Л. В. СЕРГЕЕВА, асп.,
Киевский университет
Н. И. ТЕТЕРИНА, асп.,
Киевский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ задан процесс броуновского движения $w(t)$, $t \in [t_0, T]$. Пусть $z(t)$ — марковский процесс с конечным числом состояний ($t \in [t_0, T]$); значения процесса $z(t)$ предполагаются независимыми от значений процесса $w(s)$ ($s \in [t_0, T]$). Пусть $a(t, x, k)$ и $b(t, x, k)$ ($t \in [t_0, T]$, $x \in R^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$) — функции, для которых предполагается выполнение следующих условий:

а) они непрерывны по первому аргументу;

б) при каждом k они являются измеримыми функциями пары (t, x);

в) для всех x, y из $R^{(1)}$

$$|a(t, x, k)|^2 + |b(t, x, k)|^2 \leqslant \alpha + \beta |x|^2, \tag{1}$$

$$|a(t, x, k) - a(t, y, k)|^2 + |b(t, x, k) - b(t, y, k)|^2 \leqslant L\, |x - y|^2.$$

Рассматривается стохастическое интегральное уравнение *)

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s), z(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, \xi(s), z(s))\, dw(s), \tag{2}$$

где $\xi(t_0) = \xi_0$ — случайная величина, не зависящая от процессов $z(s)$, $w(s) - w(t_0)$ ($s \in [t_0, T]$).

Под решением (2) будем понимать процесс $\xi(t)$, измеримый относительно σ-алгебры F_t:

$$F_t = \sigma\{w(s) - w(t_0), \quad t_0 < s \leqslant t; \quad \xi(t_0); \quad z(s), \quad s \in [t_0, t]\},$$

для которого (2) имеет место при каждом $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1. Введем банахово пространство $\mathfrak{A}_n$, состоящее из случайных функций $\xi(t)$, удовлетворяющих следующим условиям: для всякого $t \in [t_0, T]$ $\xi(t)$ измеримы относительно σ-алгебры F_t и

$$M|\xi(t)|^n \leqslant C < \infty,$$

$$\|\xi(\cdot)\|^n_{\mathfrak{A}_n} = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} M|\xi(t)|^n.$$

*) Это уравнение является непосредственным обобщением уравнения Ито (см. [1]).

Существование и единственность решения уравнения (2). Марковость процесса $\{\xi(t),\ z(t)\}$

Теорема 1. Если $M|\xi(t_0)|^2 < \infty$, то существует процесс $\xi(t)$ — решение (2), причем если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два решения (2) при фиксированном $\xi(t_0)$, то $M|\xi_2(t) - \xi_1(t)|^2 = 0$. Двухкомпонентный процесс $\{\xi(t),\ z(t)\}$ является марковским.

Доказательство. Введем оператор S

$$(S\xi)(t) = \eta(t) = \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s), z(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} b(s,)\,\xi(s), z(s)\,dw(s). \tag{3}$$

Лемма 1. Оператор S действует в пространстве $\mathfrak{A}_2$ и непрерывен там, если $\varphi(t) \in \mathfrak{A}_2$.

Доказательство леммы 1. Из (3) следует, что $\eta(t)$ измерим относительно F_t:

$$M|\eta(t)|^2 \leqslant 3\,\{M|\varphi(t)|^2 + M|\int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s), z(s))\,ds|^2 +$$

$$+ M|\int_{t_0}^{t} b(s, \xi(s), z(s))\,dw(s)|^2\} \leqslant 3\,\{M|\varphi(t)|^2 +$$

$$+ (t-t_0)\int_{t_0}^{t} M|a(s, \xi(s), z(s))|^2\,ds + \int_{t_0}^{t} M|b(s, \xi(s), z(s))|^2\,ds\} \leqslant$$

$$\leqslant 3\,\{C + \alpha(t^2 + t) + \beta(t^2 + t)\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} M|\xi(t)|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant 3\,\{C + \alpha(T^2 + T) + \beta(T^2 + T)C\} < \infty.$$

