А. И. ПОНОМАРЕНКО, ст. препод.
Киевский университет

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА КОММУТАТИВНОЙ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ

Основным результатом спектральной теории обобщенных однородных в широком смысле случайных полей на евклидовом пространстве R^n является представление такого поля в виде «преобразования Фурье» ортогональной случайной меры и представление его корреляционного функционала в виде «преобразования Фурье» меры степенного роста [1]. С другой стороны, аналогичные представления имеют место и для обычных однородных полей на коммутативных локально компактных группах [2].

Существование развитой теории обобщенных функций на локально компактных группах [3—6] дает возможность изучать более широкий класс однородных случайных полей, а именно, обобщенные однородные поля на коммутативных локально компактных группах. В настоящей работе рассматриваются спектральные представления, эргодические свойства и линейные преобразования таких полей. Часть результатов была опубликована в работе [7].

Через G будем обозначать мультипликативно записываемую коммутативную локально компактную группу. Группу характеров группы G будем обозначать через Γ, а значение характера χ на элементе $g \in G$ — через $\chi(g)$. Для простоты изложения предполагаем, что группа G — сепарабельная. Как следует из работ [4, 6], основные результаты остаются справедливыми и в общем случае.

Поскольку группа G является проективно-лиевой, то пространства основных бесконечно дифференцируемых финитных функций $D(G)$ и быстро убывающих функций $S(G)$, а также соответствующие пространства обобщенных функций $D'(G)$ и $S'(G)$ могут быть введены как соответственно индуктивные и проективные пределы подобных пространств на некоторых группах Ли, построенных по группе G [3—5].

Основные свойства таких пространств подобны свойствам соответствующих пространств на R^n. $D(G)$ и $S(G)$ являются ядерными пространствами, $D(G) \subset S(G)$, $D(G)$ плотно в $S(G)$ и топология $D(G)$ тоньше топологии $S(G)$. Преобразование Фурье является топологическим изоморфизмом пространства $S(G)$ на пространство $S(\Gamma)$. Имеют место включения

$$D(G) \subset C_0(G) \subset L_2(G) \subset D'(G),$$

где $C_0(G)$ — пространство непрерывных функций с компактными носителями на G, и каждое пространство в этой цепочке плотно в последующем пространстве.

Билинейной форме $K(\cdot, \cdot)$ на $D(G) \times D(G)$, непрерывной по каждому из переменных, отвечает единственная обобщенная функция $T_K \in D'(G \times G)$ такая, что

$$D(G) \times D(G) \ni (\varphi, \psi) \to K(\varphi, \psi) = T_K(\varphi \otimes \dot{\psi}), \ \psi$$

и наоборот (теорема о ядре) [4]. Элементы $T \in D'(G \times G)$ и билинейные непрерывные по каждому переменному формы на $D(G) \times \times D(G)$ называются ядрами на G. Ядро $K(\varphi, \psi)$ называется положительно определенным, если для любой основной функции $\varphi \in \in D(G)$, $K(\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Обобщенная функция $T \in D'(G)$ называется положительно определенной, если построенное по ней ядро $K(\varphi, \psi) = T(\psi^\circ * \varphi)$, где

$$\psi^0 * \varphi(g) = \int\limits_G \varphi(gh) \overline{\psi(h)}\, dh,$$

положительно определено.

§ 1. Спектральные представления обобщенных однородных случайных полей и их ковариационных ядер

Обобщенные случайные поля второго порядка на G можно определить аналогично случаю $G = R^n$. Под такими полями будем понимать непрерывные в среднем квадратичном линейные случайные функционалы на $D(G)$, значениями которых служат классы эквивалентности комплекснозначных случайных величин второго порядка, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, образующие гильбертово пространство $L_2(\Omega)$.

Функционал математического ожидания $m(\varphi)$ и ковариационное ядро $B(\varphi, \psi)$ поля второго порядка $\xi(\varphi)$ определяются равенствами

$$m(\varphi) = M\xi(\varphi), \ B(\varphi, \psi) = M\xi(\varphi)\overline{\xi(\psi)}.$$

Для того чтобы обобщенная функция $m(\varphi)$ и эрмитово ядро $B(\varphi, \psi)$ на G были соответственно функционалом математического ожидания и ковариацнонным ядром некоторого обобщенного случайного поля второго порядка $\xi(\varphi)$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $R(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) - m(\varphi)\overline{m(\psi)}$ было положительно определенным.

Для обобщенного поля $\xi(\varphi)$ на G введем сопряженное поле $\bar{\xi}(\varphi)$, полагая $\bar{\xi}(\varphi) = \overline{\xi(\bar{\varphi})}$, где черта в правой части означает переход к комплексно сопряженному числу. Поле $\xi(\varphi)$ называется действительным, если $\xi(\varphi) = \bar{\xi}(\varphi)$.

Обобщенное поле $\xi(\varphi)$ на G будем называть однородным в широком смысле, если его функционал математического ожидания и ковариационное ядро инвариантны относительно всех сдвигов на G

$$m(\tau_s\varphi) = m(\varphi), \; B(\tau_s\varphi, \tau_s\psi) = B(\varphi, \psi),$$

где τ_s — оператор сдвига $\tau_s\varphi(g) = \varphi(sg)$.

Теорема 1. Ковариационное ядро обобщенного однородного поля $\xi(\varphi)$ на группе G допускает следующее спектральное представление

$$B(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \varphi^{\frown}(\chi)\, \overline{\psi^{\frown}(\chi)}\, F(d\chi), \tag{1}$$

где $\varphi^{\frown}$ — преобразование Фурье основной функции φ

$$\varphi^{\frown}(\chi) = \int_{G} \chi(g)\, \varphi(g)\, dg,$$

а F — положительная борелевская мера на группе Γ такая, что обобщенную функцию $T \in D'(G)$, определяемую равенством

$$T(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi^{\frown}(\chi)\, F(d\chi), \tag{2}$$

(ковариационную функцию поля $\xi(\varphi)$) можно единственным образом продолжить до медленно растущей обобщенной функции на G. При этом мера F определяется единственным образом и для всякого компактного или всякого борелевского множества группы Γ, содержащегося в некотором компактном множестве Δ найдется такая последовательность основных функций $\{\varphi_n^{\Delta}\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} B(\varphi_n^{\Delta}, \varphi_n^{\Delta}) = F(\Delta). \tag{3}$$

Доказательство. По [5], существует единственным образом определяемая положительно определенная обобщенная функция $T \in D'(G)$ такая, что $B(\varphi, \psi) = T(\psi^0 * \varphi)$. В силу результатов К. Морена [5] и А. Вавжинчика [6], обобщающих известные теоремы Бохнера — Шварца и Райкова — Вейля, каждая положительно определенная функция $T \in D'(G)$ допускает представление (2), где мера F обладает перечисленными выше свойствами. Учитывая, что $(\psi^0 * \varphi)^{\frown} = \varphi^{\frown}\overline{\psi^{\frown}}$, получаем представление (1), и остается только доказать соотношение (3).

