Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, асп.,
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ. I

В первой части работы изучаются возможные предельные распределения для функционалов аддитивного типа от полумарковских процессов с конечным множеством состояний в схеме серий.

1. Пусть для каждого $\alpha \in [0, 1)$ $T_j(\alpha)$, $j = \overline{1, 3}$ — независимые совокупности случайных величин, определяемые следующим образом:

$T_1(\alpha) = \{\eta_\alpha(n),\ n = 0, 1, \ldots\}$ — однородная цепь Маркова с конечным множеством состояний $H = \{1, 2, \ldots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей $\| p_{ij}(\alpha) \|_{ij=1}^{m}$,

$T_2(\alpha) = \{(\tau(\alpha, n, i), \gamma(\alpha, n, i)),\ n \geqslant 0,\ i \in H\}$ — множество независимых в совокупности случайных векторов, принимающих значения в $[0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, с распределениями, которые не зависят от n,

$T_3(\alpha = \{\zeta(\alpha, n, i), n \geqslant 0,\ i \in H\}$ — множество независимых в совокупности случайных величин таких, что для всех $n \geqslant 0$, $i \in H$.

$$\zeta(\alpha, n, i) = \begin{cases} 0 \text{ с вероятностью } p(\alpha, i) \\ 1 \text{ с вероятностью } 1 - p(\alpha, i). \end{cases}$$

Введем в рассмотрение случайный функционал

$$\xi(\eta_0, \alpha, t) = \sum_{k=1}^{\nu(\alpha,t)} \gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)),$$

где

$$\nu(\alpha, t) = \max\left(n : \sum_{k=1}^{n} \tau(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) \leqslant t,\ \prod_{k=1}^{n} \zeta(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) = 1\right)^{*)},$$

$$\eta_0 = \eta_\alpha(0) = \text{const} \in H \text{ с вероятностью } 1.$$

---

*) $\sum\limits_{k=a}^{b} = 0$, $\prod\limits_{k=a}^{b} = 1$, если $b < a$.

Нас интересуют возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(\eta_0, \alpha, t)$ при $t \to \infty$ и $\alpha \to 1$ так, что выполняется условие

(A_1) : 1) $\lim\limits_{\alpha\to 1} p_{ij}(\alpha) = p_{ij}$, $i, j \in H$ и однородная цепь Маркова $T = \{\eta_n, n = 0, 1, \ldots\}$ с множеством состояний H и матрицей переходных вероятностей $\| p_{ij} \|_{ij=1}^{m}$ эргодична (ее стационарное распределение обозначим через q_j, $j = \overline{1, m}$),

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1} p(\alpha, i)\, v(\alpha) = p_i \in [0, \infty)$, $i = \overline{1, m}$,

где

$$v(\alpha) \in \mathfrak{M} = \{f(\alpha), \alpha \in [0, 1) : f(\alpha) \geqslant 0, \lim_{\alpha\to 1} f(\alpha) = +\infty\};$$

3) $\lim\limits_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \sum\limits_{k=1}^{[v(\alpha)]} \dfrac{\tau(\alpha, k, i)}{t(\alpha)} = \tau_i$ *), $i \in H$,

где τ_i, $i \in H$ — собственные случайные величины, $t(\alpha) \in \mathfrak{M}$,

4) $\sum\limits_{i=1}^{m} (p_i + P\{\tau_i > 0\}) > 0$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \sum\limits_{k=1}^{[v(\alpha)]} \dfrac{(\gamma(\alpha, k, i) - b(\alpha, i))}{u(\alpha)} = \gamma_i$, $i \in H$,

где γ_i, $i \in H$ — собственные случайные величины, $u(\alpha) \in \mathfrak{M}$;

$$\lim_{\alpha\to 1}\left(1 + \frac{\sqrt{v(\alpha)}}{u(\alpha)}\right)^{-1} = q \in [0, 1], \ \lim_{\alpha\to 1} b(\alpha, i) = b(i) \in (-\infty, \infty), \ i \in H.$$

Замечание 1. В силу условия (A_1), 1) по крайней мере для α, близких к 1, эргодична каждая цепь Маркова $T_1(\alpha)$, и поэтому, не нарушая общности, будем считать, что все цепи Маркова $T_1(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1)$ эргодичны.

