УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, д-р физ.-мат. наук
Киевский университет

О КРУГОВОМ ЗАКОНЕ

Одной из нерешенных задач спектральной теории несимметричных случайных матриц является задача описания общего вида предельных нормированных спектральных функций случайных матриц, элементы которых независимы и бесконечно малы. Для симметричных случайных матриц Ξ_n при некоторых дополнительных ограничениях эта задача решена с помощью предельных теорем [1—3] для преобразований Стилтьеса:

$$\int (x-z)^{-1} d\mu_n(x) = n^{-1}\operatorname{Sp}(\Xi_n - Iz)^{-1} =$$

$$= -n^{-1}(\partial/\partial z)\ln\det(\Xi_n - Iz), \quad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

где $\mu_n(x)$ — нормированная спектральная функция матрицы Ξ_n.

Для несимметричных случайных матриц H_n в общем случае применить это преобразование не представляется возможным, так как интегралы $\mathbf{M}\operatorname{Sp}(H_n - I_z)^{-1}$ не всегда существуют.

В этой статье доказано, что с помощью V-преобразования изучение спектральных функций несимметричных случайных матриц можно свести к изучению спектральных функций некоторых эрмитовых случайных матриц.

1. V-Преобразование спектральных функций. Введем нормированные спектральные функции

$$\nu_n(x, y) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\chi_{x,y}(\lambda_k),$$

где $\chi_{x,y}(\lambda_k) = 1$, если $\operatorname{Re}\lambda_k < x$, $\operatorname{Im}\lambda_k < y$, и $\chi_{x,y}(\lambda_k) = 0$ в противном случае; λ_k — собственные числа комплексной квадратной матрицы H_n n-го порядка,

$$\mu_n(x, z) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} F(x - \lambda_k(z)),$$

$F(x) = 1$, если $x > 0$, и $F(x) = 0$, если $x \leqslant 0$, $\lambda_k(z)$ — собственные числа эрмитовой матрицы $(Iz - H_n)(Iz - H_n)^*$, $z = s + it$.

V-Преобразованием спектральной функции $\nu_n(x, y)$ назовем следующее выражение:

$$\iint e^{ipx+iqy}\, d\nu_n(x, y) = (q^2 + p^2)(2ip\pi)^{-1} \times$$

$$\times \iint (\partial/\partial t)\left[\int_0^\infty \ln x\, d\mu_n(x, z)\right] e^{itp+isq}\, dt\, ds, \quad p \neq 0. \qquad (1)$$

Здесь и в дальнейшем, если не указана область интегрирования, то интегрирование ведется по всей области изменения переменных.

При доказательстве предельных теорем для $\nu_n(x, y)$ V-пр... зование используется в следующем виде:

$$m_n(p, q) := (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} db \iint \left| \int_{-c-x}^{c-x} \left[\int_{(-b-y)u^{-1}}^{(b-y)u^{-1}} \operatorname{sign} u (1 + v^2)^{-} \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \times e^{iqvu} dv \right] e^{ipu} du \right] e^{ipx+iqy} d\nu_n(x, y) = (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} db \int_{-c}^{c} \left[\int_0^\infty \ln \ldots \right.$$

$$\left. \times d\mu_n(x, z) e^{itp} \Big|_{t=-b}^{t=b} - \int_{-b}^{b} \left(\int_0^\infty \ln x d\mu_n(x, z) \right) e^{itp} ipdt \right] e^{isq} ds,$$

где c, a, b — некоторые положительные постоянные; под обоз... нием $:=$ будем понимать равенство по определению.

Если для некоторого $\delta > 0$ $\sup_n \mathbf{M} \int_0^\infty (\ln x)^{1+\delta} d\mu_n(x, z) < \ldots$ при доказательстве предельных теорем для $\nu_n(x, y)$ нужно с п... щью преобразования Стилтьеса найти предельную спектральную ф... цию для $\mu_n(x, z)$ и перейти в V-преобразовании к пределу сна... при $n \to \infty$, а потом при $c \to \infty$ и $a \to \infty$.