Будем считать, что ядро $B(\varphi, \psi)$ невырождено, т. е. из $B(\varphi, \varphi) = 0$ следует, что $\varphi = 0$. Это не будет ограничивать общность рассуждения, так как в противном случае можно рассматривать фактор-пространство $D(G)/N$, где $N = \{\varphi : B(\varphi, \varphi) = 0\}$, на котором ядро B уже не будет вырожденным.

Введем в пространстве $D(G)$ скалярное произведение $(\cdot\,|\,\cdot)$, полагая $(\varphi|\psi) = B(\varphi, \psi)$. Обозначим через H пополнение $D(G)$ относительно этого скалярного произведения. Рассмотрим теперь функциональное множество $\widehat{D}(G) = \{\varphi^{\wedge}(\chi) : \varphi(g) \in D(G)\}$. Очевидно, что $\widehat{D}(G)$ — линейное пространство. Далее, из (1) следует, что $\widehat{D}(G) \subset L_2(\Gamma, F)$. Введем в $\widehat{D}(G)$ скалярное произведение, полагая

$$(\varphi^{\wedge}\,|\,\psi^{\wedge}) = B(\varphi, \psi), \quad \varphi, \ \psi \in D(G). \tag{4}$$

Тогда отображение $D(G) \ni \varphi \to \varphi^{\wedge} \in \widehat{D}(G)$ является изометрией $D(G)$ на $\widehat{D}(G)$.

Лемма 1. $\widehat{D}(G)$ всюду плотно в $L_2(\Gamma, F)$.

Так как F — борелевская мера на Γ, то пространство $D(\Gamma)$ будет плотным в $L_2(\Gamma, F)$ в его метрике.

Поскольку $D(\Gamma) \subset S(\Gamma)$ и плотно там, а $S(\Gamma) \subset L_2(\Gamma, F)$ в силу теоремы 1, то $S(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma, F)$. Далее, оператор Фурье является топологическим изоморфизмом $S(G)$ и $S(\Gamma)$, поэтому из включения $D(G) \subset S(G)$ следует, что $\widehat{D}(G) \subset S(\Gamma)$ и $\widehat{D}(G)$ плотно в $S(\Gamma)$.

Таким образом, мы получили цепочку включений $\widehat{D}(G) \subset S(\Gamma) \subset$ $\subset L_2(\Gamma, F)$, в которой каждое предшествующее пространство плотно в последующем. Отсюда немедленно получаем утверждение леммы.

Возвратимся к доказательству соотношения (3). По приведенной лемме отображение $\varphi \to \varphi^{\wedge}$ можно продолжить до изометрии между гильбертовыми пространствами H и $L_2(\Gamma, F)$. Для любого компактного или любого борелевского, содержащегося в некотором компакте, множества $\Delta \subset \Gamma$ существует элемент $f \in$ H, отвечающий характеристической функции $I_\Delta(\chi)$ множества Δ при установленной изометрии. Так как $D(G)$ плотно в H, то в $D(G)$ существует последовательность основных функций $\varphi_n^\Delta(g)$, сходящаяся к f в H. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n^\Delta\,|\,\varphi_n^\Delta)_H = (f\,|\,f)_H = (I_\Delta\,|\,I_\Delta)_{L_2(\Gamma, F)} = F(\Delta).$$

Учитывая равенство $(\varphi_n^\Delta\,|\,\varphi_n^\Delta) = B(\varphi_n^\Delta, \ \varphi_n^\Delta)$, получаем соотношение (3).

Меру F, фигурирующую в представлении ковариационного ядра однородного поля $\xi(\varphi)$ (1), будем называть спектральной мерой поля $\xi(\varphi)$.

Замечание 1. Имеет место и утверждение, обратное теореме 1. Всякое ядро $B(\varphi, \psi)$ на G вида (1), где F — борелевская мера на группе Γ, удовлетворяющая свойствам, приведенным в формулировке теоремы 1, является ковариационным ядром некоторого обобщенного однородного поля на G.

Действительно, равенство (1) задает на G положительно определенное ядро и, следовательно, существует обобщенное поле второго порядка с ковариационным ядром B и функционалом математического ожидания $m(\varphi) = 0$. Так как

$$B(\tau_s\varphi, \tau_s\psi) = \int\limits_{\Gamma} |\chi(g)|^2 \varphi^{\wedge}(\chi)\overline{\psi^{\wedge}(\chi)}\, F(d\chi) = B(\varphi, \psi),$$

то это поле однородное.

Замечание 2. Если обобщенное однородное поле $\xi(\varphi)$ на G является действительным, то его спектральная мера F симметрична относительно единицы группы Γ, т. е. для всякого борелевского множества $\Delta \subset \Gamma$ имеем $F(\Delta) = F(\Delta^{-1})$, где $\Delta^{-1} = \{\chi^{-1} : \chi \in \Delta\}$.

Так как $\bar{\varphi}^{\wedge}(\chi) = \overline{\varphi^{\wedge}(\chi^{-1})}$, то для действительного поля $\xi(\varphi)$

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi^{\wedge}(\chi)\overline{\psi^{\wedge}(\chi)}\, F(d\chi) = B(\varphi, \psi) = \overline{B(\bar{\varphi}, \bar{\psi})} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \varphi^{\wedge}(\chi^{-1})\overline{\psi^{\wedge}(\chi^{-1})}\, F(d\chi) = \int\limits_{\Gamma} \varphi^{\wedge}(\chi)\, \psi^{\wedge}(\chi)\, F(d\chi^{-1}). \qquad (5)$$

Откуда, учитывая единственность меры F, получаем, что $F(\Delta) = F(\Delta^{-1})$ для любого борелевского множества Δ.

Наоборот, если спектральная мера F однородного поля $\xi(\varphi)$ симметрична относительно единицы группы Γ, то выполняется равенство (5) и, следовательно, ковариационное ядро поля $\xi(\varphi)$ — действительное.