Стационарное распределение $T_1(\alpha)$ обозначим $q_j(\alpha)$, $j = \overline{1, m}$.

Если $\sum\limits_{i=1}^{m} p(\alpha, i) > 0$, то существует конечный с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \xi(\eta_0, \alpha, t) = \xi(\eta_0, \alpha),$$

и можно изучать возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(\eta_0, \alpha)$ при $\alpha \to 1$ так, что выполняется условие (A_1). Нетрудно видеть, что

$$\xi(\eta_0, \alpha) = \sum_{k=1}^{\nu(\alpha)} \gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)),$$

*) Символ $\lim\limits_{\alpha\to\alpha'}(\text{сл})\, \xi_\alpha = \xi_{\alpha'}$ означает слабую сходимость (сходимость в точках непрерывности) функций распределения случайных векторов ξ_α и $\xi_{\alpha'}$ при $\alpha \to \alpha'$.

где

$$\nu(\alpha) = \max\left(n : \prod_{k=1}^{n} \zeta(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) = 1\right).$$

Следовательно, условие (A_1), 3) можно опустить, так как определение $\xi(\eta_0, \alpha)$ не зависит от вида распределения величин $\tau(\alpha, 0, i)$, $i \in H$, и можно считать, что $\tau(\alpha, 0, i) = 0$ с вероятностью 1 для всех $i \in H^a$,а в этом случае $\xi(\eta_0, \alpha, i) = \xi(\eta_0, \alpha)$.

В настоящей работе предельные распределения для случайного функционала $\xi(\eta_0, \alpha, t)$ изучаются в том наиболее интересном с точки зрения приложений к случайным блужданиям случае, когда в дополнение к (A_1) выполняется условие

(A_2) для каждого $\alpha \in [0, 1)$ для всех $i \in H$, $n \geqslant 0$ случайную величину $\tau(\alpha, n, i)$ можно представить в виде

$$\tau(\alpha, n, i) = \varkappa(\alpha, n, i) + \varkappa'(\alpha, n, i)$$

таким образом, что:

1) $\{\varkappa(\alpha, n, i), (\varkappa'(\alpha, n, i), \gamma(\alpha, n, i)), \zeta(\alpha, n, i), i \in H, n \geqslant 0\}$ — независимое от $T_1(\alpha)$ множество независимых в совокупности случайных векторов, распределения которых не зависят от n,

2) $\sum_{k=1}^{[\nu(\alpha)]} \frac{\varkappa'(\alpha, k, i)}{t(\alpha)} \xrightarrow{P} 0$ при $\alpha \to 1$ *).

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (A_j), $j = 1, 2$ все конечномерные распределения случайного процесса

$$\left(\sum_{k=1}^{[t\nu(\alpha)]} \frac{(\gamma(\alpha, k, i) - b(\alpha, i))}{u(\alpha)}, \sum_{k=1}^{[t\nu(\alpha)]} \frac{\tau(\alpha, k, i)}{t(\alpha)}\right), \quad t \geqslant 0$$

сходятся слабо (в точках непрерывности) к соответствующим конечномерным распределениям однородного во времени случайного процесса с независимыми приращениями $(\gamma_i(t), \tau_i(t))$, $t \geqslant 0$, $i \in H$, конечномерные распределения которого определяются соотношением

$$M \exp\{\sqrt{-1}(u_i\gamma_i(t) + v_i\tau_i(t))\} =$$
$$= (M \exp\{\sqrt{-1}u_i\gamma_i\} M \exp\{\sqrt{-1}v_i\tau_i\})^t, \quad t \geqslant 0. \qquad \text{(a)}$$

Пусть $\tau_i(t)$, $t \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$ — независимые в совокупности однородные процессы с независимыми приращениями, конечномерные распределения которых определяются соотношением (а). Так как выбор нормирующей функции $t(\alpha)$ произволен с точностью до умножения на любую положительную константу, то, не нарушая

---

* Символ $\xi_\alpha \xrightarrow{P} \xi_{\alpha'}$ при $\alpha \to \alpha'$ означает, что случайные векторы ξ_α и $\xi_{\alpha'}$ сходятся по вероятности при $\alpha \to \alpha'$.

