Л. П. КОНОНЧУК, ст. инж.
НИИАСС

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРА ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В этой статье рассматриваются некоторые оценки корреляционной функции и спектральной плотности однородного в широком смысле случайного поля. Полученные результаты вытекают из обобщения идей Парзена [1, 2], касающихся статистического спектрального анализа стационарных процессов, на случай однородных полей. Некоторые оценки спектральной плотности для однородного гауссовского поля с дискретным двумерным параметром были даны У. Гренандером и М. Розенблаттом [3], а для однородного и изотропного гауссовского поля П. С. Кноповым [4, 5].

Пусть $\xi(t, x)$, $-\infty < t, x < +\infty$ — однородное в широком смысле поле с $M\xi(t, x) = m_\xi = \text{const}$ и непрерывной корреляционной функцией $M[\xi(t, x) - m_\xi][\xi(t+u, x+v) - m_\xi] = R_\xi(u, v)$, которая абсолютно интегрируема:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |R_\xi(u, v)|\, du dv < \infty. \tag{1}$$

Для случайного поля $\xi(t, x)$ будем предполагать выполненными следующие уравнения:

1) моменты четвертого порядка

$$M[\xi(t, x) - m_\xi][\xi(t+u_1, x+v_1) - m_\xi][\xi(t+u_2, x+v_2) - \\ - m_\xi][\xi(t+u_3, x+v_3) - m_\xi] = P_\xi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$$

не зависят от t, x;

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Q_\xi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)|\, du_1 dv_1 du_2 dv_2 du_3 dv_3 < \\ < \infty, \tag{2}$$

где

$$Q_\xi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) = P_\xi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) - \\ - R_\xi(u_1, v_1) P_\xi(u_3 - u_2, v_3 - v_2) - R_\xi(u_2, v_2) R_\xi(u_3 - u_1, v_3 - v_1) - \\ - R_\xi(u_3, v_3) R_\xi(u_2 - u_1, v_2 - v_1)$$

и непрерывна по совокупности переменных.

Из условия (1) вытекает существование спектральной плотности $f_\xi(\omega, \nu)$ случайного поля $\xi(t, x)$, которая является преобразованием Фурье корреляционной функции $R_\xi(u, v)$:

$$f_\xi(\omega, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u - i\nu v} R_\xi(u, v)\, du dv.$$

Пусть имеем выборку значений случайного поля $\xi(t, x)$ для $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant N$. При m_ξ неизвестном обозначим через $m_{T,N}$ оценку для m_ξ по методу наименьших квадратов, а именно:

$$m_{T,N} = \frac{1}{TN} \int_0^T \int_0^N \xi(t, x)\, dt dx. \tag{3}$$

Оценка $m_{T,N}$ является несмещенной, т. е. $Mm_{T,N} = m_\xi$, и состоятельной, т. е. $M(m_{T,N} - m_\xi)^2 \to 0$, при $T, N \to \infty$. Более того, вследствие условия (2)

$$M(m_{T,N} - m_\xi)^4 = O\left(\frac{1}{T^2N^2}\right). \tag{4}$$

Теперь определим функцию

$$I_{T,N}(\omega, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2\, TN} \left| \int_0^T \int_0^N [\xi(t, x) - m_{T,N}]\, e^{-it\omega - ix\nu} dt dx \right|^2, \tag{5}$$

которую можно рассматривать как двумерный аналог периодограммы в случае неизвестного среднего. Оценку корреляционной функции $R_\xi(u, v)$ обозначим через $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$ и определим следующим образом:

$$\widehat{R}_\xi(u, v;\ T, N) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\omega + iv\nu} I_{T,N}(\omega, \nu)\, d\omega d\nu. \tag{6}$$

Эта оценка равна нулю вне области $\{|u| < T, |v| < N\}$, а для $|u| < T$, $|v| < N$

$$\widehat{R}_\xi(u, v;\ T, N) = \begin{cases} \dfrac{1}{TN} \displaystyle\int_0^{T-|u|} \int_0^{N-|v|} [\xi(t, x) - m_{T,N}] \times \\ \times [\xi(t+|u|, x+|v|) - m_{T,N}]\, dt dx, \\ \text{если } \operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn} v; \\ \dfrac{1}{TN} \displaystyle\int_0^{T-|u|} \int_0^{N-|v|} [\xi(t, x+|v|) - m_{T,N}] \times \\ \times [\xi(t+|u|, x) - m_{T,N}]\, dt dx, \\ \text{если } \operatorname{sgn} u \neq \operatorname{sgn} v. \end{cases} \tag{7}$$

