$$< (\Sigma_{i=1}^{n} \nu_i C / \Sigma_{i=1}^{n} \nu_{ik} c).$$

На основании теоремы 15.1.1 [1] получим требуемое утверждение.

1. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов. Киев, 1980. 368 с.

Поступила в редколлегию 07.12.81

УДК 519.21

А. Д. БОРИСЕНКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АДДИТИВНОГО ФУНКЦИОНАЛА ОТ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

В статье получено вероятностное представление решения задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами и выведен аналог известного закона арксинуса для диффузионного процесса с кусочно постоянным коэффициентом диффузии и нулевым сносом. Аналогичные результаты приведены в работе [1] для уравнения с достаточно гладкими коэффициентами.

Пусть пространство R^n разделено непересекающимися гиперплоскостями γ_j, $j = \overline{1, r-1}$ на области Ω_i, $i = \overline{1, r}$. Обозначим через $\overline{C}_x^l$ класс функций, производные которых по x порядка $[l]$ ограничены и гельдеровы с показателем $l - [l]$ в каждой $\overline{\Omega}_i$.

Положим

$$S = \gamma \times [0, T], \quad \gamma = \bigcup_{j=1}^{r-1} \gamma_j, \quad U_i(t, x) = U(t, x)|_{x \in \Omega_i}.$$

Рассмотрим задачу Коши в $R_T^n = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in R^n\}$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(t, x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} U(t, x) + i\lambda c(x) U(t, x) = 0; \tag{1}$$

$$\lim_{t \uparrow T} U(t, x) = F(x), \tag{2}$$

где $a_{ij}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(x) \sigma_{jk}(x)$.

Пусть $b_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, $c(x) \in \overline{C}_x^\beta$, $0 < \beta < 1$, и в каждой области $\overline{\Omega}_i$ выполняется условие равномерной параболичности. Найдем вероятностное представление функции $U(t, x)$, удовлетворяющей уравнению (1) в области $R_T^n \setminus S$, начальному условию (2) при $t = T$ условиям сопряжения

$$U_i(t, x) = U_{i+1}(t, x), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} U_i(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_k} U_{i+1}(t, x) \tag{3}$$

при $(t, x) \in \gamma_i \times [0, T]$, $k = \overline{1, n}$.

Существование и единственность решения задачи (1)—(3) установлены в работе [2].

Теорема 1. Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют выше перечисленным условиям и функция $F(x) \in \bar{C}_x^{2+\beta} \cap C^1$, то решение задачи (1) — (3) можно представить в виде

$$U(t, x) = M_{t,x}\left[F(\xi(T)) \exp\left\{i\lambda \int_t^T c(\xi(s))\, ds\right\}\right], \tag{4}$$

где $\xi(t)$ — решение стохастического уравнения

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t b(\xi(s))\, ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))\, dw(s), \tag{5}$$

$\sigma(x)$ — матрица с элементами $\sigma_{ij}(x)$; $b(x) = \{b_1(x), \ldots, b_n(x)\}$; $w(s)$ — n-мерный винеровский процесс.

Доказательство. При сделанных предположениях относительно функций $\sigma_{ij}(x)$, $b_i(x)$ доказано [3], что решение $\xi(s)$ стохастического уравнения (5) существует, единственно и является марковским процессом с переходной вероятностью $P(s, x, A)$. Аналогично тому, как это сделано в работе [4], устанавливаем, что функция (4) удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(t, x) = \int_{R^n} F(y) P(T-t, x, dy) + i\lambda \int_t^T ds \int_{R^n} c(y) U(s, y) P(s-t, x, dy). \tag{6}$$