Очевидно, что множество случайных величин $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ образует предгильбертово пространство $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением

$$(\xi(\varphi) \,|\, \xi(\psi)) = M\xi(\varphi)\,\overline{\xi(\psi)}.$$

Пополнение $\mathfrak{H}$ относительно этого скалярного произведения будем называть пространством значений поля $\xi(\varphi)$ и обозначать через $\mathfrak{H}_\xi$.

Теорема 2. Пусть $\xi(\varphi)$ — обобщенное однородное поле на группе G со спектральной мерой F и $\mathfrak{H}_\xi$ — пространство его значений. Тогда для любого элемента $\eta \in \mathfrak{H}_\xi$ существует такая функция $f(\chi) \in L_2(\Gamma, F)$, называемая спектральной характеристикой η, что

$$\eta = \int\limits_{\Gamma} f(\chi)\, Z(d\chi),$$

где Z — случайная $\mathfrak{H}_\xi$-значная мера, определенная на борелевских множествах группы Γ, такая, что

$$MZ(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)} = F(\Delta_1 \cap \Delta_2). \tag{6}$$

В частности, само случайное поле $\xi(\varphi)$ допускает спектральное представление

$$\xi(\varphi) = \int_\Gamma \varphi^\frown(\chi) Z(d\chi). \tag{7}$$

Случайная мера Z, называемая случайной спектральной мерой поля $\xi(\varphi)$, определяется полем $\xi(\varphi)$ в $\mathfrak{H}_\xi$ однозначно и для любого компактного или борелевского множества, содержащегося в некотором компактном множестве, $\Delta \subset \Gamma$ существует такая последовательность основных функций $\{\varphi_n^\Delta\}$, что

$$Z(\Delta) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \xi(\varphi_n^\Delta).$$

Доказательство. По-прежнему будем считать ковариационное ядро B поля $\xi(\varphi)$ невырожденным. Введем в $\widehat{D(G)}$ скалярное произведение (4) и обозначим через H_1 пополнение полученного таким образом предгильбертова пространства. Отображение множества случайных величин $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ в $\widehat{D(G)}$, $\xi(\varphi) \to \varphi^\frown(\chi)$ является изометрией линеала $\{\xi(\varphi) : \varphi \in D(G)\} \subset \mathfrak{H}_\xi$ и линеала $\widehat{D(G)} \subset H_1$. В силу леммы 1 мы можем продолжить эту изометрию до изометрии пространства $\mathfrak{H}_\xi$ и $L_2(\Gamma, F) = H_1$. При этом каждой характеристической функции $I_\Delta(\chi)$ борелевского множества $\Delta \subset \Gamma$ описанного вида соответствует случайная величина $Z(\Delta) \in \mathfrak{H}_\xi$. Нетрудно видеть, что для любого $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ в силу равенства $I_\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\Delta_n}$ имеем

$$Z(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(\Delta_n),$$

где ряд в правой части сходится в среднем квадратическом, т. е. Z — случайная мера на борелевских множествах группы Γ.

Соотношение (6) следует из равенства $I_{\Delta_1} I_{\Delta_2} = I_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$. Так как любая функция $f(\chi) \in L_2(\Gamma, F)$ может быть представлена, как предел в среднем линейных комбинаций характеристических функций описанного вида, то отвечающий ей при описанной изометрии элемент $\eta \in \mathfrak{H}_\xi$ представим в виде

$$\eta = \int_\Gamma f(\chi) Z(d\chi).$$

В силу изометричности $\mathfrak{H}_\xi$ и $L_2(\Gamma, F)$ имеет место и обратное утверждение. При $f(\chi) = \varphi^\wedge(\chi)$ получаем

$$\xi(\varphi) = \int_\Gamma \varphi^\wedge(\chi) Z(d\chi),$$

ибо $\varphi^\wedge(\chi)$ отвечает $\xi(\varphi) \in \mathfrak{H}_\xi$.

Наконец, если φ_n^Δ — последовательность основных функций, удовлетворяющая соотношению (3), то в связи с тем, что при $n \to \infty$ $(\varphi_n^\Delta)^\wedge(\chi) \to I_\Delta(\chi)$ в $L_2(\Gamma, F)$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} M\,|Z(\Delta) - \xi(\varphi_n^\Delta)|^2 = 0.$$

Замечание 3. Если Z — ортогональная случайная мера на борелевских множествах группы Γ, такая, что $MZ(\Delta) = 0$ для всех Δ и $F(\cdot) = M\,|Z(\cdot)|^2$ является борелевской мерой на Γ, удовлетворяющей требованиям, сформулированным в теореме 1, то интеграл

$$\int_\Gamma \varphi^\wedge(\chi) Z(d\chi) \tag{8}$$

определяет обобщенное однородное случайное поле на группе G.

Действительно, в силу условий на меру F (8) задает на G обобщенное случайное поле второго порядка, и при этом $M\xi(\varphi) = 0$, а ковариационное ядро этого поля

$$B(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi^\wedge(\chi)\, \overline{\varphi^\wedge(\chi)}\, F(d\chi)$$

и, следовательно, по замечанию 1, инвариантно относительно сдвигов.

Замечание 4. Обобщенное однородное случайное поле $\xi(\varphi)$ на G является действительным тогда и только тогда, когда его случайная спектральная мера Z эрмитово симметрична относительно единицы группы характеров Γ группы G, т. е. когда для любого борелевского множества $\Delta \subset \Gamma$

$$Z(\Delta) = \overline{Z(\Delta^{-1})}. \tag{9}$$

В самом деле, если поле $\xi(\varphi)$ — действительное, то для любой основной функции φ

$$\int_\Gamma \varphi^\wedge(\chi) Z(d\chi) = \xi(\varphi) = \overline{\xi(\overline{\varphi})} = \int_\Gamma \varphi^\wedge(\chi^{-1})\, \overline{Z(d\chi)} = \int_\Gamma \varphi^\wedge(\chi)\, \overline{Z(d\chi^{-1})}, \tag{10}$$

откуда сразу же следует (9). Наоборот, если для случайной спектральной меры Z поля $\xi(\varphi)$ выполняется (9), то выполняется и (10), что означает действительность поля $\xi(\varphi)$.

Можно рассматривать более широкий класс обобщенных случайных полей второго порядка, ковариационные ядра которых допускают специальное представление.

