Ю. Г. КУРИЦЫН, асп.
Воронежский университет
Ю. И. ПЕТУНИН, проф.
Киевский университет

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНОК МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $\{\Omega, A, P\}$ — вероятностное пространство и $x(\omega)$: $\Omega \to R^1$ случайная величина, определенная на Ω. Обозначим через L линейное пространство, элементами которого являются классы $\{\tilde{x}(\omega)\}$ эквивалентных случайных величин, причем алгебраические операции сложения и умножения на скаляр введены естественным образом. Напомним (см. [1]), что симметричным пространством E называется линейное пространство L, наделенное нормой $\|\tilde{x}\|_E$, обладающей следующими свойствами:

1) если $|\tilde{x}(\omega)| \leqslant |\tilde{y}(\omega)|$ и $\tilde{y}(\omega) \in E$, то $\tilde{x}(\omega) \in E$ и $\|\tilde{x}\|_E \leqslant \|\tilde{y}\|_E$;

2) если $F_{\tilde{x}}(t) = F_{\tilde{y}}(t)$, то $\|\tilde{x}\|_E = \|\tilde{y}\|_E$, где $F_{\tilde{x}}(t)$, $F_{\tilde{y}}(t)$ — функции распределения $\tilde{x}(\omega)$ и $\tilde{y}(\omega)$ соответственно.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать лишь сепарабельные симметричные пространства или симметричные пространства, являющиеся сопряженными к сепарабельным банаховым пространствам. Кроме того, будем отождествлять класс эквивалентных случайных величин с каким-либо одним представителем этого класса и поэтому обозначим класс $\tilde{x}(\omega)$ через $x(\omega)$. Под случайным процессом $x_t(\omega)$: $R_1 \to E$ будем понимать произвольное отображение числовой прямой в некоторое симметричное пространство E.

Будем предполагать, что случайный процесс $x(t) = x_t(\omega)$ имеет вид

$$x(t) = y(t) + m, \tag{1}$$

где математическое ожидание $M[y(t)] = 0$, а m — некоторая константа.

Рассмотрим аффинное подпространство $A(0, T) \subset E$, состоящее из всевозможных случайных величин вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x(t_\nu), \text{ где } \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu = 1; \quad t_\nu \in [0, T], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Замыкание $A_E(0, T)$ множества $A(0, T)$ по норме пространства E будем называть классом линейных несмещенных оценок неизвестного параметра m, а элементы множества $A_E(0, T)$ — несмещенными линейными оценками m. Если банахово пространство E является рефлексивным, то в классе $A_E(0, T)$ существует по крайней мере один элемент x_E наилучшего приближения случайной величины $e(\omega) \equiv m$

$$\|x_E - m\|_E = \inf_{x \in A_E(0,T)} \|x - m\|_E. \tag{2}$$

В самом деле, $N_E(0, T) = \{x - m : x \in A_E(0, T)\}$ является выпуклым множеством; известно (см. [2], гл. IV, § 5, упр. 1), что в каждом выпуклом множестве $N_E(0, T)$ рефлексивного пространства E существует точка $x_E - m$, для которой $\|x_E - m\|_E$ равно расстоянию от нуля до $N_E(0, T)$. Элемент $x_E \in A_E(0, T)$, для которого выполнено соотношение (2), называется наилучшей линейной несмещенной оценкой параметра m в норме пространства E. В соответствии с ранее принятой терминологией [3] оценка x_E называется наилучшей линейной оценкой, если E — гильбертово пространство. Наилучшая оценка x_E — единственная, когда единичный шар пространства E является строго выпуклым.

Отметим, что элемент x_E можно найти, если нам известны элемент $e(\omega) \equiv m$ и абстрактное банахово пространство E. Действительно, рассмотрим прямую сумму аффинных подпространств $A_E(0, T)$ и $L = \{\lambda e(\omega); -\infty < \lambda < \infty\}$:

$$S = A_E(0, T) \oplus L.$$

Пусть y — элемент из S, имеющий наименьшую норму, и P_L — оператор проектирования подпространства S на $A_E(0, T)$ параллельно прямой L. Легко видеть, что тогда $P_L y = x_E$. В случае гильбертова пространства E в качестве аффинного подпространства S можно взять подпространство $A_E(0, T)$.