Из (6) следует, что $I_{T,N}(\omega, \nu)$ можно представить, как преобразование Фурье оценки $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$, а именно:

$$I_{T,N}(\omega, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-N}^{N} e^{-iu\omega - iv\nu} \widehat{R}_\xi(u, v;\; T, N)\, du dv.$$

Перейдем к изучению оценки $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$, представив ее в виде суммы

$$\widehat{R}_\xi(u, v;\; T, N) = R_\xi(u, v;\; T, N) + \delta_{T,N}(u, v), \tag{8}$$

где

$$R_\xi(u, v;\; T, N) = \begin{cases} \dfrac{1}{TN} \displaystyle\int\limits_0^{T-|u|} \int\limits_0^{N-|v|} [\xi(t, x) - m_\xi] \times \\ \times [\xi(t + |u|, x + |v|) - m_\xi]\, dt dx, \\ \text{если } \operatorname{sgn} u = \operatorname{sgn} v; \\ \dfrac{1}{TN} \displaystyle\int\limits_0^{T-|u|} \int\limits_0^{N-|v|} [\xi(t, x + |v|) - m_\xi] \times \\ \times [\xi(t + |u|, x) - m_\xi]\, dt dx, \\ \text{если } \operatorname{sgn} u \neq \operatorname{sgn} v, \end{cases} \tag{9}$$

а $\delta_{T,N}(u, v)$ определяется так, чтобы (8) было верно.

Величину $R_\xi(u, v; T, N)$ можно рассматривать, как оценку корреляционной функции $R_\xi(u, v)$ поля $\xi(t, x)$ при условии, что m_ξ известно, а $\delta_{T,N}(u, v)$ — как смещение, возникающее вследствие использования оценки $m_{T,N}$ при вычислении оценки корреляционной функции. Относительно $\delta_{T,N}(u, v)$ заметим, что

$$M\,|\delta_{T,N}(u, v)|^2 \leqslant \frac{C}{T^2 N^2}, \tag{10}$$

где $C > 0$ некоторая константа, не зависящая от u, v.

При доказательстве неравенства (10) используются условия (1), (2), а также формула (4). Далее, из (8), (9) и (10) следует

$$\lim_{T,N\to\infty} M\widehat{R}_\xi(u, v;\; T, N) = \lim_{T,N\to\infty} \left(1 - \frac{|u|}{T}\right)\left(1 - \frac{|v|}{N}\right) R_\xi(u, v) + \\ + \lim_{T,N\to\infty} M\delta_{T,N}(u, v) = R_\xi(u, v),$$

т. е. оценка $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$ является асимптотически несмещенной.

Рассмотрим теперь ковариацию оценки $\widehat{R}_\xi(u, v;\; T, N)$. Прежде всего докажем, что $R_\xi(u, v; T, N)$ обладает асимптотической ковариацией порядка $\frac{1}{TN}$. Действительно, подставив значение

$R_\xi(u, v; T, N)$ из (9) и произведя некоторые преобразования, получим

$$TN \operatorname{cov}\{R_\xi(u_1, v_1; T, N), R_\xi(u_2, v_2; T, N)\}) =$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-N}^{N} U_T(t, |u_1|, |u_2|)\, V_N(x, |v_1|, |v_2|)\, g(t, x, |u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|) \times$$

$$\times\, dt dx, \qquad (11)$$

где

$$U_T(t, |u_1|, |u_2|) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant -(T - |u_1|) \\ 1 - \dfrac{|u_1| + |t|}{T} & \text{при } -(T - |u_1|) \leqslant \\ & \leqslant t \leqslant \min(0, |u_1| - |u_2|) \\ 1 - \dfrac{\max(|u_1|, |u_2|)}{T} & \text{при } \min(0, |u_1| - \\ & - |u_2|) \leqslant t \leqslant \max(0, |u_1| - |u_2|) \\ 1 - \dfrac{|u_2| + |t|}{T} & \text{при } \max(0, |u_1| - \\ & - |u_2|) \leqslant t \leqslant T - |u_2| \\ 0 & \text{при } T - |u_2| \leqslant t; \end{cases}$$