Пусть $D(\mathfrak{G})$ — пространство основных функций с компактными носителями на локально компактной группе $\mathfrak{G}$ [3—4], U — локально компактное пространство и $k(g, u)$ — измеримая функция на $\mathfrak{G} \times U$ такая, что для каждой основной функции $\varphi \in D(\mathfrak{G})$ существует

$$\tilde{\varphi}_k(u) = \int\limits_{\mathfrak{G}} \varphi(g)\, k(g, u)\, dg.$$

Пусть также ковариационное ядро случайного поля второго порядка $\xi(\varphi)$ на $\mathfrak{G}$ представимо в виде

$$B(\varphi, \psi) = \int\limits_U \int\limits_U \tilde{\varphi}_k(u)\, \overline{\tilde{\psi}_k(s)}\, F(du, ds), \tag{11}$$

где $F(\cdot, \cdot)$ — положительно определенная, комплекснозначная, аддитивная и непрерывная функция на $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства U (эти понятия и интеграл (11) определяются аналогично соответствующим понятиям в работе [10]), такая, что для любых компактных множеств $\Delta, \Delta' \in \mathfrak{B}$ имеем $|F(\Delta, \Delta')| < \infty$. Тогда выполняется следующий аналог теоремы Карунена — Крамера [9].

Теорема 3. Каждое обобщенное случайное поле $\xi(\varphi)$ на $\mathfrak{G}$ с ковариационным ядром (11) представимо в виде

$$\xi(\varphi) = \int\limits_U \tilde{\varphi}_k(u)\, Z(du),$$

где Z — случайная мера, определенная на $\mathfrak{B}$, такая, что для любых $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}$

$$MZ(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)} = F(\Delta_1, \Delta_2).$$

Доказательство. В случае, когда функциональное множество $P_k = \{\tilde{\varphi}_k : \varphi \in D(\mathfrak{G})\}$ плотно в предгильбертовом пространстве $L_2'(U, F)$, состоящем из комплекснозначных функций $f(u)$ на U таких, что

$$A(f, f) = \int\limits_U \int\limits_U f(u)\, \overline{f(s)}\, F(du, ds) < \infty,$$

в котором функции f_1 и f_2 отождествляются, если

$$A(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = 0,$$

и в котором скалярное произведение определяется соотношением $(f_1 | f_2) = A(f_1, f_2)$, доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и теоремы Карунена — Крамера [9].

В общем случае строится семейство функций $d_\theta(u)$, $u \in U$, $\theta \in \Theta$, $\Theta \cap D(\mathfrak{G}) = \varnothing$, которое является полной системой в ортогональном дополнении $L_2(U, F) \ominus P_k$, где $L_2(U, F)$ — пополнение $L_2'(U, F)$. Затем строится случайная функция $\zeta(t)$ на $D(\mathfrak{G}) \cup \cup\, \Theta$:

$$\zeta(t) = \begin{cases} \xi(\varphi), & t = \varphi \in D(\mathfrak{G}) \\ \eta(\theta), & t = \theta \in \Theta, \end{cases}$$

где $\eta(\theta)$ — гауссовская функция, не зависящая от $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D(\mathfrak{G})$ со средним, равным нулю, и ковариационной функцией

$$M\eta(\theta_1)\overline{\eta(\theta_2)} = \int_U \int_U d_{\theta_1}(u)\,\overline{d_{\theta_2}(s)}\,F(du, ds),$$

для которой выполняются условия первого случая. Для $\mathfrak{G} \equiv R^n$ подобная теорема доказывалась в работе [11].

Если, в частности, $\mathfrak{G}$ — коммутативная группа, U — ее группа характеров, а $k(g, u)$ — значение характера u на g, то случайное поле с ковариационным ядром (11) естественно называть обобщенным гармонизуемым случайным полем на $\mathfrak{G}$.

§ 2. Эргодическая теорема для обобщенных однородных случайных полей

Пусть $\xi(\varphi)$ — обобщенное однородное случайное поле на группе G; F и Z — соответственно его спектральная и случайная спектральная меры.

Рассмотрим линейное пространство Q_F комплекснозначных функций на G, таких, что для каждой функции $q(g) \in Q_F$:

а) $q(g) \in L_1(G)$;

б) преобразование Фурье $q^\wedge(\chi)$ функции $q(g)$ принадлежит пространству $L_2(\Gamma, F)$.

Тогда в силу теорем 1 и 2 можно продолжить обобщенное поле $\xi(\varphi)$ на G до случайного линейного функционала на пространстве Q_F, непрерывного относительно нормы $L_2(\Gamma, F)$.

Сеть функций $\{\psi_n(g),\ n \in N\}$ (N — некоторое направление) на группе G будем называть F-эргодической, если выполняются следующие требования:

1) все функции $\psi_n(g) \in Q_F$;

2) существует предел $\lim\limits_n \int_G \psi_n(g)\,dg = 1$;

3) существует такая постоянная $c > 0$, не зависящая от n, что выполняется неравенство

$$\int_G |\psi_n(g)|\,dg < c;$$

4) для любого элемента s группы G

$$\lim_n \int_G |\psi_n(sg) - \psi_n(g)|\, dg = 0;$$

5) существует такая функция $f(\chi) \in L_2(\Gamma, F)$, что для всех n выполняется неравенство $|\hat{\psi_n}(\chi)| \leqslant f(\chi)$.

Частным случаем таких сетей являются p-эргодические сети функций на R^n, введенные А. А. Темпельманом [12].

Следующий пример показывает, что вопрос о существовании F-эргодической сети функций на G сводится к вопросу существования обычных эргодических сетей функций на группе G [12].

Для любой спектральной меры F обобщенного однородного поля $\xi(\varphi)$ на G сеть функций

$$\psi_n^*(g) = \frac{\varphi * \nu_n(g)}{\int_G \varphi(g)\, dg} = \frac{\int_G \varphi(s^{-1}g)\, \nu_n(s)\, ds}{\int_G \varphi(g)\, dg}$$

(где $\varphi(g)$ — основная функция из $D(G)$ такая, что

$$\int_G \varphi(g)\, dg \neq 0,$$

а $\{\nu_n(g),\ n \in N\}$ — обычная эргодическая сеть функций на G) является F-эргодической.

