ко проверяемое тождество $\Phi_\varepsilon(x/\varepsilon) * (1-e^{-x/\varepsilon}) = 1 - e^{-x}$ и свойство (4) дают оценку

$$\rho(\Phi_\varepsilon(x/\varepsilon),\ 1-e^{-x}) \leqslant \rho(E(x),\ 1-e^{-x/\varepsilon}) = \varepsilon.$$

Таким образом, полученная в статье оценка, по-видимому, не является точной: при заданном ε не существует функции распределения $F(x)$, обеспечивающей точное равенство.

1. *Сильвестров Д. С.* Равномерные оценки скорости сходимости для сумм случайных величин, определенных на конечной однородной цепи Маркова с поглощением.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1971, вып. 5, с. 116—127. 2. *Азларов Т. А., Джамирзаев А. А.* Равномерная оценка сходимости к предельному распределению времени жизни дублированного устройства.— Изв. АН Уз.ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1971, № 3, с. 3—8. 3. *Джамирзаев А. А.* Равномерные оценки скорости сходимости к показательному распределению сумм случайного числа случайных величин.— Annales Univ. Sci. Budar Sect. Math., 1978, 21, № 1, p. 21—26. 4. *Генис Я. Г.* Сходимость одного класса функций распределения к экспоненциальной в задачах надежности и массового обслуживания.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1978, № 6, с. 118—125. 5. *Золотарев В. М.* Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений.— Мат. сб., 1976, 101 (143), с. 416—454. 6. *Наконечный А. Н.* О применении метода малого параметра к решению задач теории надежности. Киев, 1981. 12 с. Деп. в ВИНИТИ. № 1309.

Поступила в редколлегию 10.12.81

УДК 519.21+513.88

А. А. ДОРОГОВЦЕВ, студ.
Киевский университет

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОИЗВОДНОЙ РАДОНА—НИКОДИМА

1. Ф. Рисс доказал следующее утверждение: для того чтобы функция $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ допускала представление $F(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$, $C\in\mathbf{R}$, $f\in L_p([a,b])$, $p>1$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K\in\mathbf{R}$ такое, что $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|F(x_{k+1})-F(x_k)|^p}{(x_{k+1}-x_k)^{p-1}} \leqslant K$ для любого разбиения $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ отрезка $[a,b]$ (доказательство см. в книге [1]). Этот результат был позже обобщен в работе [2]. В настоящей статье оба эти результата и некоторые аналогичные им приводятся для случая зарядов и интегралов в сепарабельном метрическом пространстве.

2. Пусть (X,ρ) — сепарабельное метрическое пространство с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathfrak{B}$, μ — конечная фиксированная мера на $\mathfrak{B}$; функция $M:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $M(x) = M(-x)$, $x\in\mathbf{R}$; 2) M — строго выпукла вниз на $\mathbf{R}$; 3) $M(0)=0$; 4) $u^{-1}M(u)\to+\infty$, $u\to+\infty$.

Отметим, что функция M, удовлетворяющая условиям 1—, непрерывна и неотрицательна на $\mathbf{R}$. Введем обозначение $L_M = \left\{f: X \to \mathbf{R} \mid \int\limits_X M(f(x))\,d\mu(x) < +\infty\right\}$. Пусть Φ — конечный за- ряд на $\mathfrak{B}$.

Теорема 1. Пусть пространство $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ не имеет атомов. Для того чтобы $\Phi \ll \mu$ и $\frac{d\Phi}{d\mu} \in L_M$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $K \in \mathbf{R}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} M\left(\frac{\Phi(A_k)}{\mu(A_k)}\right)\cdot \mu(A_k) \leqslant K \tag{1}$$

