Y_n\rangle).$$

Усредняя по Y_n, получаем

$$\varphi_n(t) = E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t, Y(n-1)\rangle)\varphi_{Y_n}(n^{-1/\alpha}(U_1 \dots U_{n-1})^* t) =$$
$$= E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t, Y(n-1)\rangle)[1 - n^{-1}|t|^\alpha c((U_1 \dots U_{n-1})^*\omega)] +$$
$$+ o(|t|^\alpha/n)$$

при $|t| \to 0$, причем последнее равенство получено на основании представления (6). Далее,

$$\varphi_n(t) = E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t, Y(n-2)\rangle)\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t, U_1 \dots U_{n-2}Y_1\rangle)\times$$
$$\times[1 - n^{-1}|t|^\alpha c((U_1 \dots U_{n-1})^*\omega)] + o(|t|^\alpha/n) =$$
$$= E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t, Y(n-2)\rangle)[1 - n^{-1}|t|^\alpha(c((U_1 \dots U_{n-2})^*\omega) +$$
$$+ Tc((U_1 \dots U_{n-2})^*\omega)] + o(|t|^\alpha/n) = \dots \doteq 1 - n^{-1}|t|^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} T^k c(\omega) +$$
$$+ o(|t|^\alpha) = 1 - \tilde{c}_n(\omega)|t|^\alpha + o(|t|^\alpha).$$

Здесь мы использовали лемму 2.

Лемма 4. Для достаточно малых $|t|$ и произвольного n

$$|E\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle) - \{\varphi_k(t)\}^n| \leqslant A_1 n\varepsilon_k |t|^\alpha, \qquad (10)$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, A_1 — абсолютная константа.

Доказательство. С помощью тех же рассуждений, что и в лемме 3, заметив, что случайный вектор $k^{-1/\alpha}(Y_{nk+1} + U_{nk+1}Y_{nk+2} + \dots + U_{nk+1} \dots U_{(n+1)k-1}Y_{(n+1)k})$ имеет то же распределение, что и $k^{-1/\alpha}Y(k)$, можно получить

$$E\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}Y((n+1)k)\rangle) = E\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)\times$$
$$\times\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}U_1 \dots U_{nk}(Y_{nk+1} + U_{nk+1}Y_{nk+2} + \dots$$
$$\dots + U_{nk+1} \dots U_{(n+1)k-1}Y_{(n+1)k})\rangle) = E\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)\times$$
$$\times\varphi_k((U_1 \dots U_{nk})^* t).$$

Далее, с учетом леммы 3

$$|E\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}Y((n+1)k)\rangle) - E\exp(i\langle t, k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)\varphi_k(t)| \leqslant$$
$$\leqslant E|\varphi_k((U_1\dots U_{nk})^*t) - \varphi_k(t)| = E|\tilde{c}_k((U_1\dots U_{nk})^*\omega) - \tilde{c}_k(\omega) +$$
$$+ o(1)||t|^\alpha \leqslant A_1\varepsilon_k|t|^\alpha,$$

где $\varepsilon_k = \sup\limits_{\omega}|\tilde{c}_k(\omega) - c|$. По индукции завершаем доказательство леммы.

Лемма 5. Для векторов t из компактного множества справедливо соотношение

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi_{nk}(t) - \exp(-c|t|^\alpha)| \leqslant A_2|t|^\alpha\varepsilon_k, \tag{11}$$

где A_2 — абсолютная константа.

Доказательство. Из соотношения (8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\{\varphi_k(n^{-1/\alpha}t)\}^n = \exp(-\tilde{c}_k(\omega)|t|^\alpha),$$

где $\omega = t/|t|$. Применяя лемму 4 для t из компактного множества, получаем

$$|E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle) - \{\varphi_k(n^{-1/\alpha}t)\}^n| \leqslant$$
$$\leqslant A_1n\varepsilon_k n^{-1}|t|^\alpha = A_1\varepsilon_k|t|^\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi_{nk}(t) - \exp(-\tilde{c}_k(\omega)|t|^\alpha)| \leqslant A_1\varepsilon_k|t|^\alpha.$$

Заметив, что

$$|\exp(-\tilde{c}_k(\omega)|t|^\alpha) - \exp(-c|t|^\alpha)| \leqslant B|\tilde{c}_k(\omega) - c||t|^\alpha \leqslant B\varepsilon_k|t|^\alpha,$$

завершаем доказательство леммы.

