УДК 519.21

А. С. БАБАНИН, студ.
Киевский университет

ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА АРКТАНГЕНСА

В настоящей статье доказана предельная теорема для решений систем линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых являются независимыми случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями. Для одинаковых дисперсий эта задача исследована в работе [1].

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\Xi_n \vec{x}_n = \vec{\eta}_n, \tag{1}$$

где $\Xi_n = (\xi_{ij}^{(n)})$, $i, j = \overline{1, n}$ — действительная матрица n-го порядка, $\vec{\eta}_n = (\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)})$ — случайный вектор, $\vec{x}_n$ — решение системы.

Если $\det \Xi_n \neq 0$, то решение системы (1) существует и равно $\vec{x}_n = \Xi_n^{-1}\vec{\eta}_n$.

В случае $\det \Xi_n = 0$ решение может и не существовать. Однако при широких предположениях из теоремы 6.3.2 [1] следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|\det \Xi_n| > \varepsilon\} = 1.$$

Поэтому с вероятностью, близкой к 1, при достаточно больших n удобно считать все компоненты $x_k^{(n)} = \infty$, если $\det \Xi_n = 0$.

Теорема. Пусть для каждого значения n случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $\eta_i^{(n)}$, $i, j = \overline{1, n}$ независимы, $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(n)} = \mathbf{M}\eta_i^{(n)} = 0$, $0 < c < \mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)}$, $\mathbf{D}\eta_i^{(n)} < C < \infty$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^2 = \sigma_i^2\sigma_j^2$, $\mathbf{D}\eta_i^{(n)} = \delta_i^2$ для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_{n,i,j} \mathbf{M}\,[|\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} + |\eta_i^{(n)}|^{4+\delta}] < \infty.$$

Тогда $2^{-1} + \pi^{-1}\operatorname{arctg}(zcC^{-1}) < \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\{x_k^{(n)} < z\} < \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\{x_k^{(n)} < z\} < 2^{-1} + \pi^{-1}\operatorname{arctg}(zCc^{-1})$.

Доказательство. Очевидно, что

$$x_k^{(n)} = (\Sigma_{i=1}^n \eta_i^{(n)}\alpha_{ik}/\Sigma_{i=1}^n \xi_{ij}^{(n)}\beta_{ik}),$$

где Ξ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\xi_{ij}^{(n)}$,

$$\alpha_{ik} = (\Xi_{ik}/\sqrt{\Sigma_{i=1}^{n}\sigma_{ij}^2\Xi_{ik}^2}),$$

$$\beta_{ik} = (\Xi_{ik}/\sqrt{\Sigma_{i=1}^{n}\delta_{i}^2\Xi_{ik}^2})$$

при выполнении условий $\det\Xi_n \neq 0$, $\Sigma_{i=1}^{n}\delta_{ij}^2\Xi_{ik}^2 \neq 0$, $\Sigma_{i=1}^{n}\delta_{i}^2\Xi_{ik}^2 \neq 0$. Обозначим $\widetilde{\xi}_{ij}^{(n)} = (\xi_{ij}^{(n)}/\sigma_{ij})$. Тогда

$$|\det\Xi_n| = \left|\det\begin{bmatrix}\widetilde{\xi}_{11}^{(n)}\sigma_{11} & \dots & \widetilde{\xi}_{1n}^{(n)}\sigma_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \widetilde{\xi}_{n1}^{(n)}\sigma_{n1} & \dots & \widetilde{\xi}_{nn}^{(n)}\sigma_{nn}\end{bmatrix}\right|$$