2. Регуляризованное V- преобразование для спектральных ф... ций. Если для спектральных функций $\mu_n(x, z)$ не выполняется ... ловие

$$\sup_{|z|<c} \sup_n \mathbf{M} \int_0^\infty (\ln x)^{1+\delta} d\mu_n(x, z) < \infty,$$

то вместо формулы (2) нужно пользоваться V-преобразование... регуляризованном виде

$$m_n(p, q) = \gamma_n(p, q) + \varepsilon_n(\alpha),$$

где

$$\gamma_n(p, q) = (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \left\{ \int_{-c}^{c} \left[\int_0^\infty \ln(\alpha + x)\, d\mu_n(x, z)\, e^{itp} \Big|_{t=-b}^{t=b} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-b}^{b} \left(\int_0^\infty \ln(\alpha + x)\, d\mu_n(x, z) \right) e^{itp} ipdt \right] e^{isq} ds \right\},$$

$$\varepsilon_n(\alpha) = m_n(p, q) - \gamma_n(p, q), \quad \alpha > 0.$$

Предположим, что с вероятностью 1 при фиксированном z $\lambda_k(z) > \ldots$ $k = \overline{1, n}$. Используя неравенство $|\ln(\alpha + x) - \ln x| \leqslant (1 + \varepsilon)^{-1} \times (\alpha x)^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $x > 0$, а также то, что функция $-x^{-1}$ при $x \geqslant 0$ выпукла, находим (см. [4, с. 544])

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k(z))^{-1-\varepsilon} \leqslant \sum_{k=1}^n |z - \lambda_k|^{-1-\varepsilon}.$$

В силу этого неравенства для $\varepsilon_n(\alpha)$ справедлива оценка

$$|\varepsilon_n(\alpha)| \leqslant (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \left[\iint \left\{ \int_{-c}^{c} ((|b + is - x - iy|)^{-1-\varepsilon} + \right.\right.$$

$$\left. + (|-b + is - x - iy|)^{-1-\varepsilon}) ds + \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} |z - x - iy|^{-1-\varepsilon} dtds \right\} \times$$

$$\left. \times d\nu_n(x, y) \right] db \leqslant \alpha^{1+\varepsilon} \iint \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + t^2)^{-(1+\varepsilon)/2} dt \times \right.$$

$$\times (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} [(|b-x|)^{-\varepsilon} + |b+x|^{-\varepsilon}]\, db +$$

$$+ (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \int_{-c-y}^{c-y} \int_{-(b-x)u^{-1}}^{(b-x)u^{-1}} (1+v^2)^{-(1+\varepsilon)/2}\, dv u^{-\varepsilon} du \Big\}\, d\nu_n(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{1+\varepsilon} (2\delta)^{-1} c \iint (|a+\delta-x|^{1-\varepsilon} + |a-\delta-x|^{1-\varepsilon})\, d\nu_n(x, y) +$$

$$+ \alpha^{1+\varepsilon} \iint (|c-y|^{1-\varepsilon} + |c+y|^{1-\varepsilon})\, d\nu_n(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{1+\varepsilon} [c_1 + (n^{-1} \mathrm{Sp}\, H_n H_n^*)^{(1-\varepsilon)/2}], \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{3}$$

Для произвольных случайных матриц это неравенство устанавливаем следующим образом. Вместо матрицы H_n рассматриваем матрицу $H_n + \varepsilon\, \Xi_n$, где Ξ_n — квадратная комплексная случайная матрица, у действительных и мнимых частей элементов которой существует плотность распределения. Согласно [2, с. 59] для таких матриц с вероятностью 1 $\lambda_k(z) > 0$ при любом фиксированном z. Поэтому для этих матриц справедливо неравенство (3). Так как собственные числа являются непрерывными функциями элементов матрицы, то, переходя в неравенстве (3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, убеждаемся, что оно справедливо для любых матриц H_n.