Определение 1. Идеальной оценкой математического ожидания m случайного процесса (1) в классе несмещенных линейных оценок $A(0, T)$ называется случайная величина $x_i(\omega) \in L_1(\Omega, A, P)$, функция распределения $F_{x_i}(t)$ которой удовлетворяет условиям

$$F_{x_i}(t) \geqslant F_x(t) \quad \text{при} \quad t \geqslant m,$$

$$F_{x_i}(t) \leqslant F_x(t) \quad \text{при} \quad t \leqslant m$$

для любого элемента $x(\omega) \in A(0, T)$.

Пусть $x(\omega)$ — произвольная случайная величина; невозрастающая функция $x^*(t)$, определенная на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющая равенству

$$P[x^{-1}(A)] = \mu[(x^*)^{-1}(A)]$$

(где A — произвольное борелевское множество на прямой R_1, μ — лебегова мера), называется перестановкой случайной величины $x(\omega)$ [4].

Определение 2. Будем говорить, что случайная величина $\hat{x}(\omega) \in L_1(\Omega, A, P)$ является оптимальной оценкой в классе $A(0, T)$ математического ожидания m случайного процесса (1), если для любого элемента $x(\omega) \in A(0, T)$ справедливо неравенство

$$\int_0^t |\hat{x} - m|^*(s)\,ds \leqslant \int_0^t |x - m|^*(s)\,ds \tag{3}$$

при всех $t \in [0, 1]$.

Нетрудно заметить, что всякая идеальная оценка является оптимальной; обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Теорема 1. Пусть вероятностное пространство Ω не содержит атомов. Для того чтобы оценка $\hat{x}(\omega)$ математического ожидания m случайного процесса (1) была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|\hat{x} - m\|_E \leqslant \|x - m\|_E \qquad (x \in A(0, T))$$

для всякого симметричного пространства E, содержащего множество $A(0, T)$.

Докажем предварительно следующее утверждение.

Лемма. Пусть E — произвольное симметричное пространство, не совпадающее с L_∞, $y(\omega)$ — почти всюду ограниченная случайная величина и $y_n(\omega)$ — последовательность конечнозначных случайных величин, сходящаяся по вероятности к $y(\omega)$, причем $|y_n(\omega)| \leqslant |y(\omega)|$ при всех n, тогда

$$\|y_n(\omega) - y(\omega)\|_E \to 0.$$

Доказательство. Как известно (см. [5], гл. III, 10.1, следствие 3), из условий леммы вытекает сходимость последовательности $y_n(\omega)$ к $y(\omega)$ в норме пространства L_1:

$$\int_\Omega |y_n(\omega) - y(\omega)|\,P(d\Omega) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Из определения перестановки $x^*(t)$ случайной величины $x(\omega)$ следует, что $\int_\Omega x(\omega)\,P(d\Omega) = \int_0^1 x^*(t)\,dt$, если случайная величина $x(\omega)$ интегрируема. Поэтому

$$\int_0^1 z_n^*(t)\,dt \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $z_n(\omega) = |y_n(\omega) - y(\omega)|$. Это означает, что последовательность $z_n^*(t)$ сходится к нулю в норме пространства $L_1(0, 1)$.

Покажем, что $\int_0^1 z_n^*(t)\,d\varphi(t) \to 0$, если $n \to \infty$, где $\varphi(t)$ — неубывающая вогнутая на отрезке $[0, 1]$ функция, непрерывная в точке $t = 0$. Известно, [6], что такая функция является абсолютно непрерывной, поэтому

$$\int_0^1 z_n^*(t)\, d\varphi(t) = \int_0^1 z_n^*(t)\, g(t)\, dt,$$

где $g(t)$ — производная функции $\varphi(t)$, причем $g(t) \in L_1(0,1)$.

Так как $z_n^*(t) \to 0$ по мере Лебега, то и $z_n^*(t)\, g(t)$ сходится к нулю по мере Лебега [5]. Но $g(t) \in L_1(0,1)$, а $z_n^*(t)$ — почти всюду ограничены, следовательно, $z_n^*(t)\, g(t) \to 0$ по норме пространства $L_1(0,1)$. Это означает, что

$$\int_0^1 z_n^*(t)\, d\varphi(t) = \int_0^1 z_n^*(t)\, g(t)\, dt \to 0, \text{ когда } n \to \infty.$$

Рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$, состоящее из случайных величин $x(\omega)$ с нормой

$$\| x(\omega) \|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 |x|^*(t)\, d\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — неубывающая вогнутая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$ и непрерывная в точке $t = 0$. (Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(0) = 0$).