Выполнение условий 1) и 5) следует из того, что $\varphi(g)$ и $\nu_n(g)$ принадлежат $L_1(G)$ для всех n и

$$|(\psi_n^*)^\frown(\chi)| = \frac{|\varphi^\frown(\chi)\, \hat{\nu_n}(\chi)|}{\left|\int_G \varphi(g)\, dg\right|} \leqslant \frac{c_1 |\varphi^\frown(\chi)|}{\left|\int_G \varphi(g)\, dg\right|},$$

где константа c_1 выбрана так, чтобы для всех n

$$\left|\int_G \chi(s)\, \nu_n(s)\, ds\right| < c_1$$

(выбор такого c_1 возможен в силу того, что $|\chi(s)| = 1$ и $\nu_n(s)$, как эргодическая сеть функций, удовлетворяет условию вида 3).

Выполнение условий 2) — 4) легко проверить, если воспользоваться тем, что подобным условиям удовлетворяет сеть функций $\nu_n(g)$.

Следующая теорема обобщает эргодическую теорему для обобщенных однородных полей на R^n [12].

Теорема 4. Пусть $\xi(\varphi)$ — обобщенное однородное поле на группе G со спектральной мерой F и $\{\psi_n(g),\ n \in N\}$, где направление N обладает счетным конфинальным подмножеством, F — эргодическая сеть функций на G. Тогда

$$\underset{n}{\text{l.i.m.}}\, \xi(\psi_n) = Z(\{e\}), \qquad (12)$$

где Z — случайная спектральная мера поля $\xi(\varphi)$, e — единица группы Γ. Кроме того, для ковариационного ядра поля $\xi(\varphi)$

$$\lim_n B(\psi_n, \psi_n) = F(\{e\}). \qquad (13)$$

Доказательство. В силу теорем 1 и 2 случайные величины $\xi(\psi_n)$ действительно определены и

$$\xi(\psi_n) = \int_\Gamma \widehat{\psi_n}(\chi)\, Z(d\chi), \qquad n \in N.$$

По результатам [13] (теорема 3), существует предел

$$\lim_n \int_G \chi(g)\, \psi_n(g)\, dg = I_{\{e\}}(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi = e \\ 0, & \chi \neq e. \end{cases}$$

Используя теперь условие (5), по известной теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\lim_n \int_\Gamma |\widehat{\psi_n}(\chi) - I_{\{e\}}(\chi)|^2 F(d\chi) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_n M|\xi(\psi_n) - Z(\{e\})|^2 = \lim_n M\left|\int_\Gamma (\widehat{\psi_n}(\chi) - I_{\{e\}}(\chi))\, Z(d\chi)\right|^2 =$$

$$= \lim_n \int_\Gamma |\widehat{\psi_n}(\chi) - I_{\{e\}}(\chi)|^2 F(d\chi) = 0.$$

Так как $B(\psi_n, \psi_n) = M|\xi(\psi_n)|^2$, то, используя (12), получаем соотношение (13). Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $\{v_n(g)\}$ — эргодическая последовательность функций на G и $\xi(\varphi)$ — обобщенное гармонизируемое случайное поле на G, тогда для любой основной функции $\varphi(g) \in D(G)$ и любого характера $\chi \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_G \overline{\chi(g)}\, v_n(g)\, (\xi * \varphi^*)(g)\, dg = \varphi^\frown(\chi)\, Z(\{\chi\}),$$

где $Z(\{\chi\})$ — спектральная мера гармонизируемого поля

$$\xi(\varphi) = \int_\Gamma \varphi^\frown(\chi)\, Z(d\chi),$$

сосредоточенная на элементе $\chi \in \Gamma$, а

$$\xi * \varphi^*(g) = \xi_{[s]}(\varphi(g^{-1}s)),$$

где символ $\xi_{[s]}$ указывает, что случайный функционал ξ применяется к основной функции переменной s.

Пусть $\{k_m(g)\}$ — эргодическая последовательность функций на G, тогда для любых $\chi_1, \chi_2 \in \Gamma$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in D(G)$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_G \int_G \overline{\chi_1(g_1)}\, \chi_2(g_2)\, \nu_n(g_1)\, \overline{k_m(g_2)}\, B(\tau_{g_1^{-1}}\varphi_1, \tau_{g_2^{-1}}\varphi_2)\, dg_1 dg_2 =$$

$$= \varphi_1^{\wedge}(\chi_1)\, \overline{\varphi_2^{\wedge}(\chi_2)}\, F(\{\chi_1, \chi_2\}),$$

где B — ковариационное ядро и F — спектральная мера гармонизуемого поля $\xi(\varphi)$.

Доказательство. Так как операторы сдвига непрерывны в $D(G)$ [5], то случайное поле второго порядка $\xi * \varphi^*(g)$ непрерывно в среднем квадратичном на G. Далее, $\xi * \varphi^*$ является гармонизуемым на G, т. е. представимо в виде преобразования Фурье

$$\xi * \varphi^*(g) = \int_\Gamma \chi(g)\, Y(d\chi)$$

случайной меры Y на борелевских множествах группы G, где

$$Y(\Delta) = \int_\Delta \varphi^{\wedge}(\chi)\, Z(d\chi).$$

Поэтому только остается применить эргодическую теорему для преобразований Фурье векторзначных мер [13].

§ 3. Многомерные однородные обобщенные случайные поля

Пусть $\vec{\xi}(\varphi) = \{\xi_1(\varphi), \ldots, \xi_n(\varphi)\}$ — многомерное обобщенное случайное поле второго порядка на группе G, т. е. $\xi_i(\varphi)$ $i = 1, \ldots, n$ — скалярные обобщенные поля второго порядка. Через $\vec{m}(\varphi)$ будем обозначать вектор функционалов математических ожиданий поля $\vec{\xi}(\varphi)$, $\vec{m}(\varphi) = \{M\xi_1(\varphi), \ldots, M\xi_n(\varphi)\}$, а через $\mathrm{B}(\varphi, \psi)$ — матрицу ковариационных ядер поля $\vec{\xi}(\varphi)$

$$\mathrm{B}(\varphi, \psi) = \{B_{kr}(\varphi, \psi)\}_{k=1,n}^{r=1,n},$$

где

$$B_{kr}(\varphi, \psi) = M\xi_k(\varphi)\,\overline{\xi_r(\psi)}, \quad \varphi, \ \psi \in D(G).$$

Как обычно, однородность в широком смысле поля $\vec{\xi}(\varphi)$ означает, что компоненты $\xi_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n$ — однородные поля, которые однородно связаны между собой, т. е. ядра $B_{kr}(\varphi, \psi)$ инвариантны относительно сдвигов на G.