Пусть теперь

$$S\xi_1 = \eta_1, \quad S\xi_2 = \eta_2.$$

Тогда

$$M|\eta_2(t) - \eta_1(t)|^2 \leqslant 2M|\int_{t_0}^{t} [a(s, \xi_2(s), z(s)) -$$

$$- a(s, \xi_1(s), z(s))]\,ds|^2 + 2M|\int_{t_0}^{t} b(s, \xi_2(s), z(s)) -$$

$$- b(s, \xi_1(s), z(s))]\,dw(s)|^2 \leqslant 2(t-t_0)\int_{t_0}^{t} LM|\xi_2(s) -$$

$$- \xi_1(s)|^2\,ds + 2\int_{t_0}^{t} LM|\xi_2(s) - \xi_1(s)|^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2L\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} M|\xi_2(s) - \xi_1(s)|^2\,T(T+1) = NT\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} M|\xi_2(s) - \xi_1(s)|^2.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Справедлива также оценка

$$M\,|\,(S\xi_2)(t)-(S\xi_1)(t)\,|^2 \leqslant N\int_{t_0}^{t} M\,|\,\xi_2(s)-\xi_1(s)\,|^2\,ds.$$

Лемма 2. Существует такое целое n, что в $\mathfrak{A}_2$ S^n является сжимающим оператором.

Доказательство леммы 2.

$$M\,|\,(S^2\xi_2)(t)-(S^2\xi_1)(t)\,|^2 \leqslant N\int_{t_0}^{t} M\,|\,S\xi_2(s)-S\xi_1(s)\,|^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant N^2 \sup_{t\in[t_0,T]} M\,|\,\xi_2(t)-\xi_1(t)\,|^2\,\frac{(t-t_0)^2}{2}.$$

По индукции

$$M\,|\,(S^n\xi_2)(t)-(S^n\xi_1)(t)\,|^2 \leqslant \frac{(N(t-t_0))^n}{n!}\,\|\,\xi_2-\xi_1\,\|^2_{\mathfrak{A}_2},$$

$$\|\,S^n\xi_2-S^n\xi_1\,\|^2_{\mathfrak{A}_2} \leqslant \frac{(NT)^n}{n!}\,\|\,\xi_2-\xi_1\,\|^2_{\mathfrak{A}_2}.$$

Очевидно, что, начиная с некоторого n

$$\frac{(NT)^n}{n!} < 1.$$

Лемма 2 доказана.

Оператор S^n, по теореме о сжатых отображениях, имеет единственную неподвижную точку ξ:

$$S^n\xi = \xi.$$

Тогда $S^{n+1}\xi = S\xi$, т. е. $S\xi$ — тоже неподвижная точка оператора S^n. В силу единственности неподвижной точки

$$S\xi = \xi,$$

т. е. оператор S имеет в $\mathfrak{A}_2$ неподвижную точку ξ, а так как она общая у операторов S и S^n, то у S она единственная. Существование и единственность в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения (1) доказаны.

Докажем марковость двухкомпонентного процесса $\{\xi(t),\ z(t)\}$. Введем процесс $\xi_{t,x}(s)$, который является решением уравнения

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u,\ \xi_{t,x}(u),\ z(u))\,du + \int_t^s b(u,\ \xi_{t,x}(u),\ z(u))\,dw(u), \quad (4)$$

$$t \leqslant s \leqslant T, \quad t > t_0.$$

Для $s \in [t, T]$ процесс $\xi(s)$ в силу доказанного выше является единственным решением уравнения

$$\xi(s) = \xi(t) + \int_t^s a(u; \xi(u), z(u))\, du + \int_t^s b(u, \xi(u), z(u))\, dw(u).$$

Процесс $\xi_{t,\xi(t)}(s)$ — тоже решение этого уравнения. Значит, $\xi(s) = \xi_{t,\xi(t)}(s)$ при $S \in [t, T]$ с вероятностью 1.