Легко видеть, что в этом случае фундаментальная функция (t) симметричного пространства E [7] непрерывна при $t = 0$ и $\psi(t) = 0$. Из результатов работы [7] следует, что существует непрерывная на отрезке $[0, 1]$ вогнутая функция $\varphi(t)$, такая, что $E \supset \supset \Lambda(\varphi)$ и

$$\| x(\omega) \|_E \leqslant \| x(\omega) \|_{\Lambda(\varphi)}.$$

Поэтому

$$\| y_n(\omega) - y(\omega) \|_E \leqslant \| y_n(\omega) - y(\omega) \|_{\Lambda(\varphi)} \to 0$$

при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Необходимость. Покажем, что для сепарабельного симметричного пространства E или для пространства E, сопряженного к сепарабельному симметричному пространству, справедлива формула

$$\| y \|_E = \sup_{\| u \|_{E'} = 1} \int_{\Omega} u(\omega) | y(\omega) | P(d\Omega) = \sup_{\| u \|_{E'} = 1} \int_0^1 u^*(s) | y |^*(s)\, ds. \quad (4)$$

Предположим, что $y(\omega)$ — неотрицательная измеримая конечнозначная функция

$$y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varkappa_{\Omega_k}(\omega), \quad (5)$$

где $\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \Omega$; $P(\Omega_1) = P(\Omega_2) = \cdots = P(\Omega_n) = \frac{1}{n}$, $\varkappa_{\Omega_k}(\omega)$ — индикатор множества Ω_k.

Из результатов работы [8] следует, что $\sup \int_\Omega u(\omega)\,|y(\omega)|\,P(d\Omega)$ в формуле (4) достигается на функциях $u(\omega)=\sum_{k=1}^{n} a_k \varkappa_{\Omega_k}(\omega)$.

Ф. Риссом было показано ([[9], гл. 10, 10.2)], что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k C_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^* C_k^*,$$

где C_k^*, a_k^* — перестановки чисел C_k, a_k в убывающем порядке. Отсюда и из предыдущего для случайной величины (5) вытекает равенство (4).

Докажем теперь справедливость формулы (4) для почти везде ограниченной случайной величины $y(\omega)$. Нетрудно заметить, что для $y(\omega)$ существуют последовательности конечнозначных случайных величин

$$y_m^{(\text{н})}(\omega)=\sum_{k=1}^{n_m} B_k^{(m)} \varkappa_{\Omega_k^{(m)}}(\omega);$$

$$y_m^{(\text{в})}=\sum_{k=1}^{n_m} A_k^{(m)} \varkappa_{\Omega_k^{(m)}}(\omega),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $y_m^{(\text{н})}(\omega)\leqslant y(\omega)\leqslant y_m^{(\text{в})}(\omega)$ почти при всех ω;

2) $P\{\Omega_k^{(m)}\}=\frac{1}{n_m}$, при $k=1, 2, \ldots, n_m$;

3) $y_m^{(\text{н})}(\omega)$ сходится по вероятности к $y(\omega)$, $y_m^{(\text{в})}(\omega)$ сходится по вероятности к $y(\omega)$.

Легко видеть, что

$$\sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|\,y_m^{(\text{н})}|^*(s)\,ds \leqslant \sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|\,y\,|^*(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|\,y_m^{(\text{в})}|^*(s)ds.$$

В силу предыдущего

$$\sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|\,y_m^{(\text{н})}|^*(s)\,ds = \|y_m^{(\text{н})}\|_E,$$

$$\sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|y_m^{(\text{в})}|^*(s)\,ds = \|y_m^{(\text{в})}\|_E.$$

Кроме того, на основании леммы и условий 1—3

$$\|y_m^{(\text{н})}\|_E \to \|y\|_E,$$

$$\|y_m^{(\text{в})}\|_E \to \|y\|_E \text{ при } m\to\infty$$

и

$$\|y_m^{(\text{н})}\|_E \leqslant \|y\|_E \leqslant \|y_m^{(\text{в})}\|_E,$$

поэтому справедлива формула (4).