Теорема 6. *Матрица ковариационных ядер многомерного обобщенного однородного поля $\vec{\xi}(\varphi)$ на группе G может быть представ-*

лена в виде

$$\mathrm{B}(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \varphi^{\wedge}(\chi)\, \overline{\psi^{\wedge}(\chi)}\, \mathfrak{F}(d\chi), \tag{14}$$

где $\mathfrak{F}(d\chi) = \{F_{kr}(d\chi)\}_{k=\overline{1,n}}^{r=\overline{1,n}}$ — матрица комплекснозначных мер, определенных на борелевских множествах группы Γ, таких, что для любого компактного множества $\Delta \subset \Gamma$, $|F_{kr}(\Delta)| < \infty$ и линейный непрерывный функционал $T_{kr}(\varphi)$, $k, r = 1, \ldots, n$ на $D(G)$

$$T_{kr}(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi^{\wedge}(\chi)\, F_{kr}(d\chi)$$

можно единственным образом продолжить до медленно растущей обобщенной функции на G. Для любого борелевского множества $\Delta' \subset \Gamma$ матрица $\mathfrak{F}(\Delta')$ является эрмитовой неотрицательной. Матрица $\mathfrak{F}$ называется матрицей спектральных мер поля $\vec{\xi}(\varphi)$.

Обратно, матрица вида (14) является матрицей ковариационных ядер некоторого многомерного обобщенного однородного поля на G.

В случае действительного поля $\vec{\xi}(\varphi)$ (когда все компоненты $\vec{\xi}(\varphi)$ действительны) матрица $\mathfrak{F}$ симметрична относительно единицы группы Γ, $F_{kr}(\Delta) = F_{kr}(\Delta^{-1})$. Наоборот, если $\mathfrak{F}$ — симметрична относительно единицы группы Γ, то для любых $\varphi, \psi \in D(G)$ имеем

$$B_{kr}(\varphi, \psi) = \overline{B_{kr}(\overline{\varphi}, \overline{\psi})}, \qquad k, r = 1, \ldots, n.$$

Само многомерное обобщенное однородное поле $\vec{\xi}(\varphi)$ допускает спектральное представление

$$\vec{\xi}(\varphi) = \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}(\chi)\, Z(d\chi),$$

где $Z(d\chi) = \{Z_1(d\chi), \ldots, Z_n(d\chi)\}$ — вектор случайных мер, определенных на борелевских множествах Γ, такой, что

$$MZ_k(\Delta_1)\overline{Z_r(\Delta_2)} = F_{kr}(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Если поле $\vec{\xi}(\varphi)$ — действительное, то меры Z_i эрмитово симметричны относительно единицы группы Γ, и наоборот.

Доказательство этой теоремы можно получить из теорем 1, 2 с помощью обычных рассуждений, применяемых при переходе от одномерных стационарных процессов и однородных полей к многомерным [1].

Пространством значений $\mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$ многомерного поля $\vec{\xi}(\varphi)$ будем называть линейное замыкание в $L_2(\Omega)$ множества случайных величин $\xi_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varphi \in D(G)$.

Пусть $f(\chi) = \{f_k(\chi)\}^{k=\overline{1,n}}$ — вектор-функция на Γ с измеримыми компонентами, записываемая как вектор-строка. Обозначим через $L_2'(\Gamma, F)$, где $\mathfrak{F}$ — матрица спектральных мер поля $\vec{\xi}(\varphi)$, пространство вектор-функций $f(\chi)$ на Γ таких, что

$$\int_\Gamma f(x)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,f^*(\chi) < \infty,$$

где $f^*(\chi)$ — вектор-столбец с компонентами $\overline{f_i(\chi)}$, $i = 1, \ldots, n$.

Поскольку $\mathfrak{F}(\Delta)$ — неотрицательная матрица для любого борелевского множества Δ, то для $f(\chi), p(\chi) \in L_2'(\Gamma, F)$

$$\int_\Gamma f(\chi)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,f^*(\chi) \geqslant 0,$$

$$\int_\Gamma f(\chi)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,p^*(\chi) \leqslant \left\{\int_\Gamma f(\chi)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,f^*(\chi)\right\}^{1/2} \left\{\int_\Gamma p(\chi)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,p^*(\chi)\right\}^{1/2}.$$

Очевидно, что $L_2'(\Gamma, F)$ — линейное пространство. Пусть $L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$ — фактор-пространство $L_2'(\Gamma, \mathfrak{F})/N$ по подпространству $N = \left\{f : \int_\Gamma f(\chi)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,f^*(\chi) = 0\right\}$. Тогда $L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f \mid p) = \int_\Gamma f(\chi)\,\mathfrak{F}(d\chi)\,p^*(\chi)$$

(полнота $L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$ доказывается аналогично случаю $\Gamma = R^1$ [14]).

Рассмотрим случайные величины $\eta \in \mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$, имеющие вид

$$\eta = \int_\Gamma f(\chi)\,Z(d\chi) = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} f_i(\chi)\,Z_i(d\chi), \tag{15}$$

где $f_i(\chi) \in L_2(\Gamma, F_{ii})$, а Z — спектральная случайная мера поля $\vec{\xi}(\varphi)$, записываемая как вектор-столбец. $Z = \{Z_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

Нетрудно видеть, что соответствие $\eta \leftrightarrow f(\chi)$ является изометрией, которую можно продолжить до изометрии пространства $\mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$ и $L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$, поскольку функции $f(\chi) = \{f_i(\chi)\}^{i=\overline{1,n}}$, $f_i \in L_2(\Gamma, F_{ii})$ всюду плотны в $L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$ и случайные величины (15) в силу теоремы 2 плотны в $\mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$. Поэтому для каждого $\eta \in \mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$ существует единственный элемент $f(\chi) \in L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$ такой, что

$$f(\chi) = \{f_i(\chi)\}^{i=\overline{1,n}} = \lim_{s\to\infty} \{f_i^{(s)}(\chi)\}^{i=\overline{1,n}},$$

где $f_i^{(s)} \in L_2(\Gamma\ (F_{ii})$ и предел понимается в норме $L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$ и, что

$$\eta = \lim_{s\to\infty} \int_\Gamma f^{(s)}(\chi)\,Z(d\chi).$$

Поскольку этот предел не зависит от аппроксимирующей последовательности $f^{(s)}(\mathcal{X}) \to f(\mathcal{X})$, то его можно принять в качестве определения интеграла

$$\int_{\Gamma} f(\mathcal{X})\, Z(d\mathcal{X}), \quad f(\mathcal{X}) \in L_2(\Gamma, \mathfrak{F}). \tag{16}$$

Теорема 7. Каждый элемент η пространства значений $\mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$ многомерного обобщенного однородного поля $\vec{\xi}(\varphi)$ со случайной спектральной мерой Z на G представим в виде (16).