$V_N(x, |v_1|, |v_2|)$ определяется по формулам, которые получаются из $U_T(t, |u_1|, |u_2|)$ после замены T на N и $t, |u_1|, |u_2|$ на $x, |v_1|, |v_2|$ соответственно:

$$g(t, x, |u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|) = R_\xi(t, x)\, R_\xi(t + |u_2| - |u_1|, x + \\ + |v_2| - |v_1|) + R_\xi(t + |u_2|, x + |v_2|)\, R_\xi(t - |u_1|, x - |v_1|) + \\ + Q_\xi(|u_1|, |v_1|, t, x, t + |u_2|, x + |v_2|),$$

если

$$\operatorname{sgn} u_1 = \operatorname{sgn} v_1, \ \operatorname{sgn} u_2 = \operatorname{sgn} v_2;$$

$$g(t, x, |u_1|, |v_1|, |u_2|, |v_2|) = R_\xi(t, x + |v_2|)\, R_\xi(t + |u_2| - |u_1|, x - \\ - |v_1|) + R_\xi(t + |u_2|, x)\, R_\xi(t - |u_1|, x + |v_2| - |v_1|) + Q_\xi(|u_1|, \\ |v_1|, t, x + |v_2|, t + |u_2|, x),$$

если

$$\operatorname{sgn} u_1 = \operatorname{sgn} v_1; \ \operatorname{sgn} u_2 \neq \operatorname{sgn} v_2;$$

$$g(t, x, |u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|) = R_\xi(t, x - |v_1|)\, R_\xi(t + |u_2| - |u_1|, x + \\ + |v_2|) + R_\xi(t - |u_1|, x)\, R_\xi(t + |u_2|, x + |v_2| - |v_1|) + \\ + Q_\xi(|u_1|, -|v_1|, t, x - |v_1|, t + |u_2|, x + |v_2| - |v_1|),$$

если $\qquad \operatorname{sgn} u_1 \neq \operatorname{sgn} v_1, \ \operatorname{sgn} u_2 = \operatorname{sgn} v_2;$

$$g(t, x, |u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|) = R_\xi(t, x + |v_2| - |v_1|)\, R_\xi(t +$$

$$+|u_2|-|u_1|, x)+R_\xi(t+|u_2|, x-|v_1|)\,R_\xi(t-|u_1|, x+|v_2|)+$$
$$+Q_\xi(|u_1|, -|v_1|, t, x+|v_2|-|v_1|, t+|u_2|, x-|v_1|),$$
если
$$\operatorname{sgn} u_1 \neq \operatorname{sgn} v_1,\quad \operatorname{sgn} u_2 \neq \operatorname{sgn} v_2.$$

Тогда
$$\lim_{T,N\to\infty} TN\operatorname{cov}\{R_\xi(u_1, v_1;\ T, N),\ R_\xi(u_2, v_2;\ T, N)\} =$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t, x, |u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|)\,dtdx. \qquad (12)$$

Как следует из определения функции $g(t, x, |u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|)$, правая часть формулы (12) записывается по-разному в зависимости от того, какие значения принимают u_1, v_1, u_2, v_2. Но оказывается, что для различных u_1, v_1, u_2, v_2 выражение (12) можно представить в одном и том же виде следующим образом:
$$\lim_{T,N\to\infty} TN\operatorname{cov}\{R_\xi(u_1, v_1;\ T, N), R_\xi(u_2, v_2;\ T, N)\} =$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{R_\xi(t, x)\,R_\xi(t+u_2-u_1, x+v_2-v_1)+$$
$$+R_\xi(t, x)\,R_\xi(t+u_2+u_1, x+v_2+v_1)+$$
$$+Q_\xi(u_1, v_1, t, x, t+u_2, x+v_2)\}\,dtdx. \qquad (13)$$

Заметим, что пользуясь равенством Парсеваля, (13) можно записать через спектральную плотность $f_\xi(\omega, \nu)$ поля $\xi(t, x)$ так:
$$\lim_{T,N\to\infty} TN\operatorname{cov}\{R_\xi(u_1, v_1;\ T, N), R_\xi(u_2, v_2;\ T, N)\} =$$
$$=(2\pi)^2\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(u_2+u_1)+i\nu(v_2+v_1)} f^2(\omega, \nu)\,d\omega d\nu+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(u_2-u_1)+i\nu(v_2-v_1)} f^2(\omega, \nu)\,d\omega d\nu\right\}+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q_\xi(u_1, v_1, t, x, t+u_2, x+v_2)\,dtdx.$$

Итак, найдена асимптотическая ковариация (13) оценки $R_\xi(u, v;\ T, N)$.

