В. Н. НАГОРНЫЙ, асс.
Киевский университет

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. I

В теории случайных процессов хорошо известна теорема Котельникова — Шеннона, утверждающая, что стационарный процесс с ограниченным спектром однозначно восстанавливается по значениям на некоторой бесконечной последовательности равноотстоящих моментов времени. Эта теорема играет важную роль в теории передачи информации, а также при моделировании случайных процессов на быстродействующих ЭЦВМ. Строгое обоснование и различные обобщения теоремы Котельникова — Шеннона получены в работах Ю. К. Беляева [1], З. А. Пиранашвили [2], М. Рао [3], Ллойда [4]. В данной работе рассматриваются некоторые интерполяционные формулы для определенного класса случайных процессов.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с $M\xi(t) = 0$ и с функцией ковариации, представимой в виде

$$B(t, s) = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} f(t, \lambda)\overline{f(s, \mu)}\, F(d\lambda, d\mu), \tag{1}$$

где Λ — некоторое множество параметров λ, $F(A, A')$ — комплекснозначная функция множеств, аддитивная по обоим аргументам, положительно определенная и такая, что

$$\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty. \tag{2}$$

Пусть имеем последовательность узлов интерполяции $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Предположим, что функция $f(t, \lambda)$ относительно t может быть доопределена в плоскости комплексного переменного до целой функции, такой, что $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \sup\limits_{-\infty<t<\infty} |f(t, \lambda)| < \infty$, а $f(t, \lambda)$ и последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяют условию

$$n(\theta r) > C(\theta)\log M(r),$$
$$0 < \theta < \frac{1}{2}, \quad C(\theta) > \frac{1}{\log\frac{1-\theta}{\theta}}. \tag{3}$$

Здесь $n(r)$ — число узлов интерполяции, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, $M(r) = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \max\limits_{|z| \leqslant r} |f(z, \lambda)|$, $C(\theta)$ — некоторая постоянная, зависящая только от θ.

Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{\xi(a_m)}{\omega'_{k+1}(a_m)} \right] \omega_k(t), \tag{4}$$

где $\omega_k(z) = \prod\limits_{m=1}^{k} (z - a_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \quad \omega_0(z) = 1.$

Доказательство. В силу теоремы 1 [5]

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{f(a_m, \lambda)}{\omega'_{k+1}(a_m)} \right] \omega_k(t)$$

при $\lambda \in \Lambda$. Для любого фиксированного t, $|t| \leqslant \rho$ (ρ — произвольное фиксированное положительное число) и при достаточно большом n можно положить

$$r_n(t, \lambda) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{k+1} \frac{f(a_m, \lambda)}{\omega'_{k+1}(a_m)} \right] \omega_k(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \frac{|a_n|}{\theta}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (t - a_i) f(\zeta, \lambda)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (\zeta - a_i)(\zeta - t)} d\zeta.$$

Используя некоторые несложные оценки и условие (3), получаем

$$|r_n(t, \lambda)| \leqslant b_n(\theta, \rho), \tag{5}$$

$$b_n(\theta, \rho) = \frac{|a_n|}{|a_n| - \theta\rho} \exp\left\{ n \left[-\log \frac{1-\theta}{\theta} + \frac{1}{C(\theta)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \log\left(1 + \frac{\beta}{|a_n|}\right) \right] \right\}.$$

Заметим, что при любом фиксированном ρ

$$\lim_{n \to \infty} b_n(\theta, \rho) = 0 \tag{6}$$

и ряд

$$\sum_n b_n(\theta, \rho) \tag{7}$$

сходится. По известной теореме о спектральном представлении случайных функций [6]

$$\xi(t) = \int\limits_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda), \tag{8}$$

где $Z(d\lambda)$ случайная мера на Λ такая, что

$$MZ(A_1)\overline{Z(A_2)} = F(A_1, A_2).$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{k+1}\frac{\xi(a_m)}{\omega'_{k+1}(a_m)}\right]\omega_k(t). \tag{9}$$