общности, можно считать, что двумерная функция распределения

$$F(u, v) = \delta(u)\,\delta(v)\left(1 - P\left\{\sum_{i=1}^{m} v\tau_i(q_i u) \leqslant 1\right\} e^{-u\sum\limits_{i=1}^{m} p_i q_i}\right)^{*)}$$

при $v = 1$ как функция u непрерывна, исключая не более чем счетное число точек. Пусть ν — случайная величина с функцией распределения

$$P\{\nu < u\} = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leqslant 0 \\ 1 - P\left\{\sum\limits_{i=1}^{m} \tau_i(q_i u) \leqslant 1\right\} e^{-u\sum\limits_{i=1}^{m} q_i p_i}, & \text{если } u > 0. \end{cases}$$

Будем предполагать, что в дополнение к (A_j), $j = 1, 2$ выполняется условие

(A_3): случайная величина ν имеет непрерывную функцию распределения.

Это условие является ограничением общности, но позволяет при некоторых дополнительных предположениях применить метод доказательства теоремы 1 (устанавливающей вид возможных предельных распределений для функционала $\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha))$ для получения соответствующих оценок скорости сходимости.

Введем некоторые вспомогательные обозначения:

$N(a, b)$ — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием a и дисперсией b,

$$c(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} q_i(\alpha)\, b(\alpha, i),$$

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D \sum_{k=1}^{n} b(\eta_k),$$

$$w(\alpha) = \sqrt{v(\alpha)} + u(\alpha),$$

$$r(\alpha) = w(\alpha) + c(\alpha)\, v(\alpha).$$

Теорема 1. Если выполняются условия (A_j), $j = \overline{1, 3}$, то

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\left(\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\,\nu(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)}, \frac{\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)}\right) =$$

$$= \left(q\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\nu q_i) + (1 - q)\sqrt{\nu} N(0, \sigma^2), \nu\right),$$

причем случайные процессы $\gamma_i(t)$, $t \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$ (их конечномерные распределения определяются соотношением (a)) и случайные величины ν и $N(0, \sigma^2)$ независимы в совокупности.

---

*) $\delta(u) = \{1,$; если $u > 0$, если $u \leqslant 0\}$.

Следствие 1. Если выполняются условия (A_j), $j = \overline{1, 3}$ и

$$(A_4): \lim_{\alpha\to 1}\left(1 + \frac{c(\alpha)\,v(\alpha)}{w(\alpha)}\right)^{-1} = p \in [0, 1],$$

то

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\,\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha))}{r(\alpha)} = pq\sum_{i=1}^{m}\gamma_i(\nu q_i) +$$

$$+ p(1-q)\sqrt{\nu}N(0, \sigma^2) + (1-p)\nu.$$

Замечание 2. В том случае, когда для каждого $\alpha \in [0, 1)$ все $\tau(\alpha, n, i) = 0$, $n \geqslant 0$, $i \in H$ с вероятностью 1, теорема 1 дает ответ на вопрос о возможных предельных распределениях для случайного функционала $\xi(\eta_0, \alpha)$. При этом условия (A_2) и (A_1), 3) выполняются автоматически и

$$P\{\nu < u\} = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leqslant 0 \\ 1 - e^{-u\sum\limits_{i=1}^{m} p_i q_i}, & \text{если } u > 0 \end{cases}$$

т. е. случайная величина ν распределена показательно.