Как видно из (10) и (13), дисперсия $\delta_{T,N}(u, v)$ имеет более высокий порядок малости, чем дисперсия $R_\xi(u, v;\ T, N)$. Поэтому из (8) вытекает
$$\lim_{T,N\to\infty} TN\operatorname{cov}\{\hat R_\xi(u_1, v_1;\ T, N),\ \hat R_\xi(u_2, v_2;\ T, N)\} =$$
$$=\lim_{T,N\to\infty} TN\operatorname{cov}\{R_\xi(u_1, v_1;\ T, N),\ R_\xi(u_2, v_2;\ T, N)\}.$$

Наконец, из асимптотической несмещенности оценки $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$ и того, что ковариация оценки $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$ имеет порядок $\frac{1}{TN}$, следует состоятельность оценки $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$.

Теорема 1. Оценка $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$, определенная формулой (7), является состоятельной оценкой корреляционной функции $R_\xi(u, v)$ однородного поля $\xi(t, x)$, и асимптотическая ковариация оценки задается формулой

$$\lim_{T,N\to\infty} TN \operatorname{cov}\{\widehat{R}_\xi(u_1, v_1; T, N), \widehat{R}_\xi(u_2, v_2; T, N)\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{R_\xi(t, x) R_\xi(t + u_2 - u_1, x + v_2 - v_1) +$$
$$+ R_\xi(t, x) R_\xi(t + u_2 + u_1, x + v_2 + v_1) +$$
$$+ Q_\xi(u_1, v_1, t, x, t + u_2, x + v_2)\}\, dtdx.$$

Перейдем к построению оценок спектральной плотности $f_\xi(\omega, \nu)$ поля $\xi(t, x)$. Прежде всего заметим, что периодограмма $I_{T,N}(\omega, \nu)$, будучи асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности $f_\xi(\omega, \nu)$, не является состоятельной оценкой этой величины. Действительно, исходя из определения $I_{T,N}(\omega, \nu)$ по (5), можем найти, что

$$\lim_{T,N\to\infty} MI_{T,N}(\omega, \nu) = f_\xi(\omega, \nu),$$

в то время как

$$\lim_{T,N\to\infty} \sigma^2 I_{T,N}(\omega, \nu) = f_\xi^2(\omega, \nu),$$

откуда и вытекает несостоятельность оценки $I_{T,N}(\omega, \nu)$.

Для построения состоятельной оценки спектральной плотности введем функцию $k(u, v)$, которую будем предполагать ограниченной, четной, т. е. $k(u, v) = k(-u, -v)$, непрерывной в точке $(0, 0)$, причем $k(0, 0) = 1$, и интегрируемой в квадрате

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |k(u, v)|^2\, dudv < \infty. \tag{14}$$

Из условия (14) вытекает [6] существование такой функции $K(\omega, \nu)$ интегрируемой в квадрате, что

$$K(\omega, \nu) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A} e^{-iu\omega - iv\nu} k(u, v)\, dudv,$$

причем

$$k(u, v) = \underset{A\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A} e^{iu\omega + iv\nu} K(\omega, \nu)\, d\omega d\nu,$$

и $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |k(u, v)|^2\, du dv = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(\omega, \nu)|^2\, d\omega d\nu.$$

Пусть a_T и b_N — последовательности положительных чисел, такие, что $a_T \to 0$, $Ta_T \to \infty$ при $T \to \infty$; $b_N \to 0$, $Nb_N \to \infty$ при $N \to \infty$.

Оценку спектральной плотности $f_\xi(\omega, \nu)$ для случая, когда m_ξ известно, зададим следующим образом:

$$f_\xi(\omega, \nu;\ T, N) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-N}^{N} e^{-iu\omega - iv\nu}\, k(a_T u,\ b_N v)\, R_\xi(u, v;\ T, N)\, du dv, \tag{15}$$

где $R_\xi(u, v;\ T, N)$ задается формулой (9).