3. **Предельные теоремы для преобразований Стилтьеса.** Пусть $\mu_n(x, z)$ — нормированная спектральная функция матрицы $B_n := (Iz - H_n)(Iz - H_n)^*$. Рассмотрим преобразование Стилтьеса:

$$m_n(t) := \mathbf{M} \int_0^\infty (1+tx)^{-2} d\mu_n(x, z) = n^{-1} \mathbf{M}\, \mathrm{Sp}\, (I + tB_n)^{-2}, \quad t \geqslant 0.$$

Лемма. Пусть для каждого значения n элементы $\xi_{pl}^{(n)}$ случайных матриц H_n независимы, $\mathbf{M}\xi_{pl}^{(n)} = 0$, $\mathbf{M}\, |\xi_{pl}^{(n)}|^2 = \sigma^2 n^{-1}$, $0 < \sigma^2 < \infty$ и выполняется условие Линдерберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{p,l=1}^{n} \mathbf{M}\, |\xi_{pl}^{(n)}|^2 \chi(|\xi_{pl}^{(n)}| > \tau) = 0.$$

Тогда

$$m_n(t) = n^{-1} \mathbf{M}\, \mathrm{Sp}\, (I + t(Iz - \Xi_n)(Iz - \Xi_n)^*)^{-2} + o(1), \tag{4}$$

где Ξ_n — случайная матрица, действительные и мнимые части элементов которой независимы и распределены по стандартному нормальному закону.

Доказательство. Пусть b_{ij} — элементы матрицы B_n. Очевидно, что

$$\mathbf{M}\mathrm{Sp}\, (I + tB_n)^{-2} = (\partial/\partial t)\, [t\mathbf{M}\, \mathrm{Sp}\, (I + tB_n)^{-1}],$$

$$\mathrm{Sp}\, (I + tB_n)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} r_{ii}(t),$$

где $r_{ii}(t)$ — элементы матрицы $R := (I + tB_n)^{-1}$.

Для них

$$r_{kk}(t) = \Big[1 + t \sum_{l=1}^{n} |b_{kl}|^2 - t^2 \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}^k \sum_{l,p=1}^{n} \bar{b}_{il}\, b_{kl} b_{jp} b_{kp}\Big]^{-1}, \tag{5}$$

где r_{ij}^k — элементы матрицы $(I+t(Iz-H_n)_k(Iz-H_n)_k^*)^{-1}$, ... ца $(Iz-H_n)_k$ получена из матрицы $(Iz-H_n)$ заменой эл... k-й строки нулями. В этой формуле считаем, что суммирова... дется по всем $i, j=\overline{1,n}$ за исключением $i=j=k$.

Преобразуем (5) к следующему виду:

$$r_{kk}(t)=\Big[1+t\sum_{l=1}^{n}|\xi_{kl}|^2+t|z|^2+t2\mathrm{Re}\,\xi_{kk}z-t^2\sum_{l,p=1}^{n}\xi_{kl}\bar{\xi}_{k\ldots}$$

$$-t^2\mathrm{Re}\,z\sum_{p=1}^{n}\xi_{kp}a_{kp}-t^2|z|^2a_{kk}\Big]^{-1},$$

где $a_{lp}=\sum_{i,j}r_{ij}^k\bar{b}_{il}b_{jp}$.

Запишем (6) в виде

$$r_{kk}(t)=\Big[1+t\sum_{l=1}^{n}|\xi_{kl}|^2+t|z|^2-t^2\sum_{p=1}^{n}|\xi_{kp}|^2a_{pp}-$$

$$-t^2|z|^2a_{kk}+\varepsilon_1\Big]^{-1},$$

где

$$\varepsilon_1=2t\mathrm{Re}\,\xi_{kk}z-t^2\sum_{l\neq p}\xi_{kl}\bar{\xi}_{pp}a_{lp}-t^2\mathrm{Re}\,z\sum_{p=1}^{n}\xi_{kp}a_{kp}.$$

Введем обозначения $K_l=(b_{il}\bar{b}_{jl})_{i,j=1}^n$, $T_p^k=(b_{ip}\bar{b}_{jp})$ — квадра... матрица n-го порядка, у которых k-й столбец и k-я строка и... нулевые элементы. Очевидно, что $a_{pp}=\mathrm{Sp}\,R^k\bar{T}_p^k$, где

$$R^k=\Big(I+t\sum_{l\neq k}K_l\Big)^{-1}=(r_{ij}^k).$$

Используя эти обозначения, представим (7) в виде

$$r_{kk}(t)=\Big[1+t\sum_{l=1}^{n}|\xi_{kl}|^2+t|z|^2-t^2\sum_{p=1}^{n}|\xi_{kp}|^2\times$$

$$\times\mathrm{Sp}\,R^k\bar{T}_p^k-t^2|z|^2\mathrm{Sp}\,R^k\bar{T}_k^k+\varepsilon_1\Big]^{-1}.$$

