УДК 519.21

Т. Н. ЧЕЧЕТКИНА, инж.
Институт кибернетики АН УССР

ОДНА МЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Рассмотрим функцию распределение вида

$$\Phi_\varepsilon(\tau x/\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon),$$

где $\tau = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx,\ 0 < \varepsilon < 1$.

Равномерная оценка скорости сходимости $\Phi_\varepsilon(\tau x/\varepsilon)$ к экспоненциальному распределению установлена в статье [1].

Оценка скорости сходимости в метрике l_1 и равномерной метрике получена в работах [2—4]. В них определен порядок скорости сходимости, но явное выражение постоянной при малом параметре найдено не было. В настоящей статье установлен явный вид постоянной при малом параметре, полученная оценка по порядку совпадает с оценками [1—4].

Пусть σ — множество функций распределения неотрицательных случайных величин, имеющих конечное среднее, ρ — метрика, определенная на σ формулой

$$\rho(F(x), G(x)) = \int_0^\infty |F(x) - G(x)|\,dx.$$

Метрика ρ обладает следующими свойствами:

$$\rho(F_1 * \ldots * E_n,\ G_1 * \ldots * G_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \rho(F_k, G_k); \tag{1}$$

$$\rho(F(cx), G(cx)) \leqslant c^{-1}\rho(F(x), G(x)); \tag{2}$$

$$\rho(F(x), E(x)) = \tau, \tag{3}$$

где $E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases}$

$$\rho(F(x) * G(x),\ F(x) * \Gamma(x)) \leqslant \rho(G(x), \Gamma(x)). \tag{4}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. Если

$$\sup_{0 \leqslant s < \infty} \left\{(\tau(1 - F(s)))^{-1} \int_s^\infty (1 - F(t))\,dt\right\} = a < \infty, \tag{5}$$

то

$$\rho\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon) * G^{k*}(x/\varepsilon^{n+1}),\ 1 - e^{-x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \{3a(1 + \varepsilon[1/\varepsilon]/([1/\varepsilon] - 1))S + \varepsilon^{n-1}\gamma\}\,\varepsilon,$$

где n — натуральное число, $[1/\varepsilon]$ — целая часть числа $1/\varepsilon$, $\varepsilon \leqslant 1/2$, $\gamma = \int_0^\infty x dG(x)$, $S = \sum_{i=0}^{2} (1-\varepsilon)^{2-i} (\varepsilon a)^i$.

Доказательство. Из неравенства треугольника следует, что

$$\rho\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon) * G^{k*}(x/\varepsilon^{n+1}),\ 1-e^{-x}\right) \leqslant I_1 + I_2, \tag{6}$$

где

$$I_1 = \rho\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon) * G^{k*}(x/\varepsilon^{n+1}),\right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon)\right); \tag{7}$$

$$I_2 = \rho\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon),\ 1-e^{-x}\right). \tag{8}$$

Воспользовавшись определением метрики ρ и (7), найдем

$$I_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k \rho\left(F^{k*}(\tau x/\varepsilon) * G^{k*}(x/\varepsilon^{n+1}),\ F^{k*}(\tau x/\varepsilon)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k \rho\left(G^{k*}(x/\varepsilon^{n+1}), E(x)\right).$$

Учитывая свойства (1) — (4), получаем оценку

$$I_1 \leqslant \varepsilon^{n+2}\gamma \sum_{k=0}^{\infty} k (1-\varepsilon)^k = \varepsilon^n \gamma. \tag{9}$$

В работе [6] доказано, что (при выполнении условия (5))

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k F^{k*}(\tau x/\varepsilon) - (1-e^{-x})\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon(a-1))(1-\varepsilon)^{-1} \exp\{-x/(1+\varepsilon(a-1))\} -$$

$$-(1-\varepsilon)(1+\varepsilon(a-1))^{-1} \exp\{-x/(1-\varepsilon)\},$$

откуда с учетом (8) следует неравенство

$$I_2 \leqslant [(1+\varepsilon(a-1))^3 - (1-\varepsilon)^3]/[(1-\varepsilon)(1+\varepsilon(a-1))].$$

Так как $1+\varepsilon(a-1) \geqslant 1$, $(1-\varepsilon)^{-1} \leqslant 1 + \varepsilon[1/\varepsilon]/([1/\varepsilon]-1)$, то

$$I_2 \leqslant 3a(1+\varepsilon[1/\varepsilon]/([1/\varepsilon]-1)) S\varepsilon. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (6), получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Пример. Пусть $\Phi_\varepsilon(x/\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon (1-\varepsilon)^k (1-e^{-x/\varepsilon})^{k*}$. Согласно теореме $\rho(\Phi_\varepsilon(x/\varepsilon), 1-e^{-x}) \leqslant 3\varepsilon + o(\varepsilon)$. С другой стороны, лег ко проверяемое тождество $\Phi_\varepsilon(x/\varepsilon) * (1-e^{-x/\varepsilon}) = 1 - e^{-x}$ и свойство (4) дают оценку

$$\rho(\Phi_\varepsilon(x/\varepsilon),\ 1-e^{-x}) \leqslant \rho(E(x),\ 1-e^{-x/\varepsilon}) = \varepsilon.$$

Таким образом, полученная в статье оценка, по-видимому, не является точной: при заданном ε не существует функции распределения $F(x)$, обеспечивающей точное равенство.

1. *Сильвестров Д. С.* Равномерные оценки скорости сходимости для сумм случайных величин, определенных на конечной однородной цепи Маркова с поглощением.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1971, вып. 5, с. 116—127. 2. *Азларов Т. А., Джамирзаев А. А.* Равномерная оценка сходимости к предельному распределению времени жизни дублированного устройства.— Изв. АН Уз.ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1971, № 3, с. 3—8. 3. *Джамирзаев А. А.* Равномерные оценки скорости сходимости к показательному распределению сумм случайного числа случайных величин.— Annales Univ. Sci. Budar Sect. Math., 1978, 21, № 1, p. 21—26. 4. *Генис Я. Г.* Сходимость одного класса функций распределения к экспоненциальной в задачах надежности и массового обслуживания.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1978, № 6, с. 118—125. 5. *Золотарев В. М.* Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений.— Мат. сб., 1976, 101 (143), с. 416—454. 6. *Наконечный А. Н.* О применении метода малого параметра к решению задач теории надежности. Киев, 1981. 12 с. Деп. в ВИНИТИ. № 1309.

Поступила в редколлегию 10.12.81

УДК 519.21+513.88

А. А. ДОРОГОВЦЕВ, студ.
Киевский университет

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОИЗВОДНОЙ РАДОНА—НИКОДИМА

1. Ф. Рисс доказал следующее утверждение: для того чтобы функция $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ допускала представление $F(x) = C + \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$, $C\in\mathbf{R}$, $f\in L_p([a,b])$, $p>1$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K\in\mathbf{R}$ такое, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}} \leqslant K$ для любого разбиения $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ (доказательство см. в книге [1]). Этот результат был позже обобщен в работе [2]. В настоящей статье оба эти результата и некоторые аналогичные им приводятся для случая зарядов и интегралов в сепарабельном метрическом пространстве.

2. Пусть (X,ρ) — сепарабельное метрическое пространство с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathfrak{B}$, μ — конечная фиксированная мера на $\mathfrak{B}$; функция $M:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $M(x) = M(-x)$, $x\in\mathbf{R}$; 2) M — строго выпукла вниз на $\mathbf{R}$; 3) $M(0)=0$; 4) $u^{-1}M(u)\to+\infty$, $u\to+\infty$.