для любого представления пространства X в виде $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \cup B$, где $\{A_k, B\} \subset \mathfrak{B}$, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$, $A_k \cap B = \varnothing$, $\mu(A_k) > 0$; $k, j = 1, 2, \ldots, n$, $\mu(B) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку для любого множества $A \in \mathfrak{B}$ с $\mu(A) > 0$

$$M\left(\frac{\Phi(A)}{\mu(A)}\right)\cdot\mu(A) = M\left(\frac{\int\limits_A f\,d\mu}{\mu(A)}\right)\cdot\mu(A) \leqslant \int\limits_A M(f)\,d\mu, \quad f = \frac{d\Phi}{d\mu}$$

согласно неравенству Иенсена, то для любого представления пространства X

$$\sum_{k=1}^{n} M\left(\frac{\Phi(A_k)}{\mu(A_k)}\right)\cdot\mu(A_k) \leqslant \int\limits_X M(f)\,d\mu < +\infty.$$

Достаточность. Сначала заметим, что для любого $A \in \mathfrak{B}$ с $\mu(A) > 0$

$$M\left(\frac{|\Phi(A)|}{\mu(A)}\right) = M\left(\frac{\Phi(A)}{\mu(A)}\right) = \frac{1}{\mu(A)}\cdot M\left(\frac{\Phi(A)}{\mu(A)}\right)\cdot\mu(A) \leqslant \frac{K}{\mu(A)}.$$

Поэтому $\frac{|\Phi(A)|}{\mu(A)} \leqslant M^{-1}\left(\frac{K}{\mu(A)}\right)$, где M^{-1} — функция, обратная к M на $[0, +\infty)$. Следовательно, $|\Phi(A)| \leqslant K\frac{\mu(A)}{K}M^{-1}\left(\frac{K}{\mu(A)}\right)$. Таким образом, $\Phi(A) \to 0$ при $\mu(A) \to 0+$, а потому $\Phi \ll \mu$. Пусть $\frac{d\Phi}{d\mu} = f$. Для доказательства того, что $f \in L_M$, используем теорему о дифференцировании функции множества в абстрактном пространстве [3]. Пусть $\{\mathfrak{M}_n = \{A_{nk}; k \geqslant 1\}, n \geqslant 1\} \subset \mathfrak{B}$ — регулярная последовательность сетей [3]. Рассмотрим следующую поледовательность простых функций ($x \in A_{nk}$):

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\Phi(A_{nk})}{\mu(A_{nk})}, & \mu(A_{nk})>0,\\ +\infty, & \mu(A_{nk})=0,\ \Phi(A_{nk})\geqslant 0,\\ -\infty, & \mu(A_{nk})=0,\ \Phi(A_{nk})<0.\end{cases}$$

Согласно теореме 15.7 [3] $f_n \to f \pmod{\mu}$, $n\to\infty$. Согласно условиям теоремы 1 $M(f_n)\to M(f) \pmod{\mu}$, $n\to\infty$;

$$\int\limits_X M(f_n)\,d\mu=\sum_{k:\mu(A_{nk})>0} M\left(\frac{\Phi(A_{nk})}{\mu(A_{nk})}\right)\cdot\mu(A_{nk})\leqslant K.$$

Поэтому в силу леммы Фату $f\in L_M$. Теорема 1 доказана.

3. При некоторых дополнительных условиях класс множеств, для которых требуется выполнение неравенства (1), можно выбрать более узким. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{P}$ — полукольцо подмножеств пространства (X,ρ) такое, что: 1) $\sigma(\mathfrak{P})=\mathfrak{B}$ и 2) для X существует счетное покрытие множествами из $\mathfrak{P}$. Тогда для любой меры ν на $\mathfrak{B}$,

$$\forall A\in\mathfrak{B}\ \ \nu(A)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)\mid A_k\in\mathfrak{P},\ k\geqslant 1,\ A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right\}.$$