Для доказательства марковости процесса $\{\xi(t), z(t)\}$ надо показать, что справедливо следующее равенство:

$$P\{\xi(s) \in A, z(s) = j/\xi(t), z(t)\} = P\{\xi(s) \in A, z(s) = j/F_t\}.$$

Воспользовавшись понятием условного математического ожидания, это равенство можно переписать в следующем виде: для любой непрерывной по x ограниченной функции $\lambda(x, z)$ $(x \in R^{(1)},\ z = 1, 2, \ldots, n)$ и для любой F_t-измеримой ограниченной случайной величины ζ должно выполняться

$$M\zeta\lambda(\xi(s), z(s)) = M\{\zeta M\{\lambda(\xi(s), z(s))/\xi(t), z(t)\}\}. \tag{5}$$

Обозначим $\varphi(x, z, \omega) = \lambda(\xi_{t,x}(s), z)$. Тогда $\varphi(\xi(t), z(s), \omega) = \lambda(\xi(s), z(s))$. Предположим сначала, что имеет место следующее представление:

$$\varphi(x, z, \omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\beta_k(z, \omega).$$

В этом случае (5) устанавливаем, пользуясь независимостью $\beta_k(z, \omega)$ от F_t:

$$M\zeta \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\xi(t))\beta_k(z(s), \omega) = MM\left\{\xi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\xi(t))\beta_k(z(s), w)/F_t\right\} =$$

$$= M\zeta \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\xi(t))\, M\{\beta_k(z(s), \omega)/F_t\} =$$

$$= M\zeta \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\xi(t))\, M\{\beta_k(z(s), \omega)/z(t)\} =$$

$$= M\zeta M\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\xi(t))\beta_k(z(s), \omega)/\xi(t), z(t)\right\}.$$

И при этом

$$M\{\lambda(\xi(s), z(s))/\xi(t), z(t)\}\Big|_{\substack{\xi(t)=x\\ z(t)=i}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, M\{\beta_k(z(s), \omega)/z(t) = i\} = M\{\varphi(x, z(s), \omega)/z(t) = i\} =$$

$$= M\{\lambda(\xi_{t,x}(s), z(s))/z(t) = i\}. \tag{6}$$

Предельным переходом (5) и (6) распространяются на все функции $\varphi(x, z, \omega)$. Таким образом, показано, что $\{\xi(t), z(t)\}$ — марковский процесс *), переходные вероятности которого в силу (6) определяются следующими соотношениями:

$$P\{\xi(s) \in A, z(s) = j/\xi(t) = x, z(t) = i\} = P_{ij}(t, x, s, A) =$$
$$= P\{\xi_{t,x}(s) \in A, z(s) = j/z(t) = i\}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. При доказательстве существования и единственности решения уравнения (2) использовалась последовательность сжимающих операторов, которую можно применить для построения аппроксимации этого решения со сходимостью в смысле среднего квадратичного:

$$\xi_0(t) = \xi_0;$$

$$\xi_n(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi_{n-1}(s), z(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, \xi_{n-1}(s), z(s))\, dw(s),$$

$$n \geqslant 1.$$

Замечание 2. Используя методы, выведенные в работе [3], можно показать, что в предположении существования непрерывных ограниченных производных $a'_x(\ldots)$, $b'_x(\ldots)$, $a''_x(\ldots)$, $b''_x(\ldots)$ и ограниченных производных $a'''_x(\ldots)$ и $b'''_x(\ldots)$ (или выполнения для $a''_x(\ldots)$ и $b''_x(\ldots)$ условия Липшица по x) $\xi(t)$ — решение (2) — имеет по начальному условию ξ_0 первую производную из пространства $\mathfrak{A}_2$, а вторую — из пространства $\{\mathfrak{A}_4 \to \mathfrak{A}_2\}$.

Диффузионность процесса $\{\xi(t), z(t)\}$

Под диффузионным процессом обычно понимают марковский процесс, переходные вероятности которого подчиняются некоторым оценкам [1].

Назовем марковский процесс $\{\xi(t), z(t)\}$ с непрерывной компонентой $\xi(t)$ и дискретной $z(t)$ диффузионным, если для матрицы переходных вероятностей этого процесса $\mathrm{P}(t, x, s, A) = \| P^{ij}(t, x, s, A) \|$ справедливы аналогичные оценки:

1) для всякого x и $\varepsilon > 0$ равномерно по $t < s$:

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \mathrm{P}(t, x, s, dy) = o(s-t);$$

*) Подобного вида двухкомпонентные марковские процессы с одной дискретной и другой непрерывной компонентами рассматриваются в работе [7].