Обозначим

$$R_p^k(t)=(I+t\sum_{l\neq p}T_l^k)^{-1}=(r_{ij}^k(p)).$$

Рассмотрим равенство

$$\mathrm{Sp}\,R^k(t)\,\bar{T}_p^k=\mathrm{Sp}\,R_p^k(t)\,\bar{T}_p^k+\mathrm{Sp}\,(R^k(t)-R_p^k(t))\,\bar{T}_p^k.$$

Для второго слагаемого (см. [2, с. 256])

$$\mathrm{Sp}\,(R^k(t)-R_l^k(t))\,\bar{T}_l^k=-t\Big(\sum_{i,j}r_{ij}^k(l)\,b_{il}\bar{b}_{jl}\Big)\times$$

$$\times\Big(\sum_{p,q}r_{pq}^k(l)\,b_{pl}\bar{b}_{ql}\Big)[1+t(R_l^k(t)\vec{b}_l,\vec{b}_l)]^{-1},$$

где $\vec{b}_l=(b_{1l},\ i=\overline{1,n})$.

Представим (8) в виде

$$r_{kk}(t)=\Big[1+t(\sigma^2+|z|^2)-t^2\sum_{p=1}^{n}|\xi_{kp}|^2\,\mathrm{Sp}\,R_p^k\bar{T}_p^k+$$

$$+ t^2 \sum_{p=1}^{n} |\xi_{kp}|^2 \left\{ t \left(\sum_{i,j} r_{ij}^k(p) b_{ip} \bar{b}_{jp} \right) \left(\sum_{i,j} r_{ij}^k(p) b_{ip} \bar{b}_{jp} \right) \times \right.$$

$$\left. \times [1 + t(R_p^k(t) \vec{b}_p, \vec{b}_p)]^{-1} \right\} - t^2 |z|^2 \operatorname{Sp} R^k \bar{T}_k^k + \varepsilon_2 \Big]^{-1}, \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_2 = 2t \operatorname{Re} \xi_{kk} z - t^2 \sum_{l \neq p} \xi_{kl} \bar{\xi}_{kp} a_{lp} - t^2 \operatorname{Re} z \sum_{p=1}^{n} \xi_{kp} \times$$

$$\times a_{kp} + t \left(\sum_{l=1}^{n} |\xi_{kl}|^2 - \sigma^2 \right).$$

Представим (9) в виде

$$r_{kk}(t) = \Big[1 + t(\sigma^2 + |z|^2) - t^2 n^{-1} \sigma^2 \sum_{p=1}^{n} \theta_p +$$

$$+ t^2 n^{-1} \sigma^2 \sum_{p=1}^{n} t \theta_p^2 [1 + t\theta_p]^{-1} - t^2 |z|^2 \theta'_p + \varepsilon_3 \Big]^{-1}, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_3 = 2t \operatorname{Re} \xi_{kk} z - t^2 \sum_{l \neq p} \xi_{kl} \bar{\xi}_{kp} a_{lp} - t^2 \operatorname{Re} z \sum_{p=1}^{n} \xi_{kp} a_{kp} +$$

$$+ t \left(\sum_{l=1}^{n} |\xi_{kl}|^2 - \sigma^2 \right) - t^2 \sum_{p=1}^{n} \left(|\xi_{kp}|^2 - n^{-1} \sigma^2 \right) \theta_p +$$

$$+ t^2 \sum_{p=1}^{n} (|\xi_{kp}^2 - n^{-1} \sigma^2) t \theta_p^2 [1 + t\theta_p]^{-1};$$

$$\theta_p = \sum_{i,j} r_{ij}^k(p) b_{ip} \bar{b}_{jp}, \quad \theta'_p = \sum_{i,j} r_{ij}^k b_{ik} \bar{b}_{jk}.$$