Лемма 6. Для векторов t из компактного множества справедливо соотношение

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant p\leqslant k}|\varphi_{nk+p}(t) - \varphi_{nk}(t)| \leqslant A_3\varepsilon_k|t|^\alpha, \tag{12}$$

где A_3 — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть p — целое неотрицательное число, меньшее k. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 4, находим

$$|\varphi_{nk+p}(t) - \varphi_{nk}(t)| \doteq |E\exp(i\langle(n+p/k)^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk+p)\rangle) -$$

$$-E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)| =$$

$$= |E\exp(i\langle n+p/k)^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)\,\Psi_p((U_1\ldots U_{nk})^*(n+$$

$$+p/k)^{-1/\alpha}t) - E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)|,$$

где Ψ_p — характеристическая функция для величины $k^{-1/\alpha}(Y_1 + U_1Y_2 + \ldots + U_1\ldots U_{p-1}Y_p)$. Отсюда получаем

$$|\varphi_{nk+p}(t) - \varphi_{nk}(t)| \leqslant E|\Psi_p((U_1\ldots U_{nk})^*(n+p/k)^{-1/\alpha}t) - 1| +$$

$$+ |E\exp(i\langle (n+p/k)^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle) -$$

$$-E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)|.$$

Очевидно, что при фиксированном k

$$\sup_{0\leqslant p<k} E|\Psi_p((U_1\ldots U_{nk})^*(n+p/k)^{-1/\alpha}t) - 1| \to 0,$$

если $n\to\infty$. С другой стороны, в силу леммы 4

$$|E\exp(i\langle (n+p/k)^{-1/\alpha}t,\ k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle) - E\exp(i\langle n^{-1/\alpha}t,$$

$$k^{-1/\alpha}Y(nk)\rangle)| \leqslant |\{\varphi_k((n+p/k)^{-1/\alpha}t)\}^n - \{\varphi_k(n^{-1/\alpha}t)\}^n| + 2A_1\varepsilon_k|t|^\alpha.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\{\varphi_k((n+p/k)^{-1/\alpha}t)\}^n = \lim_{n\to\infty}\{\varphi_k(n^{-1/\alpha}t)\}^n = \exp(-\tilde{c}_k(\omega)|t|^\alpha),$$

то окончательно

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant p<k}|\varphi_{nk+p}(t) - \varphi_{nk}(t)| \leqslant 2A_1\varepsilon_k|t|^\alpha,$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Из лемм 5 и 6 следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi_n(t) - \exp(-c|t|^\alpha)| \leqslant (2A_1 + A_2)\varepsilon_k|t|^\alpha. \qquad (13)$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в выражении (13), завершаем доказательство теоремы.

1. *Тутубалин В. Н.* Центральная предельная теорема для случайных движений евклидова пространства.— Вестн. Моск. ун-та, 1967, 22, вып. 6, с. 100—108. 2. *Максимов В. М.* О применимости центральной предельной теоремы к суммам вида $\Sigma f(\xi_1\xi_2\ldots\xi_n)$.— Изв. вузов, 1970, вып. 12, с. 61—71. 3. *Gorostiza G. L.* The central limit theorem for random motions of d-dimensional Euclidean space.— Ann. Probab., 1973, 1, N 2, p. 603—612. 4. *Roynette B.* Théorème centrallimite pour le groupe des deplacements de R^d.— Ann. Inst. H. Poincare, 1974, B 10, N 4, p. 391—398. 5. *Гнеденко Б. В.*, *Колмогоров А. Н.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.; Л., 1949. 264 с. 6. *Ибрагимов И. А.*, *Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965. 524 с.

Поступила в редколлегию 15.09.8