2) существуют такие матричные функции $\mathrm{A}(t, x)$ и $\mathrm{B}(t, x)$, что для всякого x и $\varepsilon > 0$ равномерно по $t < s$

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (x-y)\,\mathrm{P}(t, x, s, dy) = \mathrm{A}(t, x)(s-t) + o(s-t),$$
$$\int\limits_{|x-y|\leqslant\varepsilon} (y-x)^2\,\mathrm{P}(t, x, s, dy) = \mathrm{B}(t, x)(s-t) + o(s-t). \tag{7}$$

Теорема 2. Процесс $\{\xi(t), z(t)\}$, марковость которого доказывалась в теореме 1, является диффузионным процессом.

Доказательство. Достаточно доказать (см. [1]) выполнение следующих условий:

$$\int (y-x) \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t, x, s, dy) = M\{\xi_{t,x}(s) - x/z(t) = i\} =$$
$$= a(t, x, i)(s-t) + o(s-t); \tag{7'}$$
$$\int (y-x)^2 \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t, x, s, dy) = b(t, x, i)(s-t) + o(s-t).$$

Рассмотрим

$$M\{\xi_{t,x}(s) - x/z(t) = i\} = \int\limits_t^s M\{a(u, \xi_{t,x}(u), z(u))/z(t) = i\}\,du =$$
$$= a(t, x, i)(s-t) + \int\limits_t^s M\{a(u, x, z(u)) - a(t, x, i)/z(t) = i\}\,du +$$
$$+ \int\limits_t^s M\{a(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) - a(u, x, z(u))/z(t) = i\}\,du.$$

В силу непрерывности коэффициента $a(u, x, z(u))$ по первому аргументу и стохастической непрерывности $z(u)$

$$\int\limits_t^s M\{a(u, x, z(u)) - a(t, x, i)/z(t) = i\}\,du = o(s-t).$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся неравенством, которое устанавливается рассуждениями, аналогичными [2]:

$$M\{|\xi_{t,x}(s) - x|^{2m}/z(t) = i\} \leqslant H(s-t)^m (1 + |x|^{2m}),$$

где H — постоянная, зависящая лишь от m, L, α, β и $T - t_0$.

Таким образом,

$$\int\limits_t^s M\{a(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) - a(u, x, z(u))/z(t) = i\}\,du \leqslant$$
$$\leqslant (s-t)^{\frac{3}{4}} \left\{\int\limits_t^s M[|a(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) - a(u, x, z(u))|^4/z(t) =\right.$$

$$= i]\,du\Big\}^{\frac{1}{4}} \leqslant (s-t)^{\frac{3}{4}}\left\{\int\limits_t^s M\,[|\,\xi_{t,x}(u) - x\,|^4/z(t) = i]\,du\right\}^{\frac{1}{4}} \leqslant$$

$$\leqslant (s-t)^{\frac{3}{4}}\left\{\int\limits_t^s H\,(u-t)^2\,(1 + |\,x\,|^4)\,du\right\}^{\frac{1}{4}} = O\,(s-t)^{\frac{3}{2}} = o\,(s-t).$$

Первое из условий (7′) доказано. Рассмотрим теперь

$$M\,\{(\xi_{t,x}(s) - x)^2/z(t) = i\} = M\left\{(\int\limits_t^s a\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,du + \right.$$

$$\left. + \int\limits_t^s b\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\ \ z(u))\,dw\,(u))^2\,/z(t) = i\right\}.$$

Имеем

$$M\left\{\left[\int\limits_t^s a\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,du\right]^2/z(t) = i\right\} \leqslant (s-$$

$$-t)\int\limits_t^s M\,\{a^2\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))/z(t) = i\}\,du = o\,(s-t).$$

Далее,

$$M\left\{\left[\int\limits_t^s b\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,dw\,(u)\right]^2/z(t) = i\right\} =$$

$$= \int\limits_t^s M\,\{b^2\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))/\,z(t) = i\}\,du = O\,(s-t),$$

$$M\left\{\left[\int\limits_t^s a\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,du\right]\left[\int\limits_t^s b\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,dw\,(u)/z(t) = \right.\right.$$

$$\left. = i\right\} \leqslant \left\{M\left[\left(\int\limits_t^s a\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,du\right)^2/z(t) = i\right] \times\right.$$

$$\left. \times M\left[\left(\int\limits_t^s b\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,dw\,(u)\right)^2/z(t) = i\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = o\,(s-t).$$

