В. Б. НЕВЗОРОВ, асп.
Ленинградский университет

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СИММЕТРИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К ПРЕДЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Пусть $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю. Обозначим

$$\sigma_k^2 = EX_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2;$$

$L_{n,p} = B_n^{-p} \sum_{j=1}^{n} E\,|X_j|^p$ — дробь Ляпунова порядка p;

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} X_j; \quad \overline{S}_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k;$$

$G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, если $x \geqslant 0$, и $G(x) = 0$, если $x < 0$.

Если $0 < E\,|X_k|^3 < \infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то из работы Ю. В. Прохорова [1] следует

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x) \right| = O\left(L_{n,3}^{\frac{1}{4}} \log^2 L_{n,3}\right). \tag{1}$$

С. Сойер [2] показал, что для любого $p > 2$ и любого n

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x) \right| \leqslant 300 L_{n,p}^{\frac{1}{p+1}}. \tag{2}$$

Для симметричных случайных величин в настоящей работе удается получить лучшую скорость сходимости.

Теорема 1. Если $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых симметричных случайных величин и если $0 < E\,|X_j|^p < \infty$ для некоторого $p > 2$ и всех j, то для любого натурального n

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x) \right| \leqslant CL_{n,p}^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

где C — абсолютная константа.

Доказательство. Для симметричных случайных величин верно следующее неравенство ([3], стр. 261)

$$P\{\overline{S}_n \geqslant x\} \leqslant 2P\{S_n \geqslant x\}. \tag{4}$$

Фиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и натуральные n и вводим случайные величины $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ следующим образом:

$$Y_j = \begin{cases} X_j, & \text{если } X_j \leqslant \varepsilon B_n \\ 0, & \text{если } X_j > \varepsilon B_n \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Нам в дальнейшем потребуются обозначения

$$S'_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j; \quad \overline{S}'_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S'_k;$$

$$A'_n = \sum_{k=1}^{n} EY_k; \quad B'^2_n = \sum_{k=1}^{n} E|Y_k - EY_k|^2;$$

$$L'_{n,p} = B'^{-p}_n \sum_{k=1}^{n} E|Y_k - EY_k|^p;$$

$F_k(x)$ и $F'_k(x)$ — соответственно функции распределения случайных величин X_k и Y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

$\Lambda_n(\varepsilon) = B_n^{-2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x)$ — дробь Линдеберга для случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Верно следующее неравенство:

$$P\{\overline{S}_n \geqslant x\} \geqslant P\{\overline{S}'_n \geqslant x\} = \sum_{k=1}^{n} P\{S'_1 < x; \ \ldots; \ S'_{k-1} < x; \ \ S'_k \geqslant x\}. \tag{6}$$

Так как $\frac{1}{2} \geqslant P\{S_n - S_k > 0\} \geqslant P\{S'_n - S'_k > 0\}$ для $0 < k \leqslant n$, то

$$P\{\overline{S}_n \geqslant x\} \geqslant 2 \sum_{k=1}^{n} P\{S'_1 < x; \ \ldots; \ S'_{k-1} < x;$$

$$S'_k \geqslant x\} P\{S'_n - S'_k > 0\} = 2 \sum_{k=1}^{n} P\{S'_1 < x; \ \ldots; \ S'_{k-1} < x; \ S'_k \geqslant x;$$

$$S_n' > S_k'\} = 2\sum_{k=1}^{n} P\{S_1' < x;\ \ldots;\ S_{k-1}' < x;\ x \leqslant S_k' < x + \varepsilon B_n;$$

$$S_n' > S_k'\} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} P\{S_1' < x; \ldots;\ S_{k-1}' < x;\ x \leqslant S_k' < x + \varepsilon B_n;$$

$$S_n' \geqslant x + \varepsilon B_n\} = 2\sum_{k=1}^{n} P\{S_1' < x;\ \ldots;\ S_{k-1}' < x;\ S_k' \geqslant x;$$

$$S_n' \geqslant x + \varepsilon B_n\} = 2P\{S_n' \geqslant x + \varepsilon B_n\}. \tag{7}$$

При доказательстве (7) использовано $Y_k \leqslant \varepsilon B_n$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Получено неравенство

$$2P\{S_n' \geqslant x + \varepsilon B_n\} \leqslant P\{\overline{S}_n \geqslant x\} \leqslant 2P\{S_n \geqslant x\}, \tag{8}$$

верное для всех x.