Обозначим

$$\theta_p = n^{-1} \sigma^2 \mathbf{M} \operatorname{Sp} R + r_{pp}^k(p) |z|^2 + \delta_n,$$

$$\delta_n = \sum_{i \neq j} r_{ij}^k(p) \xi_{ip} \bar{\xi}_{jp} + 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{n} r_{ip}^k(p) z \bar{b}_{ip} + 2 \operatorname{Re} r_{pp}^k(p) \xi_{pp} z +$$

$$+ \sum_{i \neq k} r_{ii}^k(p) (|\xi_{ip}|^2 - n^{-1} \sigma^2) + n^{-1} \sum_i (r_{ii}^k(p) - r_{ii}) +$$

$$+ n^{-1} \sum_i (r_{ii} - \mathbf{M} r_{ii}),$$

$$\theta'_p = n^{-1} \sigma^2 \mathbf{M} \operatorname{Sp} R + \gamma_n,$$

$$\gamma_n = \sum_{i \neq j} r_{ij}^k \xi_{ik} \bar{\xi}_{jk} + \sum_i r_{ii}^k (|\xi_{ik}|^2 - n^{-1} \sigma^2) + n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (r_{ii}^k - r_{ii}) +$$

$$+ n^{-1} \sum_i (r_{ii} - \mathbf{M} r_{ii}).$$

Представим (10) в виде

$$r_{kk}(t) = \Big[1 + t(\sigma^2 + |z|^2) - t^2 n^{-1} \sigma^2 \sum_{p=1}^{n} (n^{-1} \sigma^2 \mathbf{M} \operatorname{Sp} R +$$

$$+ r_{pp}^k(p) |z|^2 + \delta_n) + t^2 n^{-1} \sigma^2 \sum_{p=1}^{n} t (n^{-1} \sigma^2 \mathbf{M} \operatorname{Sp} R + r_{pp}^k(p) |z|^2 +$$

$$+ \delta_n)^2 [1 + t n^{-1} \sigma^2 \mathbf{M} \operatorname{Sp} R + t r_{pp}^k(p) |z|^2 + \delta_n]^{-1} -$$

$$-t^2|z|^2 n^{-1}\sigma^2 \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R - t^2|z|^2\gamma_n + \varepsilon_3]^{-1}. \qquad (1$$

Запишем теперь (11) так:

$$r_{kk}(t) = \Big[1 + t(\sigma^2 + |z|^2) - t^2 n^{-1}\sigma^2 \sum_{p=1}^{n} (\sigma^2 n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R + \mathbf{M}r_{pp}|z|^2 +$$

$$+\delta_n') + t^2\sigma^2 n^{-1} \sum_{p=1}^{n} (t\sigma^2 n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R + t\mathbf{M}r_{pp}|z|^2 + \delta_n')^2 \times$$

$$\times [1 + t\sigma^2 n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R + t\mathbf{M}r_{pp}|z|^2 + \delta_n']^{-1} - t^2|z|^2 n^{-1}\sigma^2\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R -$$

$$-t^2|z|^2\gamma_n + \varepsilon_3\Big]^{-1}, \qquad (12)$$

где $\delta_n' = \delta_n + |r_{pp}^k(p) - r_{pp}^k + (r_{pp}^k - r_{pp}) + (r_{pp} - \mathbf{M}r_{pp})|$.

Так же, как и в работе [2, с. 256—257], получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\,[|\varepsilon_3| + |\delta_n'|] = 0.$$

Следовательно, в силу равенства $n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R(t) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}r_{kk}$ условия Линдеберга из (12) вытекает

$$n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R = [1 + t(\sigma^2 + |z|^2) - t^2\sigma^2(\sigma^2 + |z|^2)\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,Rn^{-1} +$$

$$+ t^2\sigma^2((t\sigma^2 + t|z|^2)n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R)^2[1 + (t\sigma^2 + t|z|^2)n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R]^{-1} -$$

$$- t^2|z|^2\sigma^2 n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R]^{-1} + o(1).$$

Отсюда получаем (4). Лемма доказана.

4. **Предельные теоремы для V-преобразований спектральны[х] функций случайных матриц.** Используя материал предыдущи[х] пунктов, докажем следующее утверждение, которое называет[ся] круговым законом.