Докажем справедливость формулы

$$\|y\|_E = \sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|y|^*(s)\,ds \tag{6}$$

для произвольной случайной величины $y(\omega) \in E$. Так как E — сепарабельное или сопряженное к сепарабельному банахову пространству, то для всякого элемента $y(\omega) \in E$ справедливо свойство Фату [8]: если $y_N(\omega)$ — срезки функции $y(\omega)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \|y_N\|_E = \|y\|_E.$$

Обозначим через K — правую часть равенства (6). Нетрудно показать, что $K < \infty$. Пусть ε — произвольное положительное число; выберем конечнозначную положительную функцию $u_0(\omega)$ так, чтобы $\|u_0\|_{E'} = 1$ и

$$\int_0^1 \overset{*}{u_0}(s)\,|y|(s)\,ds \geqslant K - \varepsilon.$$

В работе [8] показано, что последовательность перестановок $|y_N|^*(s)$ сходится по мере к перестановке $|y|^*(s)$, поэтому [5] последовательность $\overset{*}{u_0}(s)\,|y_N|^*(s)$ сходится по мере к $\overset{*}{u_0}(s)\,|y|^*(s)$; кроме того, функция $\overset{*}{u_0}(s)\,|y|^*(s) \in L_1(0,1)$ и

$$\overset{*}{u_0}(s)\,|y_N|^*(s) \leqslant \overset{*}{u_0}(s)\,|y|^*(s).$$

Из теоремы Лебега [5] вытекает справедливость равенства

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \overset{*}{u_0}(s)\,|y_N|^*(s)\,ds = \int_0^1 \overset{*}{u_0}(s)\,|y|^*(s)\,ds,$$

следовательно, на основании формулы (4)

$$\|y\|_E = \lim_{N\to\infty} \|y_N\|_E \geqslant K - \varepsilon$$

и в силу произвольности ε

$$\|y\|_E \geqslant K. \tag{7}$$

Для доказательства противоположного неравенства выберем N так, чтобы

$$\|y_N\|_E \geqslant \|y\|_E - \varepsilon.$$

Тогда

$$\|y_N\|_E = \sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|y_N|^*(s)\,ds \leqslant \sup_{\|u\|_{E'}=1} \int_0^1 u^*(s)\,|y|^*(s)\,ds = K$$

и

$$\|y\|_E \leqslant \|y_N\|_E + \varepsilon \leqslant K + \varepsilon,$$

так что

$$\|y\|_E \leqslant K. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), видим, что справедливо равенство (6). Для завершения доказательства необходимости заметим, что $u^*(s)$ будет неотрицательной невозрастающей конечнозначной функцией, определенной на отрезке $[0, 1]$; поэтому она может быть представлена в виде

$$u^*(s) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varkappa_{[0,\tau_k]}(s) \qquad (C_k \geqslant 0),$$

где $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < 1$, а $\varkappa_{[0,\tau_k]}$ — индикатор отрезка $[0, \tau_k]$.

По условию

$$C_k \int_0^{\tau_k} |\hat{x} - m|^*(s)\,ds \leqslant C_k \int_0^{\tau_k} |x - m|^*(s)\,ds,$$

тогда

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_k \varkappa_{[0,\tau_k]}(s)\,|\hat{x} - m|^*(s)\,ds \leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} C_k \varkappa_{[0,\tau_k]}(s)\,|x - m|^*(s)\,ds$$

или

$$\int_0^1 u^*(s)\,|\hat{x} - m|^*(s)\,ds \leqslant \int_0^1 u^*(s)\,|x - m|^*(s)\,ds.$$

Отсюда и из формулы (4) следует, что

$$\|\hat{x} - m\|_E \leqslant \|x - m\|_E.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Обозначим через E_t — банахово пространство, состоящее из случайных величин $x(\omega)$, для которых

$$\|x\|_{E_t} = \int_0^t |x|^*(s)\,ds < \infty.$$

Нетрудно заметить, что E_t — сепарабельное симметричное пространство; по условию

$$\|\hat{x} - m\|_{E_t} \leqslant \|x - m\|_{E_t},$$

что и подтверждает справедливость неравенства (3).

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании идеальной оценки для гауссовских процессов.

Теорема 2. Если $x(t)$ — гауссовский процесс, наблюдаемый в промежуток времени $[0, T]$ и имеющий представление (1), то наилучшая линейная несмещенная оценка параметра m является идеальной.