Запишем (8) следующим образом:

$$2P\left\{\frac{S_n}{B_n} < x\right\} - 1 \leqslant P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} \leqslant 2P\left\{\frac{S_n'}{B_n} < x + \varepsilon\right\} - 1. \tag{9}$$

Если $x \geqslant 0$, то $2\Phi(x) - 1 = G(x)$, и тогда из (9) получаем

$$2\left[P\left\{\frac{S_n}{B_n} < x\right\} - \Phi(x)\right] \leqslant P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[P\left\{\frac{S_n'}{B_n} < x + \varepsilon\right\} - \Phi(x)\right]. \tag{10}$$

Далее,

$$B_n'^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_k'(x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dF_k'(x)\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) - \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon B_n} x dF_k(x)\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) - \left(\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x dF_k(x)\right)^2\right\}, \tag{11}$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} x dF_k(x) = 0$ при любом k.

Пусть

$$R_n(x) = \left|P\left\{\frac{S_n}{B_n} < x\right\} - \Phi(x)\right|;$$

$$R_n'(x) = \left|P\left\{\frac{S_n' - A_n'}{B_n'} < x\right\} - \Phi(x)\right|; \tag{12}$$

$$\overline{R}_n(x) = \left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right|.$$

Из (10) получаем для $x \geqslant 0$

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 2\max\left\{R_n(x);\ R_n'\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right)\right\} + $$
$$+ 2\left|\Phi\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right) - \Phi(x)\right|.$$

Учитывая, что

$$x \geqslant 0;\quad B_n' \leqslant B_n;\quad A_n' \leqslant 0;\quad \varepsilon > 0 \tag{13}$$

и поэтому $\Phi\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right) \geqslant \Phi(x)$, имеем для неотрицательных x

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 2\max\left\{R_n(x);\ R_n'\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right)\right\} + $$
$$+ 2\left(\Phi\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right) - \Phi(x)\right). \tag{14}$$

Для $x < 0$ выводим

$$0 \leqslant P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} = P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(0) \leqslant P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < 0\right\} - G(0),$$

т. е.

$$\overline{R}_n(x) = P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x) = P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} \leqslant \overline{R}_n(0),$$

$$\sup_x R_n(x) = \sup_{x \geqslant 0} \overline{R}_n(x).$$

Поэтому можем считать при доказательстве, что $x \geqslant 0$. Для $2 < p \leqslant 3$ имеем

$$R_n(x) \leqslant c_1 L_{n,p};$$
$$R_n'(x) \leqslant c_1 L_{n,p}'. \tag{15}$$

В (15) c_1 — абсолютная константа (существование такой константы для $2 < p \leqslant 3$ доказано в [4]).

Для $p > 2$ и любого $\varepsilon > 0$ следует [6]

$$R_n(x) \leqslant c_2\left(\frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-2}} + \varepsilon\right); \tag{16}$$

$$R_n'(x) \leqslant c_2\left(\frac{L_{n,p}'}{\varepsilon^{p-2}} + \varepsilon\right),$$

где c_2 — абсолютная константа.

Так как для $2 < p \leqslant 3$ оценка (15) лучше, чем (16), то (16) будем использовать при $p > 3$. Неравенства (16) вытекают из [6] (теорема 2) при учете $\Lambda_n(\varepsilon) \leqslant \frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-2}}$ для $p > 2$.