Теорема. Пусть для каждого значения $n = 1, 2, \ldots$ случайны[е] элементы $\xi_{pl}^{(n)}$, $p, l = \overline{1, n}$ комплексной матрицы $H_n = (\xi_{pl}^{(n)})$ независи[]мы, $\mathbf{M}\xi_{pl}^{(n)} = 0$, $\mathbf{M}|\xi_{pl}^{(n)}|^2 = \sigma^2 n^{-1}$, $0 < \sigma^2 < \infty$, $p, l = \overline{1, n}$ и выполн[я]ется условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{p,l=1}^{n} \mathbf{M}|\xi_{pl}^{(n)}|^2 \chi(|\xi_{pl}^{(n)}| > \tau) = 0, \ \sup_n \int_0^\infty \ln^{1+\delta} x\, d\mu_n < \infty$$

Тогда для любого измеримого множества B

$$\mathrm{plim}_{n\to\infty} \nu_n(B) = \sigma^{-2}\pi^{-1} \int_{B\cap(z:\sigma^{-1}|z|<1)} dx\,dy.$$

Доказательство теоремы. Используя регуля[ри]зованное V-преобразование и неравенство (3), устанавливаем

$$\mathbf{M}m_n(p, q) = (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+\delta} db \left\{ \int_{-c}^{c} \left[\int_0^\infty \ln(\alpha + x)\, d\mu(x(\sigma^2 + |z|^2)^{-1}) \times \right.\right.$$

$$\times e^{itp}\Big|_{t=-b}^{t=b} - \int_{-b}^{b} \left(\int_0^\infty \ln(\alpha + x)\, d\mu(x(\sigma^2 + |z|^2)^{-1}) \right) e^{itp} \times$$

$$\times ipdt\Big] e^{isq} ds\Big\} + \delta_n, \tag{13}$$

$$|\delta_n| \leqslant c\alpha^{1+\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \alpha > 0.$$

Но тогда, с учетом (13), [5]

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} m_n(p, q) = (2\delta)^{-1} \int_{a-\delta}^{a+b} db \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} 2t(\sigma^2 + t^2 + s^2)^{-1} \times$$

$$\times \exp(ipt + iqs)\, dtds.$$

Устремив c и a к бесконечности, находим

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \iint \exp(ipx + iqy)\, d\nu_n(x, y) =$$

$$= \pi^{-1} \iint_{\sigma^{-1}(x^2+y^2)<1} \exp(ipx\sigma^{-1} + iqy\sigma^{-1})\, dxdy\sigma^{-2}. \tag{14}$$

Аналогично получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \Big[\iint \exp(ipx + iqy)\, d\nu_n(x, y)\Big]^2 =$$

$$= \Big[\pi^{-1}\sigma^{-2} \iint_{\sigma^{-1}(x^2+y^2)<1} \exp(ipx\sigma^{-1} + iqy\sigma^{-1})\, dxdy\Big]^2. \tag{15}$$

Из (15) и (14) вытекает утверждение теоремы.

Отметим, что для гауссовских матриц круговой закон был доказан в работе [5].

1. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы. Киев, 1975. 448 с. 2. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов. Киев, 1980. 368 с. 3. *Пастур Л. А.* Спектры случайных самосопряженных операторов.— Успехи мат. наук, 1973, 28, № 1, с. 4—63. 4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967. 575 с. 5. *Mehta M. L.* Random matrices and the statistical theory of energy levels. New York; London, 1967. 260 p.

Поступила в редколлегию 16.10.81

УДК 519.24

А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук
Институт кибернетики АН УССР

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1. Пусть (R^N, B^N) — счетное произведение пространств (R^1, B^1), B^1— σ-алгебра борелевских множеств вещественной оси R^1, Θ — открытое множество евклидова пространства R^p; $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$—семейство вероятностных мер на (R^N, B^N), отвечающих последовательностям (п.) случайных величин (с. в.) $x_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j$, $j \geqslant 1$, $\theta \in \Theta$, где x_j — п. независимых наблюдений, ε_j — п. одинаково распределенных с. в., $g(j, \theta)$ — п. функций параметра $\theta = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(p)})$, подлежащего