По формуле (8) $\xi_n(t)$ можно представить в виде

$$\xi_n(t) = \int\limits_{\Lambda}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{k+1}\frac{f(a_m, \lambda)}{\omega'_{k+1}(a_m)}\right]\omega_k(t)\right\}Z(d\lambda).$$

Отсюда следует

$$M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2 =$$

$$= M\left|\int\limits_{\Lambda}\left\{f(t, \lambda) - \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{k+1}\frac{f(a_m, \lambda)}{\omega'_{k+1}(a_m)}\right]\omega_k(t)\right\}Z(d\lambda)\right|^2 =$$

$$= \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}\left|f(t, \lambda) - \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{k+1}\frac{f(a_m, \lambda)}{\omega'_{k+1}(a_m)}\right]\omega_k(t)\right| \times$$

$$\times\left|f(t, \mu) - \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=1}^{k+1}\frac{f(a_m, \mu)}{\omega'_{k+1}(a_m)}\right]\omega_k(t)\right|\cdot|F(d\lambda, d\mu)|.$$

В силу (5) имеем

$$M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2 \leqslant b_n^2(\theta, \rho)\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}|F(d\lambda, d\mu)|. \tag{10}$$

Из неравенства (10) с учетом (2) и (6) следует, что формула (4) справедлива, если сходимость ряда в правой части этой формулы понимать в среднем квадратичном. Но так как

$$\sum_{n} M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2 \leqslant \sum_{n} b_n^2(\theta, \rho)\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}|F(d\lambda, d\mu)|,$$

то, учитывая (2) и сходимость ряда $\sum\limits_{n} b_n(\theta, \rho)$, получим, что ряд, стоящий в правой части формулы (4), сходится с вероятностью единица при любом фиксированном t. Используя сепарабельность процесса $\xi(t)$, нетрудно убедиться, что этот ряд сходится равномерно в любом ограниченном интервале изменения t. Следовательно, формула (4) верна почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$.

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с функцией ковариации, представимой в виде (1), и функция $F(A, A')$ удовлетворяет условию (2). Возьмем последовательность узлов интерполяции $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и предположим, что $f(t, \lambda)$ относительно t может быть доопределена в плоскости комплексного переменного до целой функции, такой, что $f(t, \lambda)$ и последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{N(\theta r)}{\log M(r)} > 1, \quad 0 < \theta < 1, \tag{11}$$

где $N(r)$ — функция Неванлинна, определяемая равенством

$$N(r) = \sum_{|a_n| \leqslant r} \log \frac{r}{|a_n|},$$

$$M(r) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \max_{|z| \leqslant r} |f(z, \lambda)|.$$

Тогда почти для всех выборочных функций справедлива формула

$$\xi(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \xi(a_k) P_{nk}(t), \tag{12}$$

где

$$P_{nk}(t) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (t - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (a_k - a_j)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\theta^2 \bar{a}_k (a_j - t)}{|a_n|^2}\right).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Используется оценка остаточного члена, полученная в работе [5] (теорема 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Ю. К. Аналитические случайные процессы.— Теория вероят. и ее примен., 1959, 4, 4.
2. Пиранашвили З. А. К вопросу об интерполяции случайных процессов.— Теория вероят. и ее примен., 1967, 12, 4.
3. Rao M. M. Inference in stochastic processes. III. (Nonlinear prediction, Filtering and Sampling theorems).— Wahrscheinlichkeitstheorie verw, 8, 1967.
4. Lloyd S. P. A sampling theorem for stationary (wide sense) stochastic processes.— Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959.
5. Ибрагимов И. и Келдыш М. Об интерполяции целых функций.— Мат. сб., 1947, 20 (62), 2.
6. Яглом А. М. Спектральные представления для различных классов случайных функций.— Труды IV Всесоюзн. математ. съезда. Ленинград, т. 1. 1963.

V. N. Nagorny

ON INTERPOLATION OF RANDOM PROCESSES. I.

Summary

This paper deals with some interpolation formula for random processes.

Поступила в редколлегию 26.IX. 1969.