Имеем

$$\Phi\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right) - \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\left(\frac{B_n}{B_n'} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{|A_n'| + \varepsilon B_n}{B_n'}. \tag{17}$$

Последнее неравенство получаем из известных свойств $\Phi(x)$, учитывая (13).

Выведем некоторые нужные нам соотношения

$$E|Y_k - EY_k|^p \leqslant 2^p(E|Y_k|^p + |E^pY_k|),$$

но

$$E|Y_k| = \int_{\varepsilon B_n}^{\infty} xdF_k(x);$$

$$\left(\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} xdF_k(x)\right)^p \leqslant \left(\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} dF_k(x)\right)^{p-1}\left(\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^p dF_k(x)\right) \leqslant \int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^p dF_k(x),$$

$$E|Y_k|^p + |E^pY_k| \leqslant \int_{-\infty}^{\varepsilon B_n} |x|^p dF_k(x) + \int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^p dF_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p dF_k(x),$$

и эти неравенства дают

$$E|Y_k - EY_k|^p \leqslant 2^p E|X_k|^p; \tag{18}$$

$$B_n^2 \geqslant B_n'^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) - \left(\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} xdF_k(x)\right)^2\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) - \sum_{k=1}^{n} P\{X_k \geqslant \varepsilon B_n\}\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^2 dF_k(x) \geqslant$$

$$\geqslant B_n^2 - \sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^2 dF_k(x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^2 dF_k(x) =$$

$$= B_n^2\left(1 - \frac{3}{2B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x^2 dF_k(x)\right) \geqslant B_n^2\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right). \tag{19}$$

Получаем из (18) и (19)

$$L'_{n,p} \leqslant \frac{2^p \sum_{k=1}^{n} E\,|X_k|^p}{B_n^p\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{p}{2}}} = \frac{2^p}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{p}{2}}} L_{n,p}. \qquad (20)$$

(Здесь считаем, что $1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon) > 0$, т. е. $\Lambda_n(\varepsilon) < \frac{2}{3}$, так как иначе имеем, что $\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)$ и (23) выполнено сразу),

$$\frac{B_n}{B'_n} - 1 \leqslant \frac{1}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \leqslant \frac{\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{|A'_n| + \varepsilon B_n}{B'_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon B_n}^{\infty} x\,dF_k(x) + \varepsilon B_n}{B'_n} \leqslant \frac{\varepsilon B_n + \frac{B_n}{\varepsilon}\Lambda_n(\varepsilon)}{B_n\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon + \frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon}}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (21)$$

Пусть $c_3 = \max\{c_1;\ 2c_2\}$. Неравенства (15) и (20) дают

$$R_n(x) \leqslant c_3 L_{n,p};$$

$$R'_n(x) \leqslant c_3 L'_{n,p} \leqslant \frac{2^p c_3}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{p}{2}}} L_{n,p} \leqslant \frac{8c_3}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{3}{2}}} L_{n,p}$$

для $2 < p \leqslant 3$. Подставив в (16) $\varepsilon = L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}$, имеем

$$R_n(x) \leqslant 2c_2 L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}} \leqslant c_3 L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}$$

и аналогично

$$R'_n(x) \leqslant c_3 L'^{\frac{1}{p-1}}_{n,p} \leqslant c_3 \left(\frac{2^p}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{p}{2}}} L_{n,p} \right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}c_3}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{3}{4}}} L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}$$

для $p > 3$. Из последних неравенств, используя (14), (17) и (21), получаем

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{16c_3 \max\{L_{n,p};\ L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}\}}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\left(\varepsilon + \frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{2\pi e}} \frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

Пусть $1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon) > \frac{1}{k^2}$ $(k > 1)$. Тогда

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 16k^3 c_3 \max\{L_{n,p};\ L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}\} + \frac{2k}{\sqrt{2\pi}}\left(\varepsilon + \frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) + \frac{3k}{\sqrt{2\pi e}}\Lambda_n(\varepsilon).$$