Доказательство. Так как множество нормально распределенных случайных величин замкнуто относительно линейных операций и предела в среднем квадратичном ([5], гл. X, § 34.6), то класс $A_H(0, T)$ состоит из нормально распределенных случайных величин. По условию, для средних квадратичных отклонений выполнено соотношение

$$\sigma(x_H) \leqslant \sigma(x) \quad (x(\omega) \in A_H(0, T)),$$

поэтому для функций распределения $\Phi_{x_H}(t)$, $\Phi_x(t)$ случайных величин x_H и x справедливо неравенство

$$\Phi_{x_H}(t) - \Phi_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x_H)} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2(x_H)}}\, ds -$$

$$- \frac{1}{2\pi\sigma(x)} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2(x)}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma(x_H)} \left[\int\limits_{-\infty}^{t-m} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2(x_H)}}\, du - \int\limits_{-\infty}^{\frac{\sigma(x)}{\sigma(x_H)}(t-m)} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2(x_H)}}\, du \right] \geqslant 0$$

при $t \geqslant m$; если $t < m$, то неравенство

$$\Phi_{x_H}(t) - \Phi_x(t) \leqslant 0,$$

где $x(\omega)$ — произвольный элемент из $A_H(0, T)$ доказывается аналогично.

Следствие. Пусть Ω — вероятностное пространство, $x(t)$ — гауссовский процесс $t \in [0, T]$, $x_0(\omega)$ — наилучшая линейная несмещенная оценка для m и $x(\omega)$ — произвольная оценка из множества $A(0, T)$. Тогда для всякого симметричного пространства E, содержащего случайный процесс $x(t)$, справедливо неравенство

$$\|x_0 - m\|_E \leqslant \|x - m\|_E.$$

Теорема 3. Пусть $x(t)$, $(t = 1, \ldots, n)$ — случайный процесс с дискретным временем и независимыми одинаково распределенными значениями, имеющими конечные математические ожидания. Тогда выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)$$

является оптимальной оценкой в классе $A(1, n)$.

Доказательство. Предположим, что $x(k) = x(k, \omega)$ является конечнозначной случайной величиной, принимающей значения x_i ($i = 1, \ldots, N$) с вероятностью p_i. Тогда случайная величина $\bar{x}$ будет также конечнозначной случайной величиной, принимающей значения $\frac{1}{n}(x_{k_1}(1) + \cdots + x_{k_n}(n))$, где $k_i = 1, \ldots, N$; $i = 1, \ldots, n$ с вероятностью $p_{k_1} \ldots p_{k_n}$. Введем во множестве целочисленных векторов $k = (k_1, \ldots, k_n)$; $k_i = 1, \ldots, N$ $(i = 1, \ldots, n)$ лексикографическое упорядочение: будем считать, что вектор $k = (k_1, \ldots, k_n) > k' = (k_1', \ldots, k_n')$, если $k_1 > k_1'$; при $k_1 = k_1'$ неравенство $k > k'$ эквивалентно $k_2 > k_2'$ и т. д. Указанное упорядочение порождает упорядочение τ по индексам во множестве значений случайной величины $\bar{x}$. Всякий элемент

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x(k) \in A(1, n)$$

будет конечнозначной случайной величиной со значениями

$$\lambda_1 x_{k_1}(1) + \cdots + \lambda_n x_{k_n}(n)$$

и соответствующими им вероятностями $p_{k_1} \ldots p_{k_n}$. Во множестве значений случайной величины $x(\omega)$ также введем упорядочение τ.

Рассмотрим перестановку $|\bar{x}|^*(s)$ модуля $\bar{x}(\omega)$ в убывающем порядке. Эта функция порождает новое упорядочение τ_1 во множестве значений случайной величины $|\bar{x}|$. В соответствии с упорядочением τ_1 построим перестановку $|x|'(s)$ случайной величины $|x|$. Так как значения $x_j(i)$ зависят только от индекса j, положим $x_j = x_j(i)$ $(j = 1, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим выражение

$$\sum_{n!} |\lambda_1 x_{k_1} + \cdots + \lambda_n x_{k_n}| p_{k_1} \ldots p_{k_n},$$

где суммирование производится по всем перестановкам системы индексов $(k_1, \ldots, k_n)$.