не стремится к нулю по вероятности при $\mathbf{M}\widetilde{\xi}_{ij}^{(n)} = 0$, $\mathbf{D}\widetilde{\xi}_{ij}^{(n)} = 1$. Далее,

$$|\det\Xi_n| = \left|\det\begin{bmatrix}\widetilde{\xi}_{11}^{(n)}\sigma_1\sigma_1 & \dots & \widetilde{\xi}_{1n}^{(n)}\sigma_1\sigma_n\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \widetilde{\xi}_{1n}^{(n)}\sigma_1\sigma_n & \dots & \widetilde{\xi}_{nn}^{(n)}\sigma_n\sigma_n\end{bmatrix}\right| =$$

$$= \left|\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n\det\begin{bmatrix}\widetilde{\xi}_{11}^{(n)}\sigma_1 & \dots & \widetilde{\xi}_{1n}^{(n)}\sigma_n\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \widetilde{\xi}_{n1}^{(n)}\sigma_2 & \dots & \widetilde{\xi}_{nn}^{(n)}\sigma_n\end{bmatrix}\right| = |\sigma_1^2\sigma_2^2\dots\sigma_n^2\det(\widetilde{\xi}_{ij}^{(n)})| \sim$$

$$\sim (n!/c^n)\,e^{-\varepsilon c'_n} \sim n!\,e^{-\varepsilon c'_n},$$

где $\Pi_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \geqslant c^n$, c'_n — любая положительная последовательность, удовлетворяющая условиям $c_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n/\ln n) = \infty$.

Из следствия 6.3.1 [1] вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\Xi_{ik}^2 \geqslant (n-1)!\,e^{-\varepsilon c'_n}\} = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{x_k^{(n)} < z\} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{x_k^{(n)} < z/\Xi_{ik}^2 > \varepsilon\}. \quad (2$$

Используя теорему 6.3.1 [1] при условии $\min(\delta_i^2\Xi_{ik}^2, \sigma_{ij}^2\Xi_{ik}^2) >$ получим $x_k^{(n)} \sim (\Sigma_{i=1}^{n}\nu_i\alpha_{ik}/\Sigma_{i=1}^{n}\nu_{ik}\beta_{ik})$, где ν_i, ν_{ik}, $i,k = \overline{1,n}$ — случайные величины, не зависящие от Ξ_n, $\vec{\eta}_n$ и распределенные по $N(0, 1$ Отсюда и из (2)

$$(\Sigma_{i=1}^{n}\nu_i c/\Sigma_{i=1}^{n}\nu_{ik}C) < \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{x_k^{(n)} < z\} < \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{P}\{x_k^{(n)} < z\} <$$

$$< (\Sigma_{i=1}^{n} \nu_i C / \Sigma_{i=1}^{n} \nu_{ik} c).$$

На основании теоремы 15.1.1 [1] получим требуемое утверждение.

1. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов. Киев, 1980. 368 с.

Поступила в редколлегию 07.12.81

УДК 519.21

А. Д. БОРИСЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

В статье получено вероятностное представление решения задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами и выведен аналог известного закона арксинуса для диффузионного процесса с кусочно постоянным коэффициентом диффузии и нулевым сносом. Аналогичные результаты приведены в работе [1] для уравнения с достаточно гладкими коэффициентами.

Пусть пространство R^n разделено непересекающимися гиперплоскостями γ_j, $j = \overline{1, r-1}$ на области Ω_i, $i = \overline{1, r}$. Обозначим через $\overline{C}_x^l$ класс функций, производные которых по x порядка $[l]$ ограничены и гельдеровы с показателем $l - [l]$ в каждой $\overline{\Omega}_i$.

Положим

$$S = \gamma \times [0, T], \quad \gamma = \bigcup_{j=1}^{r-1} \gamma_j, \quad U_i(t, x) = U(t, x)|_{x \in \Omega_i}.$$

Рассмотрим задачу Коши в $R_T^n = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in R^n\}$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(t, x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} U(t, x) + i\lambda c(x) U(t, x) = 0; \tag{1}$$

$$\lim_{t \uparrow T} U(t, x) = F(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(x) \sigma_{jk}(x)$.

Пусть $b_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, $c(x) \in \overline{C}_x^{\beta}$, $0 < \beta < 1$, и в каждой области $\overline{\Omega}_i$ выполняется условие равномерной параболичности. Найдем вероятностное представление функции $U(t, x)$, удовлетворяющей уравне-