В. Н. НАГОРНЫЙ, асс.
Киевский университет

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. II

В данной работе рассматривается обобщенный интерполяционный ряд для некоторого класса случайных процессов. Рассмотрены также представления случайных процессов интерполяционными рядами Ньютона, Абеля и Абеля — Гончарова, которые являются частными случаями обобщенного интерполяционного ряда.

При доказательстве основных результатов работы используем известную теорему теории целых функций [1], которую сформулируем ниже.

Пусть задана бесконечная треугольная таблица произвольных действительных или комплексных чисел

$$\begin{array}{l} x_{00} \\ x_{01}x_{11} \\ x_{02}x_{12}x_{22} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{0n}x_{1n}x_{2n}\ \ldots\ x_{nn}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

которую будем обозначать

$$\{x_{kj}\} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ j;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Пусть $f(z)$ — целая функция. Обозначим

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Если для функции $f(z)$ и для чисел из (1) выполнены условия

$$\ln M(r) < \nu N(\theta r),\ 0 < \nu < \ln\frac{1-\theta}{\theta}; \quad r > r_\theta, \tag{2}$$

где $N(r)$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered} N(r) \geqslant n, \text{ если } \tau_n \leqslant r, \\ N(r) < n, \text{ если } \tau_n > r \end{gathered} \tag{3}$$

$$\left(\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \max|\zeta_k - \zeta_{k-1}|,\ \zeta_k = x_{0k} + \sum_{s=1}^{k}(x_{sk} - x_{s-1\,k})\ t_s, \quad 1 \geqslant t_1 \geqslant\right.$$

$\geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n > 0; \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$), а θ — произвольное действительное фиксированное число $0 < \theta < \frac{1}{2}$, то $f(z)$ представляется обобщенным интерполяционным рядом

$$f(z) = f(x_{00}) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk})}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(z), \tag{4}$$

равномерно сходящимся к $f(z)$ в любом круге конечного радиуса. $P_k(z)$ — многочлен степени k, который определяется следующим образом:

$$P_k(z) = k! \int\limits_{1} \ldots \int\limits_{k-1} \int\limits_{\zeta_0}^{z}\int\limits_{\xi_1}^{z_1} \ldots \int\limits_{\zeta_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_1 \ldots dz_k dt_1 \ldots dt_{k-1}, \tag{5}$$

где

$$\int\limits_{m} F(\zeta_m)\, dt_m = m! \int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1} \ldots \int\limits_0^{t_{m-1}} F(\zeta_m)\, dt_1 \ldots dt_m.$$

При доказательстве этой теоремы получена [1] оценка остаточного члена ряда (4)

$$|R_n(z)| < \frac{\eta}{(\eta-1)^2}\exp\{-n[\ln(\eta-1)-\nu]\}, \tag{6}$$

где η — произвольное действительное число, удовлетворяющее условиям

$$\ln(\eta - 1) > \nu, \quad \theta < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с $M\xi(t) = 0$ и с ковариационной функцией, представимой в виде

$$B(t, s) = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} f(t, \lambda)\overline{f(s, \mu)}\, F(d\lambda, d\mu), \tag{8}$$

где Λ — некоторое множество параметров λ, $F(A, A')$ — комплексная функция множеств, аддитивная по обоим аргументам положительно определенная и такая, что

$$\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty. \tag{9}$$

Предположим, что функция $f(t, \lambda)$ относительно t может быть доопределена в плоскости комплексного переменного до целой функции, такой, что $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\sup\limits_{-\infty<t<\infty}|f(t,\lambda)|<\infty$. Пусть $f(t,\lambda)$ и числа из (1) удовлетворяют условию

$$\ln M(r)<\nu N(\theta r),\ 0<\nu<\ln\frac{1-\theta}{\theta};\quad r>r_0, \tag{10}$$

где $M(r)=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\max\limits_{|z|=r}|f(z,\lambda)|$, а функция $N(r)$ (зависящая от выбора чисел в (1)) определяется из условий (3).

Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{\xi(x_{mk})}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t);\quad P_0(t)=1, \tag{11}$$

где $P_k(t)$ определяется равенством (5).

Доказательство. В силу (4) и условий теоремы 1

$$f(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk},\lambda)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t);\quad P_0(t)=1 \tag{12}$$

при всех $\lambda\in\Lambda$. Для любого фиксированного t, $|t|\leqslant\rho$ (ρ — произвольное фиксированное положительное число) и при достаточно больших n, $n>n_0(\rho)$, используя (6), получим

$$|R_n(t,\lambda)|=\left|f(t,\lambda)-\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk},\lambda)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t)\right|<$$

$$<\frac{\eta}{(\eta-1)^2}\exp\{-n[\ln(\eta-1)-\nu]\}=b_n(\eta,\nu). \tag{13}$$

Из условий (7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}b_n(\eta,\nu)=0 \tag{14}$$

и ряд с положительными членами $\sum\limits_n b_n(\eta,\nu)$ сходится. По известной теореме о спектральном представлении случайных функций [2],

$$\xi(t)=\int\limits_{\Lambda}f(t,\lambda)Z(d\lambda), \tag{15}$$

где $Z(d\lambda)$ — случайная мера на Λ такая, что

$$MZ(A_1)\overline{Z(A_2)}=F(A_1,A_2).$$

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{\xi(x_{mk})}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t). \qquad (16)$$

По формуле (15) $\xi_n(t)$ можно представить в виде

$$\xi_n(t)=\int\limits_{\Lambda}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk},\lambda)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t)\right\}Z(d\lambda). \qquad (17)$$

Отсюда следует

$$M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2=$$

$$=M\left|\int\limits_{\Lambda}\left\{f(t,\lambda)-\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk},\lambda)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t)\right\}Z(d\lambda)\right|^2=$$

$$=\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}\left|f(t,\lambda)-\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk},\lambda)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t)\right|\times$$

$$\times\left|f(t,\mu)-\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{f(x_{mk},\mu)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t)\right||F(d\lambda,d\mu)|. \qquad (18)$$

Используя условие (13), находим

$$M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2<b_n^2(\eta,\nu)\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}|F(d\lambda,d\mu)|. \qquad (19)$$

Из неравенства (19), учитывая (9) и (14), получаем, что формула (11) справедлива, если сходимость ряда в правой части формулы (11) понимать в среднем квадратичном.

Просуммировав неравенство (19) по n и учтя (9) и сходимость ряда $\sum\limits_{n} b_n(\eta,\nu)$, получим

$$\sum_{n}M|\xi(t)-\xi_n(t)|^2<\sum_{n}b_n^2(\eta,\nu)\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}|F(d\lambda,d\mu)|<\infty. \qquad (20)$$

Используя неравенство Чебышева и выражения (20), находим, что ряд $\Sigma P\{|\xi(t)-\xi_n(t)|>\varepsilon\}$ ($\varepsilon>0$ — произвольное) сходится. Принимая во внимание лемму Бореля — Кантелли, заключаем, что ряд, стоящий в правой части равенства (11), сходится с вероятностью единица при любом фиксированном t. Так как процесс $\xi(t)$ — сепарабельный, то нетрудно убедиться, что ряд сходится равномерно в любом ограниченном интервале изменения t. А это и означает, что формула (11) верна почти для всех выборочных функций процесса

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{\xi(x_{mk})}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_{mk}-x_{sk})}\right]P_k(t)$$

сходится к $\xi(t)$ с вероятностью единица.

Следствие 1. Если $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$ — сепарабельный случайный процесс с $M\xi(t)=0$ и ковариационной функцией, представимой в виде (представление Карунена [3])

$$B(t, s)=\int\limits_{\Lambda} f(t, \lambda)\overline{f(s, \lambda)}\,F(d\lambda), \tag{21}$$

где Λ — некоторое множество параметров λ, $\int\limits_{\Lambda} F(d\lambda)<\infty$ и функция $f(t, \lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула (11).