Тогда

$$\sum_{n!} |\lambda_1 x_{k_1} + \cdots + \lambda_n x_{k_n}| p_{k_1} \ldots p_{k_n} \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sum_{n!} (\lambda_1 x_{k_1} + \cdots + \lambda_n x_{k_n}) p_{k_1} \ldots p_{k_n} \right| =$$

$$= (n-1)! \, |x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}| p_{k_1} \ldots p_{k_n} =$$

$$= \sum_{n!} \left| \frac{x_{k_1} + \cdots + x_{k_n}}{n} \right| p_{k_1} \cdots p_{k_n}.$$

Следовательно,

$$\int_0^t |\bar{x}|^* (s)\, ds \leqslant \int_0^t |x|' (s)\, ds \leqslant \int_0^t |x|^* (s)\, ds.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $x(t)$ $(t = 1, \ldots, n, \ldots)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, $x^{(k)}(t)$ $(t = 1, \ldots, n)$ — последовательность независимых конечнозначных случайных величин, сходящаяся по вероятности к $x(t)$ $(t = 1, \ldots, n)$, причем $|x^{(k)}(t)| \leqslant |x(t)|$, $(t = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\bar{x}^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} x^{(k)}(s)$$

сходится по вероятности к случайной величине $\bar{x}(\omega)$, $a' x^{(k)} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s x^{(k)}(s)$ сходится по вероятности к $x(\omega) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s x(s)$. Так как $|\bar{x}^{(k)}| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} |x(s)|$ и $|x^{(k)}| \leqslant \sum_{s=1}^{n} |\lambda_s x(s)|$, то последовательности $\bar{x}^{(k)}$ и $x^{(k)}$ сходятся к $\bar{x}$, x по норме пространства $L_1(\Omega)$. Следовательно,

$$\int_0^1 |\bar{x} - \bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Легко показать, что в этом случае

$$\int_0^t |\bar{x} - \bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du \to 0 \text{ при } k \to \infty, \quad t \in [0, 1].$$

В силу неравенства

$$\left| \int_0^t |\bar{x}|^* (u)\, du - \int_0^t |\bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du \right| \leqslant \int_0^t |\bar{x} - \bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du$$

справедливо предельное соотношение

$$\int_0^t |\bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du \to \int_0^t |\bar{x}|^* (u)\, du \text{ при } k \to \infty, \qquad t \in [0, 1].$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^t |\bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du \to \int_0^t |x|^* (u)\, du \text{ при } k \to \infty, \quad t \in [0, 1].$$

Учитывая, что

$$\int_0^t |\bar{x}^{(k)}|^* (u)\, du \leqslant \int_0^t |x^{(k)}|^* (u)\, du, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и, переходя к пределу в (9), получаем

$$\int_0^t |\bar{x}|^* (u)\, du \leqslant \int_0^t |x|^* (u)\, du.$$

Теорема доказана.

Напомним, что последовательность случайных величин $x(1)$, $x(2)$, ..., $x(n)$, ... называется симметрично зависимой (см. [10], гл. 7), если для любого конечного набора случайных величин $x(k_1), \ldots, x(k_n)$ их совместная функция распределения $F_{k_1, \ldots, k_n}(t_1, \ldots, t_n)$ является симметричной.

Теорема 4. Выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)$ является оптимальной оценкой в классе $A(1, n)$, если процесс $x(t)$ $(t = 1, \ldots, n)$ представляет последовательность симметрично зависимых случайных величин.

Понятие идеальной и оптимальной оценок можно обобщить на случай произвольного класса оценок. Пусть P_θ — семейство распределений, определенных на выборочном пространстве X, зависящих от вещественного параметра, $g(\theta)$ — произвольная функция аргумента θ и — некоторый класс несмещенных оценок величины $g(\theta)$. Оценку $x_0 \in$ $(\omega \in X)$ будем называть идеальной (оптимальной), если для любой оценки $x(\omega)$ из класса выполняется неравенство

$$F_{x_0}(t) \geqslant F_x(t) \text{ при } t \geqslant g(\theta),$$

$$F_{x_0}(t) \leqslant F_x(t) \text{ при } t \leqslant g(\theta)$$

$$\left(\int_0^t |x_0 - g(\theta)|^* (s)\, ds \leqslant \int_0^t |x - g(\theta)|^* (s)\, ds, \qquad t \in [0, 1] \right).$$

Теорема 5. Пусть P_θ — семейство распределений, зависящих от параметра θ, T — полная достаточная статистика для параметра θ, $f(T)$ — вещественная функция и $g(\theta) = M[f(T)]$. Тогда $f(T)$ является оптимальной оценкой для $g(\theta)$ в классе всех несмещенных оценок $g(\theta)$.

