Постоянные K_2 и K_3 определим из условий сопряжения

$$K_2 + (p - i\lambda)^{-1} = K_3 + p^{-1}, \quad -K_2 \sqrt{\frac{2(p-i\lambda)}{\sigma_1}} = K_3 \sqrt{\frac{2p}{\sigma_2}}.$$

Отсюда $K_3 = i\lambda\,[p\,(p - i\lambda)\,(1 + \sqrt{\sigma_1 p\,[\sigma_2\,(p - j\lambda)]^{-1}}\,)]^{-1}$. Заметим, что $U(0, 0) = W(t, 0)$ является характеристической функцией τ_t, значит, достаточно знать $V(p, 0)$. Имеем

$$V(p, 0) = p^{-1} + i\lambda\,[p\,(p - i\lambda)\,(1 + \sqrt{\sigma_1 p\,[\sigma_2\,(p - i\lambda)]^{-1}}\,)]^{-1} =$$

$$= (p - \beta)^{-1} - \alpha\beta\,[p\,(p - \beta)]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{i\lambda}{p}\right)^k,$$

где $\alpha = \sqrt{\sigma_1\sigma_2^{-1}}$, $\beta = i\lambda\,(1 - \alpha^2)^{-1}$.

Найдем оригинал, соответствующий изображению $V(p, 0)$:

$$W(t, 0) = \exp\{\beta t\} - 2\alpha\beta\pi^{-1} \int_0^t \int_0^{\pi/2} \exp\{\beta\,(t - s) + i\lambda s \sin^2\varphi\}\, d\varphi ds =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^t \exp\{i\lambda y\}\, d\left[\arcsin \sqrt{\frac{y\sigma_1}{\sigma_2 t - y\,(\sigma_2 - \sigma_1)}}\right].$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Очевидно, при $\sigma_1 = \sigma_2$ получим известный закон арксинуса.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов М., 1975, т. 3. 496 с. 2. *Житарашу Н. В.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами.— Докл. АН СССР, 1966, **169**, № 3, с. 511—514. 3. *Гирсанов И. В.* О стохастическом уравнении Ито.— Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 1, с. 18—21. 4. *Дынкин Е. Б.* Функционалы от траекторий марковских случайных процессов.— Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 5, с. 691—694. 5. *Гирсанов И. В.* Стохастические уравнения Ито и некоторые их обобщения.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. совещания по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1962, с. 133—142. 6. *Крылов Н. А.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977. 400 с.

Поступила в редколлегию 11.12.81

УДК 519.21

В. В. БУЛДЫГИН, канд. физ.-мат. наук
Институт математики АН УССР

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

1. Пусть на конечном (или счетном) параметрическом множестве **T** заданы две центрированные гауссовские случайные функции $\xi = (\xi(t), t \in \mathbf{T})$, $\zeta = (\zeta(t), t \in \mathbf{T})$. Согласно неравенству Слепяна [1] если

$$M\zeta^2(t) = M\xi^2(t), \quad t \in T, \quad M\zeta(t)\zeta(s) \geqslant M\xi(t)\xi(s), \quad t \neq s$$

то для любой вещественной функции $a(t)$, $t \in T$

$$P\{\sup_T (\zeta(t) - a(t)) > 0\} \leqslant P\{\sup_T (\xi(t) - a(t)) > 0\}.$$

В частности, для любого $c > 0$

$$P\{\sup_T \zeta(t) > c\} \leqslant P\{\sup_T \xi(t) > c\}.$$

Неравенство Слепяна и различные его модификации играют ва... роль при изучении гауссовских процессов. Так, при оцени... «хвоста» распределения максимума гауссовского процесса с и... мощью удается получить асимптотически точные оценки для ... рокого класса процессов [2]. Если условие (1) заменить боле... щим условием

$$M|\zeta(t) - \zeta(s)|^2 \leqslant M|\xi(t) - \xi(s)|^2, \quad t, s \in T,$$

то неравенства (2), (3), вообще говоря, не имеют места.