Доказательство теоремы 1. Пусть вначале для каждого $\alpha \in [0, 1)$ все $\varkappa'(\alpha, n, i) = 0$, $n \geqslant 0$, $i \in H$ с вероятностью 1. Обозначим через

$$Z = \{z = (z_0, z_1, \ldots): z_k \in H,\ k = 0, 1, \ldots\}$$

пространство реализаций цепи Маркова $T_1(\alpha)$ и через

$$P_\alpha(A) = P\{(\eta_\alpha(n), n = 0, 1, \ldots) \in A\}$$

естественным образом порождаемую ею меру на σ-алгебре борелевских подмножеств Z. Определим

$$\nu^{(z)}(\alpha, t) = \max\left(n: \sum_{k=1}^{n}\tau(\alpha, k-1, z_{k-1}) \leqslant t,\right.$$

$$\left.\prod_{k=1}^{n}\zeta(\alpha, k-1, z_{k-1}) = 1\right),$$

$$\mu(\alpha, n, i) = \sum_{k=1}^{n}\delta(\eta_\alpha(k-1), i),\ \mu^{(z)}(\alpha, n, i) = \sum_{k=1}^{n}\delta(z_{k-1}, i),$$

где

$$\delta(i, j) = \{1, \text{ если } i = j;\quad 0, \text{ если } i \neq j.$$

Для функции распределения случайной величины

$$\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\,\nu(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)} + s\frac{\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)}$$

(здесь $s \in (-\infty, \infty)$) имеют место представления

$$P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\nu(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)} + s\frac{\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} < x\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\frac{\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} = y_{k,\alpha},\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{y_{k,\alpha}v(\alpha)} \frac{(\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) - c(\alpha))}{w(\alpha)} + sy_{k,\alpha} < x\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_Z P\left\{\frac{\nu^{(z)}(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} = y_{k,\alpha}\right\} P\left\{\sum_{k=1}^{y_{k,\alpha}v(\alpha)} \frac{(\gamma(\alpha, k-1, z_{k-1}) - c(\alpha))}{w(\alpha)} +\right.$$

$$\left. + sy_{k,\alpha} < x\right\} P_\alpha(dz) = \tag{1}$$

$$= \int_Z \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\frac{\nu^{(z)}(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} = y_{k,\alpha}\right\} \times$$

$$\times P\left\{\sum_{k=1}^{y_{k,\alpha}v(\alpha)} \frac{(\gamma(\alpha, k-1, z_{k-1}) - c(\alpha))}{w(\alpha)} + sy_{k,\alpha} < x\right\} P_\alpha(dz) =$$

$$= \int_Z \int_0^{\infty} P\left\{\frac{\nu^{(z)}(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} < y\right\} \times$$

$$\times d_y P\left\{\sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} \frac{(\gamma(\alpha, k-1, z_{k-1}) - c(\alpha))}{w(\alpha)} + sy < x\right\} P_\alpha(dz), \tag{2}$$

где $y_{k,\alpha} = \dfrac{k}{v(\alpha)}$, $k = 0, 1, \ldots$

Первое представление справедливо, так как вероятности под знаком ряда являются простыми функциями в пространстве Z, а второе выполняется в силу теоремы Лебега.

Очевидно,

$$P\left\{\frac{\nu^{(z)}(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} \geqslant x\right\} = \prod_{i=1}^{m} (1 - p(\alpha, i))^{\mu^{(z)}(\alpha, [xv(\alpha)], i)} \times$$

$$\times P\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu^{(z)}(\alpha, [xv(\alpha)], i)} \frac{\tau(\alpha, k-1, i)}{t(\alpha)} \leqslant 1\right\}$$

и так как в силу условия (A_3) $F(uv, 1)$ является непрерывной функцией распределения (по u и v), то

$$d(\alpha) = \sup_{z \in B_\alpha} d(\alpha, z) \to 0 \text{ при } \alpha \to 1,$$