Лемма 2. Предположим, что выполнены условия леммы 1. Пусть Φ — конечный заряд, а μ — конечная мера на $\mathfrak{B}$. Тогда $\Phi\ll\mu \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall n\geqslant 1.\ \forall\{A_1,\dots,A_n\}\subset\mathfrak{P}$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)\leqslant\delta\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}\Phi(A_k)\right|\leqslant\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость известна [4]. Для доказательства достаточности сначала заметим, что $\forall A\in\mathfrak{B}$ значения $\mu(A)$, $\Phi^+(A)$, $\Phi^-(A)$ можно получить в виде

$$\mu(A)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu({}^1A_k^m),\quad \Phi^+(A)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Phi^+({}^2A_k^m),$$

$$\Phi^-(A)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Phi^-({}^3A_k^m),$$

$${}^iA_k^m\in\mathfrak{P},\quad {}^iA_k^m\cap{}^iA_j^m=\varnothing,\quad k\neq j,\quad k,j\geqslant 1,$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}{}^iA_k^m\supset A,\quad m\geqslant 1;\qquad i=1,2,3.$$

Пусть счетный набор попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{P}$ определен для каждого $m\geqslant 1$, $C_{j,k,l}^m={}^1A_j^m\cap{}^2A_k^m\cap{}^3A_l^m$, $j,k,l\geqslant 1$

тогда

$$\nu(A) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \nu(C^m_{j,k,l}), \tag{2}$$

где ν любая из мер: μ, Φ^+, Φ^-.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, $\delta > 0$ — число, соответствующее ε по условию леммы 2, и $A \in \mathfrak{B}$ с $\mu(A) < \frac{\delta}{2}$. Тогда для значений $\mu(A)$, $\Phi(A)$ имеет место представление (2). Пусть m_0 такое, что $\forall m \geqslant m_0$: $\sum_{j,k,l=1}^{\infty} \mu(C^m_{j,k,l}) \leqslant \delta$, тогда $\forall m \geqslant m_0$: $\left| \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \Phi(C^m_{j,k,l}) \right| \leqslant \varepsilon$. С учетом (2) $|\Phi(A)| \leqslant \varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{P}$—полукольцо подмножеств пространства (X, ρ) такое, что: 1) $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{B}$ и 2) для любого $\lambda > 0$ существует представление $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in \mathfrak{P}$, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$, $d(A_k) \leqslant \lambda$, $j, k \geqslant 1$ ($d(A)$ — диаметр множества A). На $\mathfrak{B}$ заданы конечный заряд Φ и конечная мера μ, удовлетворяющие условию $\forall A \in \mathfrak{P}$, $A \neq \varnothing : \mu(A) \neq 0$. Для того чтобы $\Phi \ll \mu$ и $\frac{d\Phi}{d\mu} = f \in L_M$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $K \in \mathbf{R}$ и любого набора $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathfrak{P}$, $A_k \neq \varnothing$, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$, $1 \leqslant k, j \leqslant n$ выполнялось неравенство $\sum_{k=1}^{n} M\left(\frac{\Phi(A_k)}{\mu(A_k)}\right) \cdot \mu(A_k) \leqslant K$.

Доказательство. Необходимость устанавливается так же, как соответствующая часть теоремы 1. Для проверки достаточности показываем, как и в теореме Медведева [2], абсолютную непрерывность Φ относительно μ. Проверка того, что $f \in L_M$, совпадает с доказательством теоремы 1 с тем отличием, что теорему о дифференцировании можно применить к регулярной последовательности сетей, ячейками которых являются элементы полукольца $\mathfrak{P}$.

Аналогично теореме 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{P}$ — полукольцо, удовлетворяющее условиям теоремы 2; Φ — конечный заряд, а μ — конечная мера на $\mathfrak{B}$. Для того чтобы $\Phi \ll \mu$ и $\frac{d\Phi}{d\mu} = f \in L_\infty(X)$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists K \in \mathbf{R}$: $\forall A \in \mathfrak{P} : |\Phi(A)| \leqslant K\mu(A)$.

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., 1957. 552 с. 2. *Медведев Ю. Т.* Обобщение одной теоремы Ф. Рисса.— Успехи мат. наук, 1953, 8, 6, с. 115—118. 3. *Сакс С.* Теория интеграла. М., 1949. 494 с. 4. *Халмош П.* Теория меры. М., 1953. 291 с.

Поступила в редколлегию 30.04.82