Рассмотрим

$$Mf_\xi(\omega, \nu;\ T, N) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-N}^{N} e^{-iu\omega - iv\nu}\, [k(a_T u,\ b_N v) - 1]\left(1 - \frac{|u|}{T}\right)\left(1 - \frac{|v|}{N}\right) R_\xi(u, v)\, du dv + \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-T}^{T}\int_{-N}^{N} e^{-iu\omega - iv\nu}\left(1 - \frac{|u|}{T}\right)\left(1 - \frac{|v|}{N}\right) R_\xi(u, v)\, du dv.$$

Здесь первый интеграл сходится к нулю в силу (1) и того, что $k(0, 0) = 1$ и функция $k(u, v)$ непрерывна в точке $(0, 0)$. Второй интеграл сходится к $f_\xi(\omega, \nu)$ в силу(1). Таким образом, оценка $f_\xi(\omega, \nu;\ T, N)$, определенная по (15), является асимптотически несмещенной.

Покажем, далее, что существует асимптотическая ковариация оценки (15). С этой целью рассмотрим величину

$$Ta_T Nb_N \operatorname{cov}\{f_\xi(\omega_1, \nu_1;\ T, N),\ f_\xi(\omega_2, \nu_2;\ T, N)\} = \frac{Ta_T Nb_N}{(2\pi)^4}\int_{-T}^{T}\int_{-N}^{N}\int_{-T}^{T}\int_{-N}^{N} e^{-iu_1\omega_1 - iv_1\nu_1} e^{-iu_2\omega_2 - iv_2\nu_2} k(a_T u_1 b_N v_1) \times k(a_T u_2,\ b_N v_2) \operatorname{cov}\{R_\xi(u_1, v_1;\ T, N),\ R_\xi(u_2, v_2;\ T, N)\}\, du_1 dv_1 du_2 dv_2, \tag{16}$$

которая после подстановки (11) записывается в виде суммы 12 интегралов по области $0 \leqslant u_1,\ u_2 \leqslant T$, $0 \leqslant v_1,\ v_2 \leqslant N$ и здесь не приводится, поскольку громоздко. Изучение выражения (16) показывает, что десять входящих в него интегралов сходятся к нулю. Четыре из них, подынтегральные выражения которых содержат функцию Q_ξ, ограничены величиной

$$a_T b_N C \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |Q_\xi(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)| \times du_1 dv_1 du_2 dv_2 du_3 dv_3,$$

которая сходится к нулю вследствие сходимости к нулю a_T и b_N при $T, N \to \infty$. Доказательство сходимости к нулю шести других интегралов проводится одним и тем же способом. Сделав подходящую замену переменных (различную для разных интегралов), находим интеграл, больший рассматриваемого, который сходится к нулю вследствие того, что верхний и нижний пределы интегрирования хотя бы по одной из переменных u, v сходятся к $+\infty$. Например, один из этих интегралов после замены переменных $t - u_1 = t_1$, $u_1 + u_2 = u$, $a_T u_1 = z$, $x - v_1 = x_1$, $v_1 + v_2 = v$, $b_N v_1 = w$ ограничен величиной

$$\frac{1}{4\pi^4}\int_0^{Ta_T} dz \int_0^{Nb_N} dw \int_{\frac{z}{a_T}}^{T\left(1+\frac{z}{Ta_T}\right)} du \int_{\frac{w}{b_N}}^{N\left(1+\frac{w}{Nb_N}\right)} dv\, |k(z, w)\, k(z - a_T u, w - b_N v)| \int_{-T\left(1+\frac{z}{Ta_T}\right)}^{T\left(1-\frac{z}{Ta_T}\right)} dt_1 \int_{-N\left(1+\frac{w}{Nb_N}\right)}^{N\left(1-\frac{w}{Nb_N}\right)} dx_1\, |R_\xi(t_1, x_1)\, R_\xi(t_1 + u, x_1 + v)|,$$

которая сходится к нулю, так как оба предела интегрирования по u и по v сходятся к $+\infty$.

Осталось рассмотреть еще два интеграла из (16). Сумма этих интегралов после замены переменных $u_2 - u_1 = u$, $a_T u_1 = z$, $v_2 - v_1 = v$, $b_N v_1 = w$ приводится к виду

$$\frac{1}{4\pi^4}\int_0^{Ta_T} dz \int_0^{Nb_N} dw \int_{-\frac{z}{a_T}}^{T\left(1-\frac{z}{Ta_T}\right)} du \int_{-\frac{w}{b_N}}^{N\left(1-\frac{w}{Nb_N}\right)} dv \cos\left(z\frac{\omega_1}{a_T} + w\frac{\nu_1}{b_N}\right) \times$$