где

$$d(\alpha, z) = 3 \sup_{0 \leqslant y \leqslant \sigma(\alpha)} \left| P\left\{\frac{\nu^{(z)}(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} < y\right\} - P\{\nu < y\}\right|,$$

$$B_\alpha = \bigcup_{0 \leqslant y \leqslant \sigma(\alpha)} B_{\alpha,y},\ B_{\alpha,y} =$$

$$= \left\{z : \left|\frac{\mu^{(z)}(\alpha, [yv(\alpha)], i)}{v(\alpha)} - q_i(\alpha)\, y\right| \leqslant \varepsilon(\alpha),\ i = \overline{1, m}\right\}$$

и $\varepsilon(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ выбраны так, что $\varepsilon(\alpha)$, $\sigma(\alpha)^{-1}$, $\pi(\alpha) = \sigma(\alpha)\,\varepsilon(\alpha)^{-2} \times$ $\times\ v(\alpha)^{-1}$ стремятся к 0 при $\alpha \to 1$.

Используя представление (2), получаем оценку

$$\int\limits_Z \int\limits_0^\infty \left| P\left\{\frac{\nu^{(z)}(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} < y\right\} - P\{\nu < y\}\right| d_y P\left\{sy + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} \frac{(\gamma(\alpha, k-1, z_{k-1}) - c(\alpha))}{w(\alpha)} < x\right\} P_\alpha(dz) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_Z (d(\alpha, z) + 2P\{\nu \geqslant \sigma(\alpha)\})\, P_\alpha(dz) \leqslant$$

$$\leqslant d(\alpha) + 2p\{\nu \geqslant \sigma(\alpha)\} + K\pi(\alpha), \tag{3}$$

поскольку

$$P_\alpha(B_\alpha) = P\left\{\left|\frac{\mu(\alpha, [yv(\alpha)], i)}{v(\alpha)} - q_i(\alpha)\, y\right| \leqslant \varepsilon(\alpha),\right.$$

$$\left. i = \overline{1, m},\ y \leqslant \sigma(\alpha)\right\} \geqslant 1 - K\pi(\alpha), \tag{4}$$

где $K = \mathrm{const} < \infty$.

Действительно

$$P\left\{\sup_{0 \leqslant y \leqslant \sigma(\alpha)} \frac{\mu(\alpha, [yv(\alpha)], i)}{v(\alpha)} - q_i(\alpha)\, y \geqslant \varepsilon(\alpha)\right\} =$$

$$= P\left\{\inf_{0 \leqslant y \leqslant \sigma(\alpha)} \sum_{k=1}^{[(\varepsilon(\alpha) + q_i(\alpha)\, y)\, v(\alpha)]} \tau^{(k-1)}(\alpha, i) - \right.$$

$$\left. - q_i(\alpha)^{-1}\, [(\varepsilon(\alpha) + q_i(\alpha)\, y)\, v(\alpha)] \leqslant -\varepsilon(\alpha)\, v(\alpha) + o_1(\alpha)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i, j \in H} D\tau_\alpha(i, j)\, \frac{v(\alpha)\, \sigma(\alpha)\, o_2(\alpha)}{(\varepsilon(\alpha)\, v(\alpha) + o_1(\alpha))^2} \leqslant K\pi(\alpha),$$

где $\tau^{(k)}(\alpha, i)$ — число скачков между $(k-1)$-м и k-м попаданиями цепи Маркова $T_1(\alpha)$ в состояние $i \in H$,

$$\tau_\alpha(i, j) = \min(n : n \geqslant 1,\ \eta_\alpha(n) = j \text{ при } \eta_\alpha(0) = i),\ i, j \in H,$$

$$o_1(\alpha) = q_i(\alpha)\, y\, v(\alpha) + \varepsilon(\alpha)\, v(\alpha) - [(\varepsilon(\alpha) + q_i(\alpha)\, y)\, v(\alpha)],$$

$$o_2(\alpha) = \sigma(\alpha)^{-1} v(\alpha)^{-1}\, [(\varepsilon(\alpha) + q_i(\alpha)\, \sigma(\alpha))\, v(\alpha)]$$