Доказательство. Покажем, что если для двух случайных величин $x_1(\omega)$ и $x_2(\omega)$ с нулевыми математическими ожиданиями при любом $t \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\int_0^t |x_1|^* (s)\, ds - t\, |x_1|^* (t) \leqslant \int_0^t |x_2|^* (s)\, ds - t\, |x_2|^* (t),$$

то

$$\int_0^t |x_1|^*(s)\,ds \leqslant \int_0^t |x_2|^*(s)\,ds \text{ при всех } t \in [0,1]. \qquad (10)$$

В самом деле, обозначим через U множество точек $[0, 1]$, для которых $|x_1|^*(t) \leqslant |x_2|^*(t)$; пусть $V = [0,1] \setminus U$. Без ограничения общности можно считать, что перестановка $|x|^*(t)$ для произвольной случайной величины $x(\omega)$ является непрерывной справа функцией. Если $t \in U$, то неравенство (10) очевидно. Пусть $t_0 \in V$ и

$$\int_{t_0}^{t_1} |x_1|^*(s)\,ds > \int_{t_0}^{t_1} |x_2|^*(s)\,ds.$$

Нетрудно заметить, что существует такой полуинтервал $[t_0, t_1) \subset V$, для которого правый конец $t_1 \in U$, тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} |x_1|^*(s)\,ds > \int_{t_0}^{t_1} |x_2|^*(s)\,ds.$$

Поэтому

$$\int_0^{t_1} |x_1|^*(s)\,ds > \int_0^{t_1} |x_2|^*(s)\,ds,$$

что противоречит определению множества U.

Пусть

$$W_t = \begin{cases} 0; & 0 \leqslant u \leqslant |x|^*(t) \\ u - |x|^*(t); & |x^*|(t) < u. \end{cases}$$

Обозначим $x_1(\omega) = f(T) - g(\theta)$ и $x_2(\omega) = T_1 - g(\theta)$, где T_1 — произвольная несмещенная оценка $g(\theta)$. Как известно [11], для любой выпуклой функции W справедливо неравенство при всех θ

$$M[W(f(T) - g(\theta))] \leqslant M[W(T_1 - g(\theta))].$$

Полагая $W = W_t$, $t \in [0, 1]$, получим

$$\int_0^t |x_1|^*(s)\,ds - t|x_1|^*(t) \leqslant \int_0^t |x_2|^*(s)\,ds - t|x_2|^*(t).$$

Отсюда и из предыдущего следует

$$\int_0^t |x_1|^*(s)\,ds \leqslant \int_0^t |x_2|^*(s)\,ds.$$

Теорема доказана.

Авторы искренне признательны Е. М. Семенову за советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курицын Ю. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Неравенства чебышевского типа в симметричных пространствах. (В печати).
2. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.
3. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. М., ИЛ, 1961.
4. Calderon A. P. Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewich.— Studia Math, **26**, 3, 1966.
5. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.
6. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, М., 1958.
7. Семенов Е. М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций.— ДАН СССР, **156**, № 6, 1964.
8. Luxemburg W. A. Y. Rearragement-invariant Banach functional spaces.— Paper Pures and Appl. Math., 10, 1967.
9. Харди Г. Г., Литльвуд Дж. Е. и Полиа Г. Неравенства. М., ИЛ, 1948.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., «Мир», 1967.
11. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968.

Yu. G. Kuritsin, Yu. I. Petunin

ON THE THEORY OF LINEAR ESTIMATES OF THE MEAN OF RANDOM PROCESS

Summary

The estimates of the mathematical expectation of a stochastic process are considered, which are optimal in the sence of the norm of some symmetrical Banach space. The criterion of the optimum has been obtained; the problem of the optimal linear estimation of the mathematical expectation of the Gaussian process is considered.

Поступила в редколлегию 4.VII. 1969.