Следовательно,

$$M\,\{(\xi_{t,x}(s) - x)^2/z(t) = i\} =$$

$$= M\left\{\left(\int\limits_t^s b\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))\,dw\,(u)\right)^2/z(t) = i\right\} +$$

$$+ o\,(s-t) = \int\limits_t^s M\,\{b^2\,(u,\,\xi_{t,x}(u),\,z(u))/z(t) = i\}\,du +$$

$$+ o\,(s-t) = b^2\,(t,\,x,\,i)\,(s-t) + \int\limits_t^s M\,\{b^2\,(u,\,x,\,z(u)) -$$

$$-b^2(t, x, i)/z(t) = i\} \, du + \int_t^s M\{b^2(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) -$$

$$- b^2(u, x, z(u))/z(t) = i\} \, du + o(s-t).$$

Из непрерывности коэффициента $b(u, x, z(u))$ по первой компоненте и стохастической непрерывности $z(u)$ следует

$$\int_t^s M\{b^2(u, x, z(u)) - b^2(t, x, i)/z(t) = i\} \, du = o(s-t).$$

Имеем

$$M\left\{\int_t^s [b^2(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) - b^2(u, x, z(u))] \, du/z(t) = i\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_t^s M\{[b(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) - b(u, x, z(u))]^2/z(t) = i\} \, du\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int_t^s M\{[b(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) + b(u, x, z(u))]^2/z(t) = i\} \, du\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant [(s-t)^{\frac{1}{2}} \left\{\int_t^s M[(b(u, \xi_{t,x}(u), z(u)) - b(u, x, z(u)))^4/z(t) =\right.$$

$$\left.= i] \, du\right\}^{\frac{1}{2}} O(s-t)\Big]^{\frac{1}{2}} = O\left((s-t)^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}\right) = o(s-t),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Обратное уравнение Колмогорова

Матрица переходных вероятностей диффузионного процесса $\{\xi(t), z(t)\}$ — $P(t, x, s, A)$ — удовлетворяет условиям (7), где

$$A(t, x) = \begin{Vmatrix} a(t, x, 1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a(t, x, n) \end{Vmatrix},$$

$$B(t, x) = \begin{Vmatrix} b(t, x, 1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b(t, x, n) \end{Vmatrix}.$$

Пусть $P(t, s) = \| P_{ij}(t, s) \|$ — матрица переходных вероятностей марковского процесса $z(t)$. Введем матрицу

$$\Phi(x) = \| \varphi_{ij}(x) \|,$$

где $\varphi_{ij}(s)$ — непрерывные ограниченные функции. Пусть

$$U(t, x) = \int P(t, x, s, dy) \Phi(y).$$

Теорема 3. Пусть $\Phi(x) = \| \varphi_{ij}(x) \|$ такова, что компоненты матрицы $U(t, x)$ имеют ограниченные непрерывные производные $\frac{\partial u_{ij}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2}$. Тогда, если компоненты матриц $A(t, x)$ и $B(t, x)$ непрерывны, то $U(t, x)$ имеет производную $\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = A(t, x) \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} B(t, x) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} + P'(t, t) U(t, x) \tag{9}$$

$$(t \in (0, s), \quad x \in R^{(1)})$$

и условию

$$\lim_{t \uparrow s} U(t, x) = \Phi(x). \tag{10}$$

Доказательство. Условие (10) следует из соотношений

$$U(t, x) = \int P(t, x, s, dy) \Phi(y) = \int\limits_{|x-y| \leqslant \varepsilon} P(t, x, s, dy) [\Phi(y) - \Phi(x)] + \int\limits_{|x-y| > \varepsilon} P(t, x, s, dy) [\Phi(y) - \Phi(x)] + \int P(t, x, s, dy) \Phi(x) = o(s-t) + P(t, s) \Phi(x) \underset{t \to s}{\to} \Phi(x),$$

так как $P(t, x, s, A) \to 0$, если $x \overline{\in} A$ при $t \to s$ и $P(t, s) \underset{t \to s}{\to} E$.

Далее,

$$U(t, x) = \int P(t, x, s, dy) \Phi(y) = \iint P(t, x, u, dz) P(u, z, s, dy) \times \Phi(y) = \int P(t, x, u, dz) U(u, z),$$

$$U(t, x) - U(t, z) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial x}(z - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2}(z - x)^2 [E + \alpha_\varepsilon],$$

где $\alpha_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ при $|x - z| \leqslant \varepsilon$.