§ 4. Линейные преобразования обобщенных однородных случайных полей

Будем говорить, что обобщенное однородное поле $\vec{\zeta}(\varphi) = \{\zeta_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,m}}$ получается из однородного поля $\vec{\xi}(\varphi) = \{\xi_i(\varphi)\}_{i=\overline{1,n}}$ линейным преобразованием, если

$$\vec{\zeta}(\varphi) = \int_{\Gamma} \widehat{\varphi}(\mathcal{X})\, \rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X})\, Z^{\vec{\xi}}(d\mathcal{X}), \tag{17}$$

где $Z^{\vec{\xi}} = \{Z_i^{\vec{\xi}}\}_{i=\overline{1,n}}$ — случайная спектральная мера поля $\vec{\xi}(\varphi)$, а $\rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X}) = \{\rho_{ki}(\mathcal{X})\}_{k=\overline{1,m}}^{i=\overline{1,n}}$ (спектральная характеристика поля $\vec{\zeta}(\varphi)$) — матричная функция на Γ такая, что $\{\varphi^{\wedge}(\mathcal{X})\, \rho_{ki}(\mathcal{X})\}^{i=\overline{1,n}} \in L_2(\Gamma, \mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}$ — матрица спектральных мер поля $\vec{\xi}(\varphi)$.

Из (17) следует, что поля $\vec{\xi}(\varphi)$ и $\vec{\zeta}(\varphi)$ однородно связаны. Пусть $F^{\vec{\zeta}\vec{\xi}} = \{F_{ki}^{\vec{\zeta}\vec{\xi}}\}_{k=\overline{1,m}}^{i=\overline{1,n}}$ — матрица взаимных спектральных мер этих полей. Используя (17), нетрудно получить, что

$$F^{\vec{\zeta}\vec{\zeta}}(d\mathcal{X}) = \rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X})\, F^{\vec{\xi}\vec{\xi}}(d\mathcal{X})\, \rho^{*}_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X}),$$

$$F^{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(d\mathcal{X}) = \rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X})\, F^{\vec{\xi}\vec{\xi}}(d\mathcal{X}), \tag{18}$$

где $F^{\vec{\zeta}\vec{\zeta}}$ — матрица спектральных мер поля $\vec{\zeta}(\varphi)$.

Наоборот, если однородные и однородно связанные поля $\vec{\zeta}(\varphi)$ и $\vec{\xi}(\varphi)$ на G таковы, что их спектральные меры удовлетворяют соотношениям (18), то $\vec{\zeta}(\varphi)$ получается из $\vec{\xi}(\varphi)$ линейным преобразованием с характеристикой $\rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X})$. Действительно, однородное поле

$$\vec{\gamma}(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi^{\wedge}(\mathcal{X})\, \rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(\mathcal{X})\, Z^{\vec{\xi}}(d\mathcal{X})$$

в силу (18) таково, что $F^{\vec{\zeta}\vec{\zeta}} = F^{\vec{\gamma}\vec{\gamma}}$, $F^{\vec{\zeta}\vec{\xi}} = F^{\vec{\gamma}\vec{\xi}}$ и поэтому оператор U на элементах $\gamma_k(\varphi)$, $\xi_i(\varphi) \in \mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$, определенный соотношениями

$$U\gamma_k(\varphi) = \zeta_k(\varphi), \qquad k = 1, \ldots, m,$$
$$U\xi_i(\varphi) = \xi_i(\varphi), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

является изометрическим. Продолжение по непрерывности оператора U будет изометрическим оператором на $\mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$, который будет единичным оператором на множестве элементов $\xi_i(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ всюду плотном в $\mathfrak{H}_{\vec{\xi}}$. Отсюда $\gamma_k(\varphi) = \zeta_k(\varphi)$ для всех $k = 1, \ldots, m$, $\varphi \in D(G)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема, обобщающая результат [15] для случая $G = R^n$.

Теорема 8. Для того чтобы обобщенное однородное поле $\vec{\zeta}(\varphi) = \{\zeta_k(\varphi)\}_{k=\overline{1,m}}$ на группе G получалось из однородного и однородно связанного с ним поля $\vec{\xi}(\varphi) = \{\xi_i(\varphi)\}_{i=\overline{1,n}}$ линейным преобразованием со спектральной характеристикой $\rho_{\vec{\zeta}\vec{\xi}}(X)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (18).

Пример 1. Пусть $\xi(g)$ — обычное непрерывное в среднем квадратическом однородное поле на группе G. Его можно отождествить с обобщенным однородным полем

$$\xi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\,\xi(g)\,dg.$$

Рассмотрим теперь однородное поле

$$\eta(g) = \int_G c(ga^{-1})\,\xi(a)\,da,$$

где $c(g) \in L_1(G)$.

Тогда поле $\eta(g)$ получается из поля $\xi(g)$ линейным преобразованием со спектральной характеристикой

$$\rho(X) = \int_G \overline{X(g)}\,c(g)\,dg.$$

Пример 2. Пусть $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$ — некоррелированные одномерные обобщенные однородные поля на группе G и для всех $\varphi \in D(G)$ наблюдается поле $\zeta(\varphi) = \xi(\varphi) + \eta(\varphi)$. По этим наблюдениям надо найти наилучшую в среднем квадратическом линейную оценку $\widehat{\xi}(\varphi)$ поля $\xi(\varphi)$

$$\sigma_\varphi^2 = M\,|\zeta(\varphi) - \widehat{\xi}(\varphi)|^2 = \inf_{h \in \mathfrak{H}_\xi} M\,|\xi(\varphi) - h|^2 \tag{19}$$

(задача фильтрации).

Предположим, что случайные поля $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$ имеют спектральные плотности $f_\xi(X)$ и $f_\eta(X)$ относительно меры Хаара на группе Γ, т. е.

$$F_\alpha(\Delta) = \int_\Delta f_\alpha(X)\,dX, \quad \alpha = \xi, \eta.$$

Для случая обычного однородного поля $\xi(g)$ на G необходимым и достаточным условием существования у него спектральной плотности относительно меры Хаара служит представление поля $\xi(g)$ в виде

$$\xi(g) = \int_G c(gs^{-1})\, W(ds), \tag{20}$$

где $c(g) \in L_2(G)$ и W — ортогональная случайная мера на G такая, что $M\,|W(dg)|^2 = dg$.