Пример. Пусть $\zeta(t) = \varepsilon\xi(t) + \sigma\gamma$, $t \in T$, где $\varepsilon \in (0, 1)$, σ... а $\gamma - N(0, 1)$-распределенная случайная величина, независима... ξ. Тогда

$$M|\zeta(t) - \zeta(s)|^2 = \varepsilon^2 M|\xi(t) - \xi(s)|^2 < M|\xi(t) - \xi(s)|^2,$$

но при достаточно больших σ и c

$$P\{\sup_T (\varepsilon\xi(t) + \sigma\gamma) > c\} \geqslant P\{\sup \xi(t) > c\}.$$

В работе [3] показано, что при условии (4) неравенство (3) сп... ведливо в среднем, точнее, $M \sup \zeta(t) \leqslant M \sup \xi(t)$.

В предлагаемой статье устанавливается неравенство типа ... справедливое при условии (4), и рассматривается конкретный п... мер, с помощью которого решается задача о построении функц... нального доверительного интервала для оценки ковариацион... функции стационарного гауссовского процесса.

2. Пусть $a(t) \geqslant 0$, $t \in T$.

Теорема 1. Если выполнено неравенство (4), то

$$P\{\sup(|\zeta(t)| - a(t)) > 0\} \leqslant 2P\{\sup(\xi(t) + \gamma g(t) - a(t)) > 0\},$$

где $g^2(t) = \alpha^2 - M\xi^2(t) + M\zeta^2(t)$, $t \in T$; $\alpha^2 = \sup_T(\max(0, M\xi^2(t) - M\zeta^2(t))$, а $\gamma - N(0, 1)$-распределенная случайная величин... независимая от ξ.

Доказательство теоремы 1, кроме неравенства Слепяна, испол... зует неравенство Андерсена [4].

Лемма 1. Пусть X — гауссовский центрированный вектор ... R^n, $n \geqslant 1$; $A \subset R^n$ — выпуклое центрально-симметричное множеств...

Тогда для любого $h \in R^n$

$$\mathbf{P}\{X \in A\} \geqslant \mathbf{P}\{X - h \in A\}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы. Пусть множество $\mathbf{T}$ конечно. Положим $\bar{\zeta}(t) = \zeta(t) + \alpha\gamma$, $\bar{\xi}(t) = \xi(t) + \gamma g(t)$, $t \in \mathbf{T}$. Заметим, что по определению $\alpha^2 \geqslant 0$, $g^2(t) \geqslant 0$, следовательно, $\bar{\zeta}(t)$ и $\bar{\xi}(t)$ являются вещественными центрированными гауссовскими случайными функциями. Случайную величину γ выбираем независимой как от процесса ξ, так и от процесса ζ. Легко показать, что

$$\mathbf{M}|\bar{\zeta}(t)|^2 = \mathbf{M}|\bar{\xi}(t)|^2, \quad t \in \mathbf{T}. \tag{7}$$

Далее, в силу неравенства (4)

$$\mathbf{M}|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)|^2 = \mathbf{M}|\zeta(t) - \zeta(s)|^2 \leqslant \mathbf{M}|\xi(t) - \xi(s)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}|\xi(t) - \xi(s)|^2 + |g(t) - g(s)|^2 = \mathbf{M}|\bar{\xi}(t) - \bar{\xi}(s)|^2.$$

Учитывая (7), устанавливаем, что выполнены условия (1) и по неравенству Слепяна

$$\mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(\bar{\zeta}(t) - a(t)) > 0\} \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(\bar{\xi}(t) - a(t)) > 0\}. \tag{8}$$

Множество $\{x(\cdot) \in R^{\mathbf{T}} : \sup_{\mathbf{T}}(|x(t)| - a(t)) \leqslant 0\}$ является выпуклым центрально-симметричным множеством в $R^{\mathbf{T}}$. В силу неравенства Андерсена

$$\mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\bar{\zeta}(t)| - a(t)) \leqslant 0\} = \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\zeta(t) + \alpha\gamma| - a(t)) \leqslant 0\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\zeta(t) + \alpha u| - a(t)) \leqslant 0\} e^{-u^2/2} du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\zeta(t)| - a(t)) \leqslant 0\} e^{-u^2/2} du =$$
$$= \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\zeta(t)| - a(t)) \leqslant 0\}.$$

Теперь, воспользовавшись неравенством (8) и симметричностью центрированной гауссовской меры, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\zeta(t)| - a(t)) > 0\} \leqslant \mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(|\bar{\zeta}(t)| - a(t)) > 0\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(\bar{\zeta}(t) - a(t)) > 0\} \leqslant 2\mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(\bar{\xi}(t) - a(t)) > 0\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\{\sup_{\mathbf{T}}(\xi(t) + \gamma g(t) - a(t)) > 0\}.$$