Доказательство следует из того, что (21) есть частный случай представления (8).

Следствие 2. Если $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$ — сепарабельный гармонизируемый случайный процесс с ковариационной функцией, представимой в виде (представление Лоэва [4])

$$B(t, s)=\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} e^{i(t\lambda-s\mu)}F(d\lambda, d\mu), \tag{22}$$

где Λ — ограниченное множество вещественных чисел, то функция $F(A_1, A_2)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Предположим, что

$$r\lambda^*<\nu N(\theta r),\ 0<\nu<\ln\frac{1-\theta}{\theta};\quad r>r_0, \tag{23}$$

где $\lambda^*=\max\{|\inf\Lambda|, |\sup\Lambda|\}$, а ν, $N(r)$ и θ определяются так же, как в теореме 1. Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула (11).

Доказательство следует из теоремы 1, если учесть, что $f(z, \lambda)=$ $=e^{iz\lambda}$ — целая функция и

$$M(r)=\sup_{\lambda\in\Lambda}\max_{|z|=r}|e^{iz\lambda}|=e^{R\lambda^*}.$$

Следствие 3. Если $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$ — сепарабельный стационарный в широком смысле процесс с функцией ковариации

$$B(t-s)=\int\limits_{\Lambda} e^{i(t-s)\lambda}F(d\lambda), \tag{24}$$

где Λ — ограниченное множество вещественных чисел, то $\int\limits_{\Lambda} F(d\lambda) < < \infty$.

Предположим, что

$$r\lambda^* < \nu N(\theta r),\quad 0 < \nu < \ln\frac{1-\theta}{\theta};\quad r > r_0, \tag{25}$$

где $\lambda^* = \max\{|\inf\Lambda|, |\sup\Lambda|\}$, а ν, $N(r)$ и θ определены так же, как в теореме 1. Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула (11).

Доказательство очевидно.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 почти все выборочные функции процесса $\xi(t)$ являются целыми функциями.

Теорема 2 непосредственно вытекает из общей теоремы, полученной в работе М. И. Ядренко [5].

Замечание. Из теоремы 2 следует, что процесс $\xi(t)$ имеет производные любого порядка с вероятностью единица.

До сих пор мы предполагали, что числа в (1) — произвольные, удовлетворяющие вместе с $f(t, \lambda)$ условиям теоремы 1. Рассмотрим некоторые интерполяционные формулы для случайного процесса $\xi(t)$ при специальном выборе чисел (узлов интерполяции) в (1).

Пусть имеем произвольную последовательность чисел $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ $(|x_0| < \cdots < |x_n| < \cdots)$.

Определим числа в (1) следующим образом:

$$x_{kk} = x_{kk+1} = \cdots = x_k \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{26}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Предположим, что функция $f(t, \lambda)$ и последовательность узлов интерполяции (26) удовлетворяют условию

$$\ln M(r) < \nu[n(\theta r) - 1],\quad 0 < \nu < \ln\frac{1-\theta}{\theta};\quad r > r_0, \tag{27}$$

где $n(r)$ — количество узлов интерполяции в круге $|z - x_0| \leqslant r$, а $M(r)$, ν и θ определены так же, как и в теореме 1. Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула

$$\xi(t) = \xi(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{\xi(x_m)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq m}}^{k}(x_m - x_s)}\right]\prod_{s=0}^{k-1}(t - x_s). \tag{28}$$

Формула (28) представляет интерполяционный ряд Ньютона для случайного процесса $\xi(t)$. Эта теорема в несколько иной формулировке получена в первой части данной работы.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1, если учесть, что при узлах интерполяции (26) $N(r) = n(r) - 1$ и $P_k(t) = \prod\limits_{s=0}^{k-1}(t - x_s)$.