Поэтому

$$U(t, x) - U(u, x) = \int P(t, x, u, dz) [U(u, z) \pm U(u, x)] - U(u, x) = \int\limits_{|z-x| \leqslant \varepsilon} P(t, x, u, dz) [U(u, z) - U(u, x)] +$$

$$+ o(u-t) + [\int P(t, x, u, dz)] U(u, x) - U(u, x) =$$

$$= \left[\int\limits_{|z-x|\leqslant\varepsilon} P(t, x, u, dz)(z-x) \right] \frac{\partial U(t, x)}{\partial z} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\int\limits_{|z-x|\leqslant\varepsilon} (z-x)^2 P(t, x, u, dz) \right] \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} (E + \alpha_\varepsilon) +$$

$$+ [P(t, u) - E] U(u, x) + o(u-t) = A(t, x) \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} (u-t) +$$

$$+ \frac{1}{2} B(t, x) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} (E - \alpha_\varepsilon)(u-t) + [P(t, t + (u-t)) -$$

$$- P(t, t)] U(u, x) + o(u-t).$$

Переходя к пределу при $u \to t$, $\varepsilon \to 0$, получаем

$$-\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = A(t, x) \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{2} B(t, x) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} + P'(t, t) U(t, x).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Для того чтобы матрица $\Phi(x)$ удовлетворяла условиям теоремы, можно, например, потребовать существования у $\varphi_{ij}(x)$ непрерывных ограниченных производных I и II порядков. В этом случае существование у $u_{ij}(t, x)$ непрерывных ограниченных производных $\frac{\partial u_{ij}}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2}$ можно доказать аналогично [1].

Замечание 2. Частным случаем выведенного уравнения является уравнение Колмогорова для матрицы $P(t, s)$ переходных вероятностей $z(t)$ — марковского процесса с конечным числом состояний [5]:

$$-\frac{\partial P(t, s)}{\partial t} = P'(t, t) P(t, s).$$

Построение аппроксимации процесса $\xi(t)$

Пусть $t \in [t_0, T]$, $\Delta = \Delta(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ — разбиение этого отрезка:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T.$$

Определим случайное блуждание

$$\xi_1 = \xi_0 + \alpha(t_0, \xi_0, z_0) \Delta t_0 + b(t_0, \xi_0, z_0) \Delta w_0,$$

$$\xi_2 = \xi_1 + \alpha(t_1, \xi_1, z_1) \Delta t_1 + b(t_1, \xi_1, z_1) \Delta w_1,$$

. . . .

$$\xi_n = \xi_{n-1} + a(t_{n-1}, \xi_{n-1}, z_{n-1}) \Delta t_{n-1} + b(t_{n-1}, \xi_{n-1}, z_{n-1}) \Delta w_{n-1}.$$

Здесь ξ_0 — заданная случайная величина, для которой

$$M\xi_0^2 < \infty; \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k;$$

$$z_k = z(t_k); \quad \Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k).$$

По этому блужданию можно построить процесс

$$\xi_\Delta(t) = \xi_\mu + a(t_\mu, \xi_\mu, z_\mu)(t - t_\mu) + b(t_\mu, \xi_\mu, z_\mu)[w(t) - w(t_\mu)]$$

при $t_\mu \leqslant t < t_{\mu+1}$.

Теорема 4. Для любого $t \in [t_0, T]$

$$\underset{\rho(\Delta)\to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, \xi_\Delta(t) = \xi(t)$$

$$(\rho(\Delta) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta t_{k-1}).$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можно положить $\xi_0 = \mathrm{const}$; общий результат получится после последующего осреднения по распределению вероятностей для ξ_0.

Лемма 3.

$$\left.\begin{matrix} M(\xi_m^{2p}) \\ M(\xi_\Delta^{2p}(t)) \end{matrix}\right\} \leqslant C(1 + \xi_0^2)^p,$$

$p = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant m \leqslant n$, C не зависит от m, t, ξ_0.