Если $1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{k^2}$, то

$$\Lambda_n(\varepsilon) \geqslant \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right); \ \overline{R}_n(x) \leqslant \frac{3}{2}\frac{k^2}{k^2-1}\Lambda_n(\varepsilon).$$

И в том, и в другом случае при любом $k > 1$

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 16k^3 c_3 \max\{L_{n,p};\ L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k\left(\varepsilon + \frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ 3\max\left\{\frac{k}{\sqrt{2\pi e}};\ \frac{k^2}{2(k^2-1)}\right\}\Lambda_n(\varepsilon) \tag{23}$$

или

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 16k^3 c_3 \max\{L_{n,p};\ L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}\} + \frac{2k}{\sqrt{2\pi}}\left(\varepsilon + \frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-1}}\right) +$$

$$+ \max\left\{\frac{k}{\sqrt{2\pi e}};\ \frac{k^2}{2(k^2-1)}\right\}\frac{3L_{n,p}}{\varepsilon^{p-2}}. \tag{24}$$

Положив $\varepsilon = L_{n,p}^{\frac{1}{p}}$, имеем

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 16k^3c_3 \max\left\{L_{n,p};\ L_{n,p}^{\frac{1}{p-1}}\right\} + \frac{4k}{\sqrt{2\pi}} L_{n,p}^{\frac{1}{p}} + \\ + 3\max\left\{\frac{k}{\sqrt{2\pi e}};\ \frac{k^2}{2(k^2-1)}\right\} L_{n,p}^{\frac{2}{p}}. \tag{25}$$

Можем считать $L_{n,p} < 1$, так как иначе тривиально

$$\sup_x \overline{R}_n(x) \leqslant L_{n,p}^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда при любом $k > 1$ и $x \geqslant 0$

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \left[16k^3c_3 + \frac{4k}{\sqrt{2\pi}} + 3\max\left\{\frac{k}{\sqrt{2\pi e}};\ \frac{k^2}{2(k^2-1)}\right\}\right] L_{n,p}^{\frac{1}{p}}. \tag{26}$$

(Когда $L_{n,p} \geqslant 1$, (26) имеет место, так как $\frac{k^2}{k^2-1} > 1$, и коэффициент перед $L_{n,p}^{\frac{1}{p}}$ больше единицы).

Неравенство (26) не только доказывает теорему 1, но и дает возможность в данных условиях, выбирая соответствующее k, минимизировать абсолютную константу $\overline{C}$ в (3).

Замечание. Если в условиях теоремы 1 добавить ограничение $2 < p \leqslant 3$, то (26) будет верно с заменой c_3 на c_1, и абсолютная константа C в (3) может быть понижена. В частности, для $p = 3$ неравенство (3) можно записать следующим образом:

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right| \leqslant 30 L_{n,3}^{\frac{1}{3}}. \tag{27}$$

Действительно, для $p = 3$ справедливо (15) с константой В. М. Золотарева [5] в качестве c_1. Подставив в (26) $c_3 = c_1 = 0{,}9051$ и взяв $k = 1{,}1$, получим (27).

В теореме 2 найдена оценка скорости сходимости к предельному закону в зависимости не только от n, но и от x.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для любого $2 < p \leqslant 3$, натурального n и любого положительного x справедливо неравенство

$$\left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right| \leqslant \frac{\overline{C}\max\left\{L_{n,p}^{\frac{1}{p}};\ L_{n,p}\right\}}{1+x^p}, \tag{28}$$

где $\overline{C}$ — абсолютная константа.