Замечание. Если $f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$ и Λ — ограниченное числовое множество, то условие (27) можно заменить на

$$r\lambda^* < \nu[n(\theta r) - 1], \; 0 < \nu < \ln \frac{1-\theta}{\theta}; \quad r > r_0, \tag{29}$$

где $\lambda^* = \max\{|\inf \Lambda|, \; |\sup \Lambda|\}$.

Пусть имеем произвольную последовательность чисел $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ $(|x_0| < \cdots < |x_n| < \cdots)$ и определим узлы интерполяции в (1) таким образом:

$$x_{0j} = x_{1j} = \cdots = x_{jj} = x_j \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{30}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Предположим, что функция $f(t, \lambda)$ и последовательность узлов интерполяции (30) удовлетворяют условию

$$\ln M(r) < \nu[n(\theta r) - 1], \; 0 < \nu < \ln \frac{1-\theta}{\theta}; \quad r > r_0, \tag{31}$$

где $n(r)$ — количество узлов интерполяции в круге $|z - x_0| \leqslant r$, а $M(r)$, ν и θ те же, что и в теореме 1. Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{(k)}(x_k)}{k!} P_k(z), \tag{32}$$

где

$$P_k(z) = k! \int_{x_0}^{z} \int_{x_1}^{z_1} \cdots \int_{x_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_1 \ldots dz_k. \tag{33}$$

Формула (32) представляет обобщенный интерполяционный ряд Абеля — Гончарова для случайного процесса $\xi(t)$.

Доказательство следует из теоремы 1, если учесть, что $\xi^{(k)}(x_k)$ существует (в силу замечания к теореме 2) для любого k ($k = 0, 1, \ldots$) и при узлах интерполяции (30) $N(r) = n(r) - 1$, а $\zeta_k = x_k$ и, следовательно,

$$P_k(z) = k! \int_{x_0}^{z} \int_{x_1}^{z_1} \cdots \int_{x_{k-1}}^{z_{k-1}} dz_1 \ldots dz_k.$$

Следствие. Положим в формуле (30) $x_j = j$ ($j = 0, 1, \ldots$). Тогда узлы интерполяции в (1) будут иметь вид

$$x_{0j} = x_{1j} = \cdots = x_{jj} = j \qquad (j = 0, 1, \ldots). \tag{34}$$

Предположим, что случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а функция $f(t, \lambda)$ и последовательность узлов интерполяции (34) удовлетворяют условию

$$\ln M(r) < \nu\,[n(\theta r) - 1], \quad 0 < \nu < \ln \frac{1-\theta}{\theta}; \quad r > r_\theta, \tag{35}$$

где $n(r)$ — количество узлов интерполяции в круге $|z| \leqslant r$.

Тогда почти для всех выборочных функций процесса $\xi(t)$ справедлива формула

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{(k)}(k)}{k!}\, t\,(t-k)^{k-1}. \tag{36}$$

Формула (36) представляет интерполяционный ряд Абеля для случайного процесса $\xi(t)$.

Доказательство. Формула (36) — частный случай формулы (32). Если в (30) $x_k = k\,(k = 0, 1, \ldots)$, то в этом случае легко получить явный вид $P_k(t)$, вычислив интеграл (33). Получим $P_k(t) = t\,(t-k)^{k-1}$.

Замечание. Если $f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$ и Λ — ограниченное числовое множество, то условия (31) и (35) можно заменить условием (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., «Наука», 1967.
2. Яглом А. М. Спектральные представления для различных классов случайных функций.— Труды IV Всесоюзного математического съезда. Ленинград, т. 1, 1963.
3. Karhunen K. Uber lineare methoden in der wahrscheinlickeitsrechnung.— Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A, 1, 37, 1947.
4. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.
5. Ядренко М. Й. Аналітичні випадкові поля.— Вісник КДУ, сер. матем. та мех., 11, 1969.

V. N. Nagorny

ON INTERPOLATION OF RANDOM PROCESS. II.

Summary

This paper deals with the generalizing interpolation series for random processes. Some representations of random processes by interpolation series of various type are considered.

Поступила в редколлегию 10.X. 1969.