Доказательство леммы. При $p = 1$

$$M(\xi_m^2) = M(\xi_{m-1}^2) + M\{a^2(t_{m-1}, \xi_{m-1}, z_{m-1})\}(\Delta t_{m-1}^2) +$$
$$+ M\{b^2(t_{m-1}, \xi_{m-1}, z_{m-1})\}\Delta t_{m-1} + 2M\{\xi_{m-1}a(t_{m-1}, \xi_{m-1}, z_{m-1})\} \times$$
$$\times \Delta t_{m-1}.$$

Принимая во внимание условия (1), получаем

$$M(\xi_m^2) \leqslant M(\xi_{m-1}^2)(1 + C_1\Delta t_{m-1}) + C_1\Delta t_{m-1}.$$

Проводя последовательную подстановку, имеем

$$M(\xi_m^2) \leqslant \xi_0^2 \prod_{k=0}^{m-1}(1 + C_1\Delta t_k) + \prod_{k=0}^{m-1}(1 + C_1\Delta t_k)\sum_{k=0}^{m-1}\Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant (\xi_0^2 + T - t_0)C \leqslant C(1 + \xi_0^2).$$

Это же справедливо и для $M(\xi_\Delta^2(t))$.

Общий случай доказывается по индукции. Лемма 3 доказана.

Можем записать

$$\xi_\Delta(t) = \xi_0 + \sum_{\nu=0}^{\mu-1} a(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)\Delta t_\nu +$$

$$+ a(t_\mu, \xi_\Delta(t_\mu), z_\mu)(t - t_\mu) + \sum_{\nu=0}^{\mu-1} b(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)\Delta w_\nu +$$

$$+ b(t_\mu, \xi_\Delta(t_\mu), z_\mu)[w(t) - w(t_\mu)] = \xi_0 +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} a(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)\,ds + \sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} b(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)\,dw,$$

где $\sum\limits_{\nu=0}^{\mu^*}$ означает, что в последнем слагаемом вместо $t_{\mu+1}$ надо взять t.

Будем оценивать

$$\Delta(t) = M|\xi(t) - \xi_\Delta(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2M\left|\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}[a(s, \xi(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)]\,ds\right|^2 +$$

$$+ 2M\left|\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}[b(s, \xi(s), z(s)) - b(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)]\,dw\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2(T - t_0)\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} M|a(s, \xi(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)|^2\,ds +$$

$$+ 2\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} M|b(s, \xi(s), z(s)) - b(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)|^2\,ds.$$

Используя условия (1) и лемму 3, получаем

$$M|a(s, \xi(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)|^2 \leqslant C\Delta(s) +$$
$$+ CM|a(s, \xi_\Delta(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(s), z_\nu)|^2 +$$
$$+ CM|\xi_\Delta(s) - \xi_\Delta(t_\nu)|^2,$$

$$M|\xi_\Delta(s) - \xi_\Delta(t_\nu)|^2 = M|\xi_\Delta(s) - \xi_\nu|^2 \leqslant C(1 + \xi_0^2)|s - t_\nu|.$$

Обозначим

$$F_{ij,s}(y) = P\{\xi_\Delta(s) \leqslant y / z(t) = i,\ z(s) = j\}$$

и запишем

$$M|a(s, \xi_\Delta(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(s), z_\nu)|^2 =$$
$$= \sum_{i,j} M\{|a(s, \xi_\Delta(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(s), z_\nu)|^2 / z(s) =$$
$$= j,\ z_\nu = i\}\, P\{z(s) = j,\ z_\nu = i\},$$

$$M\{|a(s, \xi_\Delta(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(s), z_\nu)|^2 / z(s) =$$
$$= j,\ z_\nu = i\} = \int |a(s, y, j) - a(t_\nu, y, i)|^2\, dF_{ij,s}(y).$$

Из условий (1) и леммы 3 следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое k, что

$$I_1 = \int\limits_{|y|>k} |a(s, y, j) - a(t_\nu, y, i)|^2\, dF_{ij,s}(y) \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{|y|>k} (1+y^2)\, dF_{ij,s}(y) \leqslant \frac{C}{1+k^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+y^2)\, dF_{ij,s}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1(\xi_0)}{1+k^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} C_1(\xi_0)$$