Крайние члены в этой цепочке приводят к искомому нера (5). В случае счетного T нужно сделать предельный перехо их частях неравенства. Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия (1), то $g(t) \equiv 0$ венство (5) имеет вид

$$\mathbf{P}\{\sup_{T}(|\zeta(t)| - a(t)) > 0\} \leqslant 2\mathbf{P}\{\sup_{T}(\xi(t) - a(t)) > 0\}.$$

Это неравенство вполне согласуется с неравенством Слепя скольку сомножитель 2 в правой части неизбежен при оценке та» максимума модуля гауссовского процесса в общем сл

Замечание 2. Пусть

$$\varkappa^2 = \sup_{\substack{t,s\in T\\ t\neq s}} \frac{\mathbf{M}|\zeta(t) - \zeta(s)|^2}{\mathbf{M}|\xi(t) - \xi(s)|^2}.$$

Если выполнено условие (4), то $\chi \leqslant 1$. Могут возникнуть ситу когда $\varkappa < 1$. В этом случае неравенство (5) уточняется, если то $\xi(t)$ подставить $\varkappa\xi(t)$.

Возвращаясь к примеру п. 1, видим, что $\chi = \varepsilon$ и неравенств с учетом замечания 2 дает точную оценку.

Замечание 3. Пусть параметрическое множество T является парабельным метрическим пространством. Тогда теорема 1 оста верной, если $(\xi(t),\ t\in T)$, $(\zeta(t),\ t\in T)$ — сепарабельные цен рованные гауссовские поля, а $(a(t),\ t\in T)$ — непрерывная функ

3. Рассмотрим одно следствие теоремы 1. Пусть $(\xi(t),\ t \in$ $\tau])$ — стационарный центрированный гауссовский процесс с ничной дисперсией и конечным вторым спектральным момен ω^2; $(\zeta(t),\ t\in[0,\tau])$ — центрированный сепарабельный гауссовс процесс, такой что $\sup_{t\in[0,\tau]} \mathbf{M}\zeta^2(t) \leqslant \Delta^2 < \infty$ и выполнено неравенство

Теорема 2. Для любого $c > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,\tau]}|\zeta(t)| > c\} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\tau\omega}{2\pi}\right)e^{-c^2/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2/2\Delta^2} +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}(1+\Delta^2)}\left(1 + \frac{\tau\omega}{2\sqrt{\pi}}\right)e^{-c^2/2(1+\Delta^2)}. \quad (1$$

Заметим, что подобные оценки при наличии неравенства можно получать, используя общее неравенство Ферника [3, с. 9 или различные его модификации и уточнения. Однако неравенст (10) более точное.

Доказательство. Если $g(t)$ — функция, определенн в теореме 1, то положим $g_+ = \sup_{t\in[0,\tau]} g(t)$, $g_- = \inf_{t\in[0,\tau]} g(t)$. Легко по казать, что $g_+ \leqslant \Delta$. Считая $a(t) \equiv c$ и используя неравенство (5) простые оценки, получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,\tau]}|\zeta(t)| > c\} \leqslant 2\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,\tau]}(\xi(t) + \gamma g(t)) > c\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int\limits_0^\infty \left[\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,\tau]}\xi(t)>c-ug_+\right\}+\mathbf{P}\left\{\sup\xi(t)>c+ug_-\right\}\right]\times\right.$$

$$\left.\times e^{-u^2/2}du\right]\leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,\tau]}\xi(t)>c\right\}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{c/\Delta}\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,\tau]}\xi(t)>c-u\Delta\right\}\times$$

$$\times e^{-u^2/2}du+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{c/\Delta}^\infty e^{-u^2/2}du.$$

Если $N_b[0,\tau]$ — число пересечений снизу вверх уровня $b\geqslant 0$ процессом $\xi(t)$ за время $[0,\tau]$, то в силу формулы Райса

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,\tau]}\xi(t)>b\right\}\leqslant \mathbf{P}\left\{\xi(0)>b\right\}+\mathbf{P}\left\{N_b[0,\tau]\geqslant 1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_b^\infty e^{-u^2/2}du+\mathbf{M}N_b[0,\tau]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_b^\infty e^{-u^2/2}du+\frac{\tau\omega}{2\pi}e^{-b^2/2}.$$

Отметим, что полученная оценка сверху является асимптотически точной [2]. Подставляя ее в установленное выше неравенство, после ряда простых преобразований, вычислений и оценок приходим к искомому неравенству. Теорема 2 доказана.