Действительно, если поле $\xi(g)$ имеет спектральную плотность $f_\xi(\chi)$, то любая факторизующая ее функция $u(\chi)$, $f_\xi(\chi) = |u(\chi)|^2$ принадлежит $L_2(\Gamma)$. Тогда для ковариационной функции поля $\xi(g)$ имеем

$$B_\xi(gs^{-1}) = \int_\Gamma \{\chi(g)\, u(\chi)\}\, \overline{\{\chi(s)\, u(\chi)\}}\, d\chi = \int_G c(ag)\, \overline{c(as)}\, da =$$

$$= \int_G c(ga^{-1})\, \overline{c(sa^{-1})}\, da, \tag{21}$$

где $c(a) = \Phi u(\chi)$, а Φ — оператор Фурье — Планшереля на $L_2(\Gamma)$ [8].

Применяя к представлению (21) теорему Карунена, получаем (20). Если же имеет место представление (20), то

$$B_\xi(gs^{-1}) = M\left\{\int_G c(ga^{-1})\, W(da)\right\}\overline{\left\{\int_G c(sa^{-1})\, W(da)\right\}} =$$

$$= \int_G c(ag)\, \overline{c(as)}\, da = \int_G \chi(gs^{-1})\, |\Phi^{-1} c(a)|^2\, d\chi,$$

т. е. поле $\xi(g)$ имеет спектральную плотность $f_\xi(\chi) = |\Phi^{-1} c(a)|^2$.

Задача фильтрации, поставленная выше, будет решена, если будет известна спектральная характеристика $\rho(\chi)$ поля $\hat{\xi}(\varphi)$ относительно поля $\zeta(\varphi)$

$$\hat{\xi}(\varphi) = \int_\Gamma \hat{\varphi}(\chi)\, \rho(\chi)\, Z^\zeta(d\chi). \tag{22}$$

Используя (22) и (19), нетрудно установить, что

$$\rho(\chi) = \frac{f_\xi(\chi)}{f_\xi(\chi) + f_\eta(\chi)}$$

и

$$\sigma_\varphi^2 = \int_\Gamma \frac{f_\xi(\chi)\, f_\eta(\chi)}{f_\xi(\chi) + f_\eta(\chi)}\, |\hat{\varphi}(\chi)|^2\, d\chi.$$

Пример 3. Пусть $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$ — обобщенные однородные и однородно связанные поля на G, обладающие спектральными плотностями и взаимной спектральной плотностью $f_{\xi\eta}(\chi)$. Требуется по наблюдениям поля $\eta(\varphi)$, $\varphi \in D(G)$ найти линейную, наилучшую в среднем квадратическом оценку $\hat{\xi}(\varphi)$ значений поля $\xi(\varphi)$

$$\sigma_\varphi^2 = M\,|\xi(\varphi) - \hat{\xi}(\varphi)|^2 = \inf_{h \in \mathfrak{H}_\eta} M\,|\xi(\varphi) - h|.$$

Нетрудно установить, что

$$\hat{\xi}(\varphi) = \int_\Gamma \frac{f_{\xi\eta}(\chi)}{f_\eta(\chi)}\, \hat{\varphi}(\chi)\, Z^\eta(d\chi).$$

Таким образом, $\widehat{\xi}(\varphi)$ получается из $\eta(\varphi)$ линейным преобразованием с характеристикой $f_{\xi\eta}(\chi)/f_{\eta}(\chi)$. При этом

$$\sigma_{\varphi}^{2} = \int\limits_{\Gamma} \frac{f_{\xi}(\chi) f_{\eta}(\chi) - |f_{\xi\eta}(\chi)|^{2}}{f_{\eta}(\chi)} |\varphi^{\frown}(\chi)|^{2} d\chi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я г л о м А. М. Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.— Теория вероят. и ее применен., **2**, 3, 1957.

2. K a m p e d e F e r i e t J. Analise harmonique des fonctions alétoires stationnaires d'orde 2 sur un groupe abelian localement compact.— C. R. Acad. Sci., 1948, **226**, 868—870.

3. К а ц Г. И. Обобщенные функции на локально компактной группе и разложения унитарных представлений.— Труды Моск. мат. об-ва, 1961, **10**, 3—40.

4. B r u h a t F. Distributions sur groupe localement compact et applications á l'étude des représentations des groupes p-adiques.— Bull. Soc. Math. France, 1961, **89**, 43—75.

5. M a u r i n K. Distributionen auf Yamabe Gruppen. Harmonishe Analise auf einer Abelishen L. k. Gruppe.— Bull. l'Acad. Polonaise Sci., ser. math., 1961, **9**, 12.

6. Wawrzynczyk A. On tempered distributions and Bochner — Schwartz theorem on arbitrary locally compact abelian groups.— Coll. Math., 1968, **19**, 2.

7. П о н о м а р е н к о А. И. Однорідні узагальнені випадкові поля на локально бікомпактній групі.— ДАН УРСР, сер. А, 1969, 7.

8. Н а й м а р к М. А. Нормированные кольца. «Наука», М., 1968.

9. C r a m e r H. A contribution to the theory of stochastic processes. — Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Univ. Calif. Press, 1951, 329—339.

10. Р о з а н о в Ю. А. Спектральный анализ абстрактных функций.— Теория вероят. и ее применен. **4**, 3, 1959.

11. R a o M. M. Characterization and extentions of generalized harmonizable random fields.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1967, **58**, 3.

12. Т е м п е л ь м а н А. А. Эргодические теоремы для однородных случайных обобщенных полей на группах.— Лит. мат. сб., 1962, **2**, 1.

13. П о н о м а р е н к о А. И. О среднем значении операторной положительно определенной функции на группе.— Теория вероят. и матем. статист., 1970, вып. 1.

14. Р о з а н о в Ю. А. Стационарные случайные процессы. Физматгиз, М., 1963.

15. М и р з а х м е д о в М. А. Линейные преобразования однородных обобщенных случайных полей.— Изв. АН УзбССР, 1967, **11**, 2.

A. I. Ponomarenko

HARMONIC ANALYSIS OF GENERALISED WIDE SENSE HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS ON COMMUTATIVE LOCALLY COMPACT GROUP

S u m m a r y

This paper deals with spectral representations and ergodic theorems for generalised wide-sense homogeneous random fields on commutative locally compact groups. The linear transformations of such fields are also considered.

Поступила в редколлегию 30. IX. 1969.