Из теоремы 2 следует, что если $L_{n,p} \geqslant 1$, то

$$\left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right| \leqslant \frac{\overline{C} L_{n,p}}{1+x^p}. \tag{29}$$

Для более интересного, с точки зрения приложений, случая $L_{n,p} < 1$

$$\left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right| \leqslant \frac{\overline{C} L_{n,p}^{\frac{1}{p}}}{1+x^p}. \tag{30}$$

Доказательство. Имеем

$$0 \leqslant P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} \geqslant x\right\} \leqslant 2P\left\{\frac{S_n}{B_n} \geqslant x\right\} =$$

$$= 2\left[\Phi(x) - P\left\{\frac{S_n}{B_n} < x\right\}\right] + 2(1-\Phi(x)) \leqslant 2R_n(x) + 2(1-\Phi(x)) \tag{31}$$

($R_n(x)$ и используемые ниже $R_n'(x)$ и $\overline{R}_n(x)$ определены в (12)). Но

$$R_n(x) \leqslant \frac{c_5 L_{n,p}}{1+|x|^p}, \tag{32}$$

где c_5 — абсолютная константа [7].

У нас $x > 0$. Имеем

$$1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^p}\int_x^\infty t^p e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^p}\left(\int_1^\infty t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right), \tag{33}$$

$$1-G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}x^p}\left(\int_1^\infty t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right). \tag{34}$$

Пусть

$$c_6 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_1^\infty t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right). \tag{35}$$

Получаем

$$-(2c_5 L_{n,p} + 2c_6) \leqslant x^p\left(P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right) =$$

$$= x^p\left((1-G(x)) - P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} \geqslant x\right\}\right) \leqslant 2c_5 L_{n,p} + 2c_6. \tag{36}$$

Неравенства $-1 \leqslant P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x) \leqslant 1$ и (36) дают

$$\left| P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right| \leqslant \frac{2c_5 L_{n,p} + 2c_6 + 1}{1 + x^p}. \tag{37}$$

Если $L_{n,p} \geqslant 1$, то

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{(2c_5 + 2c_6 + 1) L_{n,p}}{1 + x^p}$$

и (28) доказано с $\overline{C} = c_7 = (2c_5 + 2c_6 + 1)$. Поэтому будем считать $L_{n,p} < 1$. Тогда из (37) получаем

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{2c_5 + 2c_6 + 1}{1 + x^p} = \frac{c_7}{1 + x^p}. \tag{38}$$

Вернемся к (14):

$$\overline{R}_n(x) \leqslant 2\max\left\{R_n(x);\ R_n'\left(\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}\right)\right\} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_x^{\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где

$$R_n(x) \leqslant \frac{c_5 L_{n,p}}{1 + |x|^p};\quad R_n'(x) \leqslant \frac{c_5 L_{n,p}'}{1 + |x|^p}.$$

Учитывая (13), следующее из (13) неравенство $\frac{xB_n - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'} \geqslant x > 0$

и то, что $L_{n,p}' \leqslant \frac{8}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{3}{2}}} L_{n,p}\ (2 < p \leqslant 3)$, получаем

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{16 c_5 L_{n,p}}{\left(1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{3}{2}} (1 + x^p)} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x(B_n - B_n') - A_n' + \varepsilon B_n}{B_n'} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{39}$$

Считаем $1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon) > \frac{1}{4}$ $\left(\text{тогда } 1 - \frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon) > 0 \text{ и (39) справедливо}\right)$, так как в противном случае $\Lambda_n(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}$, и, сравнивая с

(38), имеем

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{2c_7\Lambda_n(\varepsilon)}{1+x^p} \leqslant \frac{2c_7L_{n,p}}{(1+x^p)\,\varepsilon^{p-2}}, \tag{40}$$

что сразу дает неравенство (42).