(здесь и в дальнейшем $C(\xi_0)$ — некоторая ограниченная функция),

$$I_2 = \int\limits_{|y| \leqslant k} |a(s, y, j) - a(t_\nu, y, i)|^2\, dF_{ij,s}(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{|y| \leqslant k} |a(s, y, j) - a(t_\nu, y, j)|^2\, dF_{ij,s}(y) +$$

$$+ 2 \int\limits_{|y| \leqslant k} |a(t_\nu, y, j) - a(t_\nu, y, i)|^2\, dF_{ij,s}(y).$$

В силу непрерывности $a_i^*(\ldots)$ по t существует такое $\delta > 0$, что при $|s - t_\nu| < \delta$

$$2 \int\limits_{|y| \leqslant k} |a(s, y, j) - a(t_\nu, y, j)|^2\, dF_{ij,s}(y) \leqslant \frac{\varepsilon C_1(\xi_0)}{2}.$$

В силу стохастической непрерывности $z(t)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$P\{z(s) = j,\ z(t) = i\} = P_{ij}(t, s) < \varepsilon,$$

как только $|s - t| < \delta_1$ при $i \neq j$.

Следовательно, при $\rho(\Delta) = \min(\delta, \delta_1)$

$$M|a(s, \xi_\Delta(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(s), z_\nu)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon C_1(\xi_0) \sum_{i,j} P_{ij}(t, s) + 2 \sum_{i \neq j} \int\limits_{|y| \leqslant k} |a(s, y, j) -$$

$$- a(t_\nu, y, i)|^2\, dF_{ij,s}(y)\, P_{ij}(t, s) \leqslant \varepsilon C_2(\xi_0) +$$

$$+ C_3(\xi_0) \sum_{i \neq j} P_{ij}(t, s) \leqslant \varepsilon C(\xi_0).$$

Учитывая полученные оценки, имеем

$$M|a(s, \xi(s), z(s)) - a(t_\nu, \xi_\Delta(t_\nu), z_\nu)|^2 \leqslant C\Delta(s) +$$

$$+ \varepsilon C(\xi_0) + C(1 + \xi_0^2)|s - t_\nu|, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu.$$

Такое же неравенство справедливо и для $b(\ldots)$. Таким образом,

$$\Delta(t) = M|\xi(t) - \xi_\Delta(t)|^2 \leqslant C(\xi_0) \left[\sum_{\nu=0}^{\mu^*} \int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \Delta(s)\, ds + \right.$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\mu^*} \Delta t_\nu + \sum_{\nu=0}^{\mu^*} \int\limits_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} (s - t_\nu)\, ds \right] =$$

$$= C(\xi_0)\left[\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\Delta(s)\,ds + \varepsilon(t-t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\Delta t_\nu^2\right] \leqslant \varepsilon C_1(\xi_0) + C(\xi_0)\sum_{\nu=0}^{\mu^*}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\Delta(s)\,ds.$$

Пользуясь леммой Гронуолла [4], получаем

$$\Delta(s) = M|\xi(t) - \xi_\Delta(t)|^2 \leqslant \varepsilon C(\xi_0)\exp[C(\xi_0)(t - $$
$$- t_0)] = \varepsilon C_2(\xi_0) \text{ при } \rho(\Delta) < \delta.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. В доказательстве сходимости построенного процесса $\xi_\Delta(t)$ к решению (2) использовались методы, разработанные в [6]. Аналогично [6] можно доказать и само существование решения уравнения (2), рассмотрев два различных разбиения отрезка $[t_0, T]$.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. Л. Далецкому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. «Наукова думка», К., 1968.
3. Далецкий Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.— УМН, 22, вып. 4 (136), 1967.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
5. Колмогоров А. Н. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний.— Бюлл. МГУ, 1, № 3, 1937.
6. Маруяма Г. Непрерывные марковские процессы и стохастические уравнения.— В сб.: Математика, 1 : 2, 1957.
7. Ширяев А. Н. О стохастических уравнениях в теории условных марковских процессов.— Теория вероятностей и ее применение, 11, 1, 1966.

L. V. Sergeeva, N. I. Teterina

RESEARCH OF SOLUTION OF THE STOCHASTIC EQUATION WITH RANDOM COEFFICIENTS

Summary

The stochastic equation to be considered has coefficient depending on a Markov chain. The existence of the solution of this equation is proved. Properties of its distribution are treated, and its approximation is proposed.

Поступила в редколлегию 2.9.1969.