$$\times \cos\left(z\frac{\omega_2}{a_T} + u\omega_2 + w\frac{\nu_2}{b_N} + v\nu_2\right) k(z, w)\, k(z + a_T u, w + b_N v) \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} dt \int_{-N}^{N} dx\, U_T\left(t, \frac{z}{a_T}, u + \frac{z}{a_T}\right) V_N\left(x, \frac{w}{b_N}, v + \frac{w}{b_N}\right) \times$$

$$\times R_\xi(t, x)\, R_\xi(t + u, x + v) + \frac{1}{4\pi^4}\int_0^{Ta_T} dz \int_0^{Nb_N} dw \int_{-\frac{z}{a_T}}^{T\left(1-\frac{z}{Ta_T}\right)} du \times$$

$$\times \int_{-\frac{w}{b_N}}^{N\left(1-\frac{w}{Nb_N}\right)} dv \cos\left(z\frac{\omega_1}{a_T} - w\frac{\nu_1}{b_N}\right) \cos\left(z\frac{\omega_2}{a_T} + u\omega_2 - w\frac{\nu_2}{b_N} -\right.$$

$$\left. - v\nu_2\right) k(z, -w)\, k(z + a_T u, -w - b_N v) \int_{-T}^{T} dt \int_{-N}^{N} dx U_T\left(t, \frac{z}{a_T}, u +\right.$$

$$\left. + \frac{z}{a_T}\right) V_N\left(x, \frac{w}{b_N}, v + \frac{w}{b_N}\right) R_\xi(t, x+v)\, R_\xi(t+u, x). \qquad (17)$$

Воспользовавшись формулой $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, последнее выражение можно записать в виде суммы четырех интегралов, каждый из которых сходится к нулю при всех значениях ω_1, ω_2, ν_1, ν_2, кроме тех, что удовлетворяют условию

$$\omega_2 + \omega_1 = 0, \quad \nu_2 + \nu_1 = 0 \qquad (18)$$

или

$$\omega_2 - \omega_1 = 0, \quad \nu_2 - \nu_1 = 0. \qquad (19)$$

Для доказательства этого факта используется теорема Римана — Лебега о тригонометрических интегралах.

Если выполнено одно и только одно из условий (18), (19), то (17) сходится при $T, N \to \infty$ к пределу

$$\frac{1}{8\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u\omega_2 + v\nu_2)\, du dv \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(t, x)\, R_\xi(t+u, x+v)\, dt dx \times$$

$$\times \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z, w)\, dz dw = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z, w)\, dz dw f^2(\omega_2, \nu_2). \qquad (20)$$

И наконец, если выполнены оба условия (18), (19), что имеет место в единственном случае $\omega_1 = \omega_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0$, то предел (17) равен удвоенному выражению (20).

Таким образом, для оценки $f_\xi(\omega, \nu; T, N)$ найдена асимптотическая ковариация, которая имеет следующий вид:

$$\lim_{T,N\to\infty} T a_T N b_N \operatorname{cov}\{f_\xi(\omega_1, \nu_1; T, N), f_\xi(\omega_2, \nu_2; T, N)\} =$$

$$= f^2(\omega_2, \nu_2) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z, w)\, dz dw\, \{\delta(\omega_1, -\omega_2)\,\delta(\nu_1, -\nu_2) +$$

$$+ \delta(\omega_1, \omega_2)\,\delta(\nu_1, \nu_2)\},$$

где

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v; \\ 0, & \text{если } u \neq v. \end{cases}$$

Перейдем к построению оценки спектральной плотности для случая неизвестного m_ξ. Снова вводим функцию $k(u, v)$, удовлетворяющую всем условиям, перечисленным ранее, и дополнительному условию: существуют такие константы K и $\varepsilon > 0$, что

$$AB \int_{-T}^{T} \int_{-N}^{N} |k(Au, Bv)|\, du dv \leqslant K(ABTN)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \tag{21}$$

для любых A, B, T, N.

Оценку спектральной плотности $f_\xi(\omega, \nu)$ поля $\xi(t, x)$ для случая, когда m_ξ неизвестно, обозначим через $\widehat{f}_\xi(\omega, \nu; T, N)$ и определим следующим образом:

$$\widehat{f}_\xi(\omega, \nu; T, N) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^{T} \int_{-N}^{N} e^{-iu\omega - iv\nu} k(a_T u, b_N v)\, \widehat{R}_\xi(u, v; T, N)\, du dv, \tag{22}$$

где $\widehat{R}_\xi(u, v; T, N)$ задается формулой (7).