Итак, $\Lambda_n(\varepsilon) < \frac{1}{2}$ Из (21) и (39) выводим

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \frac{16c_5L_{n,p}}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{3}{2}}(1+x^p)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}}xe^{-\frac{x^2}{2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\left(\varepsilon+\frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)}{\left(1-\frac{3}{2}\Lambda_n(\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{41}$$

Легко проверить, что для $2 < p \leqslant 3$

$$1+x^p \leqslant 8\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right) \leqslant 8e^{\frac{x^2}{2}};$$

$$x(1+x^p) \leqslant 8\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}\right) \leqslant 8e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Тогда

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \left[128c_5L_{n,p}+\frac{48}{\sqrt{2\pi}}\Lambda_n(\varepsilon)+\frac{32}{\sqrt{2\pi}}\left(\varepsilon+\frac{\Lambda_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right]\frac{1}{1+x^p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[128c_5L_{n,p}+\frac{48}{\sqrt{2\pi}}\frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-2}}+\frac{32}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-1}}+\varepsilon\right)\right]\frac{1}{1+x^p}$$

и тем более

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \left[128c_5L_{n,p}+\max\left\{\frac{48}{\sqrt{2\pi}};\quad 2c_7\right\}\frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{32}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{L_{n,p}}{\varepsilon^{p-1}}+\varepsilon\right)\right]\frac{1}{1+x^p}. \tag{42}$$

Взяв $\varepsilon = L_{n,p}^{\frac{1}{p}}$, получим

$$\overline{R}_n(x) \leqslant \left[128c_5L_{n,p}+\max\left\{\frac{48}{\sqrt{2\pi}};\quad 2c_7\right\}L_{n,p}^{\frac{2}{p}}+\frac{64}{\sqrt{2\pi}}L_{n,p}^{\frac{1}{p}}\right]\frac{1}{1+x^p} \leqslant$$

$$\leqslant \left[128c_5+\max\left\{\frac{48}{\sqrt{2\pi}};\quad 2c_7\right\}+\frac{64}{\sqrt{2\pi}}\right]\frac{L_{n,p}^{\frac{1}{p}}}{1+x^p}$$

(так как здесь рассматривается случай $L_{n,p} < 1$, и поэтому для $p > 2$ верно $L_{n,p} < L_{n,p}^{\frac{2}{p}} < L_{n,p}^{\frac{1}{p}}$). Утверждение (28) доказано с $\overline{C} = c_8 = \left(128c_5 + \max\left\{\frac{48}{\sqrt{2\pi}};\ 2c_7\right\} + \frac{64}{\sqrt{2\pi}}\right)$. Взяв $\overline{C} = \max\{c_7;\ c_8\} = c_8$, можем окончательно убедиться, что для $L_{n,p} \geqslant 1$ и $L_{n,p} < 1$ верно

$$\left|P\left\{\frac{\overline{S}_n}{B_n} < x\right\} - G(x)\right| \leqslant \frac{\overline{C}\max\{L_{n,p};\ L_{n,p}^{\frac{1}{p}}\}}{1+x^p}.$$

Теорема 2 доказана.

Автор выражает признательность В. В. Петрову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1, 2, 1956.
2. Sawyer S. Uniform limit theorems for the maximum cumulative sum in probability.— Trans. Amer. Math. Soc., 132, 2, 1968.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ., 1962.
4. Петров В. В. Одна оценка отклонения распределения суммы независимых случайных величин от нормального закона.— ДАН СССР, 160, 5, 1965.
5. Золотарев В. М. Некоторые неравенства теории вероятностей и их применение к уточнению теоремы А. М. Ляпунова.— ДАН СССР, 177, 3, 1967.
6. Осипов Л. В. Уточнение теоремы Линдеберга.— Теория вероятн. и ее примен., 11, 2, 1966.
7. Бикялис А. Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме.— Литовский мат. сб., VI, 3, 1966.

V. B. Nevzorov

ON A CONVERGENCE RATE FOR THE DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM CUMULATIVE SUMS OF INDEPENDENT SYMMETRIC RANDOM VARIABLES

Summary

Uniform and non-uniform estimates of deviation of distribution of the maximum of sums of independent symmetric non-identically distributed random variables from the one-sided normal distribution are obtained.

Поступила в редколлегию 19.V. 1969.