4. Следующая статистическая задача является примером, где полученные оценки могут оказаться полезными. Пусть на интервале $[0, H_0+H]$ наблюдается центрированный стационарный выборочно непрерывный гауссовский процесс $\xi(t)$ с неизвестной корреляционной функцией $R(h)$; $M\xi^2(t)\equiv 1$. Через $f(\lambda)$ обозначим спектральную плотность процесса $\xi(t)$. Одной из классических задач статистики случайных процессов является оценивание корреляционной функции $R(h)$ по наблюдениям за одной реализацией процесса. В качестве оценки часто выбирают функцию

$$\hat{R}_H(h)=\frac{1}{H}\int\limits_0^H\xi(t+h)\xi(t)\,dt,\quad h\in[0,H_0].$$

Асимптотические свойства оценки $\hat{R}_H(h)$ в пространстве непрерывных функций $C[0, H_0]$ при $H\to\infty$ изучались в работах [5—7]. В этих работах установлены ограничения на процесс $\xi(t)$, при которых распределения процессов $\zeta_H(h)=\sqrt{H}(\hat{R}_H(h)-R(h))$, $h\in[0,h_0]$ сходятся (в смысле слабой сходимости мер) в пространстве $C[0,H_0]$ к распределению гауссовского центрированного процесса $(\zeta(h), h\in[0,H_0])$ с корреляционной функцией

$$B(h_1,h_2)=4\pi\int\limits_{-\infty}^\infty\cos\lambda h_1\cos\lambda h_2 f^2(\lambda)\,d\lambda.$$

Естественно возникает вопрос об оценке хвостов распредел максимума модуля процесса $\zeta(h)$, поскольку

$$\mathbf{P}\{\sup_{h\in[0,H_0]}\sqrt{H}\,|\hat{R}_H(h)-R(h)|>c\}\xrightarrow[H\to\infty]{}\mathbf{P}\{\sup_{h\in[0,H_0]}|\zeta(h)|>c\},$$

и появляется возможность построения равномерного по h дов тельного интервала для оценки $\hat{R}(h)$. Заметим, что

$$\mathbf{M}|\zeta(h_1)-\zeta(h_2)|^2=4\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\cos\lambda h_1-\cos\lambda h_2|^2 f^2(\lambda)\,d\lambda\leqslant 8\pi\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}f^2(\lambda)\,d\lambda\leqslant 8\pi C\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}f(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=4\pi C\mathbf{M}|\xi(h_1)-\xi(h_2)|^2,$$

где $C=\sup_{\lambda\in R}f(\lambda)$. Кроме того, $\mathbf{M}|\zeta(h)|^2\leqslant 4\pi C\mathbf{M}|\xi(h)|^2$. Теперь учетом теоремы 2 можно заключить, что для всех $x>0$

$$\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\mathbf{P}\{\sup_{h\in[0,H_0]}\sqrt{H}\,|\hat{R}_H(h)-R(h)|>2\sqrt{\pi C}x\}}{G(H_0,x)}\leqslant 1,$$

где $G(H_0, x)$ — функция, стоящая в правой части неравенства (10) при $\tau=H_0$, $\Delta=1$, $\omega^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 f(\lambda)\,d\lambda$.

1. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for Gaussian noise.— Bell. System Techn. J., 1962, **41**, N 2, p. 463—501. 2. *Питербарг В. И.* Асимптотические разложения для вероятностей больших выбросов гауссовских процессов.— Докл. АН СССР, 1978, **242**, № 6, с. 1248—1251. 3. *Ферник К.* Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Математика/Новое в зарубежной науке. М., 1978, т. 10. с. 63—132. 4. *Anderson T. W.* The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalites.— Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, N 2, p. 170—176. 5. *Банина О. П., Островский Е. И.* Инвариантные статистики и доверительные интервалы для корреляционной функции гауссовского процесса в различных метриках.— В кн.: Материалы Всесоюз. симпоз. по статистике случайных процессов. Киев, 1974, с. 148—149. 6. *Иванов А. В.* Одна предельная теорема для оценки корреляционной функции.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1978, вып. 19, с. 76—81. 7. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* О сходимости распределения функционалов от оценки корреляционной функции.— Лит. мат. сб., 1978, **16**, № 4, с. 35—44.

Поступила в редколлегию 09.06.81