Покажем, что функция $U(t, x)$ будет единственным ограниченным решением уравнения (6). Пусть имеется два ограниченных решения уравнения (6) $U_1(t, x)$ и $U_2(t, x)$. Положим $U_0(t, x) = U_1 - U_2$. Находим

$$|U_0(t, x)| \leqslant |\lambda| \int_t^T ds \int_{R^n} |c(y) U_0(s, y)| P(s-t, x, dy) \leqslant CK|\lambda|(T-t),$$

$$|U_0(t, x)| \leqslant CK|\lambda|^2 \int_t^T ds \int_{R^n} |c(y)|(T-s) P(s-t, x, dy) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} C^2 K |\lambda|^2 (T-t)^2.$$

На n-м шаге получаем оценку $|U_0(t, x)| \leqslant \frac{1}{n!} KC^n |\lambda|^n (T-t)^n$, откуда следует, что $U_0(t, x) \equiv 0$.

Согласно [5] к процессу $U(t, \xi(t))$, где $\xi(t)$ — решение уравнения (5), можно применить формулу Ито

$$U(T, \xi(T)) = U(t, \xi(t)) + \int_t^T \left[\frac{\partial}{\partial s} U(s, \xi(s)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi(s)) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U(s, \xi(s)) + \sum_{i=1}^n b_i(\xi(s)) \frac{\partial}{\partial x_i} U(s, \xi(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_t^T \sum_{i,k=1}^n \sigma_{ik}(\xi(s)) \frac{\partial}{\partial x_i} U(s, \xi(s))\, dw_k(s),$$

где $w_k(s)$ — независимые одномерные винеровские процессы. Обозначим левую часть уравнения (1) через $L(t, x)$. Интегрируя последнее равенство по мере $P(s-t, x, A)$ и используя теорему Фубини, получаем

$$U(t, x) = \int_{R^n} F(y) P(T-t, x, dy) + i\lambda \int_t^T ds \int_{R^n} c(y) U(s, y) P(s-t, x, dy) -$$

$$- M_{t,x} \int_t^T L(s, \xi(s))\, ds.$$

Из условий теоремы и оценки [6, гл. 2, §2] следует, что последнее слагаемое равно нулю. Значит, решение задачи (1)—(3) является решением интегрального уравнения (6). В силу единственности ограниченного решения уравнения (6) теорема доказана.

Рассмотрим процесс $\eta(t)$—решение стохастического уравнения

$$\eta(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\eta(s))\, dw(s), \quad \bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_1}, & x > 0, \\ \sqrt{\sigma_2}, & x < 0. \end{cases}$$

Для этого процесса справедлив аналог закона арксинуса.

Теорема 2. Распределение времени, проведенного процессом $\eta(s)$ на положительной полуоси до момента t, задается формулой

$$P\{\tau_t < x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x\sigma_1}{\sigma_2 t - x(\sigma_2 - \sigma_1)}}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ 1, & x > t. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $c(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)$. Функционал $\tau_t = \int_0^t c(\eta(s))\, ds$ представляет собой время, которое процесс $\eta(s)$

провел на полупрямой $(0, \infty)$ до момента t. Найдем распределе[ние] τ_t. Согласно теореме 1 функция

$$U(s, x) = M_{s,x}\left[\exp\left\{i\lambda \int\limits_s^t c(\eta(v))\,dv\right\}\right]$$

при $s \in (0, t)$, $x \in R \setminus \{0\}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s} U(s, x) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(s, x) + i\lambda c(x) U(s, x) = 0,$$

начальному условию $\lim\limits_{s\uparrow t} U(s, x) = 1$ и условиям сопряжения

$$U(s, +0) = U(s, -0), \quad \frac{\partial}{\partial x} U(s, +0) = \frac{\partial}{\partial x} U(s, -0).$$

Положим $W(t-s, x) = U(s, x)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} W(s, x) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(s, x) + i\lambda c(x) W(s, x),$$

$$\lim_{s\downarrow 0} W(s, x) = 1, \tag{7}$$

$$W(s, +0) = W(s, -0), \quad \frac{\partial}{\partial x} W(s, +0) = \frac{\partial}{\partial x} W(s, -0).$$