Вследствие (8) и (15) можно записать

$$\widehat{f}_\xi(\omega, \nu; T, N) = f_\xi(\omega, \nu; T, N) + b_{T,N}(\omega, \nu), \tag{23}$$

где

$$b_{T,N}(\omega, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^{T} \int_{-N}^{N} e^{-iu\omega - iv\nu} k(a_T u, b_N v)\, \delta_{T,N}(u, v)\, du dv.$$

Докажем, что

$$\lim_{T,N\to\infty} T a_T N b_N M |b_{T,N}(\omega, \nu)|^2 = 0. \tag{24}$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получаем неравенство

$$\{T a_T N b_N M |b_{T,N}(\omega, \nu)|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (T a_N N b_N)^{\frac{1}{2}} \int_{-T}^{T} \int_{-N}^{N} |k(a_T u, b_N v)| \{M |\delta_{T,N}(u, v)|^2\}^{\frac{1}{2}} du dv,$$

из которого, учитывая (10) и (21), находим

$$\{T a_T N b_N M |b_{T,N}(\omega, \nu)|^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant CK(T a_T N b_N)^{-\varepsilon} \underset{T,N\to\infty}{\to} 0,$$

что и требовалось доказать.

Как следует из (24), дисперсия $b_{T,N}(\omega, \nu)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\frac{1}{T a_T N b_N}$. Так как ранее было доказано, что асимптотическая дисперсия оценки $f_\xi(\omega, \nu; T, N)$ имеет порядок $\frac{1}{T a_T N b_N}$, то из (23) получаем

$$\lim_{T,N\to\infty} Ta_T N b_N \operatorname{cov}\{\hat{f}_\xi(\omega_1, \nu_1;\ T, N),\ \hat{f}_\xi(\omega_2, \nu_2;\ T, N)\} =$$
$$= \lim_{T,N\to\infty} Ta_T N b_N \operatorname{cov}\{f_\xi(\omega_1, \nu_1;\ T, N),\ f_\xi(\omega_2, \nu_2;\ T, N)\}.$$

Из (23) в силу (24) и асимптотической несмещенности оценки $f_\xi(\omega, \nu; T, N)$ вытекает асимптотическая несмещенность оценки $\hat{f}_\xi(\omega, \nu; T, N)$.

Теорема 2. Оценка $\hat{f}_\xi(\omega, \nu;\ T, N)$, определенная формулой (22), является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой спектральной плотности $f_\xi(\omega, \nu)$ однородного поля $\xi(t, x)$, и асимптотическая ковариация ее задается выражением

$$\lim_{T,N\to\infty} Ta_T N b_N \operatorname{cov}\{\hat{f}_\xi(\omega_1, \nu_1;\ T, N),\ \hat{f}_\xi(\omega_2, \nu_2;\ T, N)\} =$$
$$= f^2(\omega_2, \nu_2) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(z, w)\, dz dw\, \{\delta(\omega_1, -\omega_2)\,\delta(\nu_1, -\nu_2) +$$
$$+ \delta(\omega_1, \omega_2)\,\delta(\nu_1, \nu_2)\},$$

где

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v; \\ 0, & \text{если } u \neq v. \end{cases}$$

В заключение выражаю искреннюю благодарность научному руководителю М. И. Ядренко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Parzen E. On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series. — Ann. Math. Stat., 28, 2, 1957.
2. Parzen E. Mathematical considerations in the estimation of spectra.— Technometrics, 3, 2, 1961.
3. Гренандер У., Розенблатт М. Некоторые задачи об оценке спектра временного ряда.— В сб. переводов: Математика, 2 : 5, 1958, 105—122.
4. Кнопов П. С. Об оценке спектра однородного и изотропного гауссовского поля.— Кибернетика, 6, 1965, 59—64.
5. Кнопов П. С. Исследование вопросов статистики случайных полей, связанных с задачами управления и распознавания. Автореферат кандидатской диссертации. Ин-т кибернетики АН УССР, Киев, 1967.
6. Данфорд Н., Шварц Д. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. «Мир», М., 1966.

L. P. Kononchuck

ON ESTIMATION OF THE HOMOGENEOUS RANDOM FIELD SPECTRUM

Summary

Some consistent estimates of the correlation function anod the spectral density function of a homogeneous random field under some assumptions concerning the moments of the order four are considered.

Поступила в редколлегию 19.IX. 1969.