Найдем функцию $W(s, x)$, применяя преобразование Лапласа по s. Обозначим $V(p, x) = \int\limits_0^\infty \exp\{-ps\} W(s, x)\,ds$. Умножая уравнение (7) на $\exp\{-ps\}$ и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(p, x) + [i\lambda c(x) - p] V(p, x) = -1, \quad x \in R \setminus \{0\}, \tag{8}$$

и условия сопряжения

$$V(p, +0) = V(p, -0), \quad \frac{\partial}{\partial x} V(p, +0) = \frac{\partial}{\partial x} V(p, -0).$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$V(p, x) = K_1 \exp\left\{x\sqrt{\frac{2(p-i\lambda)}{\sigma_1}}\right\} + K_2 \exp\left\{-x\sqrt{\frac{2(p-i\lambda)}{\sigma_1}}\right\} + (p - i\lambda)^{-1}, \quad x > 0;$$

$$V(p, x) = K_3 \exp\left\{x\sqrt{\frac{2p}{\sigma_2}}\right\} + K_4 \exp\left\{-x\sqrt{\frac{2p}{\sigma_2}}\right\} + p^{-1}, \quad x < 0.$$

Из теоремы 1 следует, что $V(p, x)$ будет ограниченной функцией, значит, $K_1 = K_4 = 0$.

Постоянные K_2 и K_3 определим из условий сопряжения

$$K_2 + (p - i\lambda)^{-1} = K_3 + p^{-1}, \quad -K_2 \sqrt{\frac{2(p - i\lambda)}{\sigma_1}} = K_3 \sqrt{\frac{2p}{\sigma_2}}.$$

Отсюда $K_3 = i\lambda\,[p(p - i\lambda)(1 + \sqrt{\sigma_1 p\,[\sigma_2(p - j\lambda)]^{-1}}\,)]^{-1}$. Заметим, что $U(0, 0) = W(t, 0)$ является характеристической функцией τ_t, значит, достаточно знать $V(p, 0)$. Имеем

$$V(p, 0) = p^{-1} + i\lambda\,[p(p - i\lambda)(1 + \sqrt{\sigma_1 p\,[\sigma_2(p - i\lambda)]^{-1}}\,)]^{-1} =$$

$$= (p - \beta)^{-1} - \alpha\beta\,[p(p - \beta)]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{i\lambda}{p}\right)^k,$$

где $\alpha = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2^{-1}}$, $\beta = i\lambda(1 - \alpha^2)^{-1}$.

Найдем оригинал, соответствующий изображению $V(p, 0)$:

$$W(t, 0) = \exp\{\beta t\} - 2\alpha\beta\pi^{-1} \int_0^t \int_0^{\pi/2} \exp\{\beta(t - s) + i\lambda s \sin^2\varphi\}\, d\varphi ds =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^t \exp\{i\lambda y\}\, d\left[\arcsin \sqrt{\frac{y\sigma_1}{\sigma_2 t - y(\sigma_2 - \sigma_1)}}\right].$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Очевидно, при $\sigma_1 = \sigma_2$ получим известный закон арксинуса.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов М., 1975, т. 3. 496 с. 2. *Житарашу Н. В.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1966, **169**, № 3, с. 511—514. 3. *Гирсанов И. В.* О стохастическом уравнении Ито.— Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 1, с. 18—21. 4. *Дынкин Е. Б.* Функционалы от траекторий марковских случайных процессов.— Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 5, с. 691—694. 5. *Гирсанов И. В.* Стохастические уравнения Ито и некоторые их обобщения.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. совещания по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1962, с. 133—142. 6. *Крылов Н. А.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977. 400 с.

Поступила в редколлегию 11.12.81

УДК 519.21

В. В. БУЛДЫГИН, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

1. Пусть на конечном (или счетном) параметрическом множестве **T** заданы две центрированные гауссовские случайные функции $\xi = (\xi(t), t \in \mathbf{T})$, $\zeta = (\zeta(t), t \in \mathbf{T})$. Согласно неравенству Слепяна [1]