(ниже (в замечании 3) показано, что при выполнении условия (A_1), 1) $D\tau_\alpha(i, j)$, $i, j \in H$ ограничены сверху равномерно по $\alpha \in [0, 1)$). Аналогично оценивается вероятность

$$P\left\{\inf_{0 \leqslant y \leqslant \sigma(\alpha)} \frac{\mu(\alpha, [yv(\alpha)], i)}{v(\alpha)} - q_i(\alpha) y \leqslant -\varepsilon(\alpha)\right\}.$$

В силу представлений (1), (2) и оценки (3) получаем следующее соотношение:

$$P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\nu(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)} + \frac{s\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} < x\right\} =$$

$$= a(\alpha) + \int_0^\infty P\left\{\sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} \frac{(\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) - c((\alpha))}{w(\alpha)} + sy < x\right\} \times$$

$$\times P\{\nu \in dy\}, \tag{5}$$

где

$$a(\alpha) \leqslant d(\alpha) + 2P\{\nu \geqslant \sigma(\alpha)\} + K\pi(\alpha) \to 0 \text{ при } \alpha \to 1.$$

Поскольку

$$P\left\{\sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} (\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) - c(\alpha)) < u\right\} =$$

$$= P\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\mu(\alpha, [yv(\alpha)], i)} (\gamma(\alpha, k-1, i) - b(\alpha, i)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} (b(\alpha, \eta_\alpha(k-1)) - c(\alpha)) < u\right\}$$

и при выполнении условия (A_1), 1), очевидно,

$$\frac{\mu(\alpha, [yv(\alpha)], i)}{v(\alpha)} \xrightarrow{P} q_i y \text{ при } \alpha \to 1, i \in H, y > 0,$$

то

$$\lim_{\alpha \to 1} (\text{сл.}) \sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} \frac{(\gamma)\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) - c(\alpha))}{w(\alpha)} = \xi(y) =$$

$$= q \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(q_i y) + (1-q) N(0, \sigma^2 y), \tag{6}$$

если только

$$\lim_{\alpha \to 1} (\text{сл.}) \sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} \frac{(b(\alpha, \eta_\alpha(k-1)) - c(\alpha))}{\sqrt{v(\alpha)}} = N(0, \sigma^2 y). \tag{7}$$

Последнее соотношение можно доказать совершенно аналогично тому, как это сделано в [1] для случая

$$p_{ij}(\alpha) \equiv p_{ij}, \ b(\alpha, i) \equiv b(i), \ i, \ j \in H, \ \alpha \in [0, 1).$$

Кроме того, (7) следует из результатов, приведенных в [2].

Учитывая соотношение (6), в силу теоремы Лебега получаем

$$\lim_{\alpha\to 1}\int_0^\infty P\left\{\sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]}\frac{(\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1))-c(\alpha))}{w(\alpha)}+sy<x\right\}P\{\nu\in dy\}=$$

$$=\int_0^\infty P\{\xi(y)+sy\}\,P\{\nu\in dy\}\tag{8}$$

в точках непрерывности функции распределения, стоящей справа. Соотношения (5) и (8) доказывают теорему для случая, когда для каждого $\alpha\in[0, 1)$ все $\varkappa'(\alpha, k, i)=0$, $k\geqslant 0$, $i\in H$ с вероятностью 1. Избавимся от этого ограничения. Пусть для простоты все $p(\alpha, i)\equiv 0$, $i\in H$, $\alpha\in[0, 1)$. Обозначим

$$\Pi_u(\alpha, t)=\sup\left(s:\sum_{k=\nu(\alpha,u)+1}^{\nu(\alpha,s+u)}\varkappa(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1))\leqslant t\right).$$

Нетрудно видеть, что из приведенного выше доказательства следует

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\,\frac{\xi(\eta_0, \alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))-c(\alpha)\,\nu(\alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))}{w(\alpha)}+$$

$$+s\frac{\nu(\alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))}{v(\alpha)}=\xi(\nu)+s\nu.\tag{9}$$

Для случайной величины $\xi(\eta_0, \alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))+s\nu(\alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))$ имеет место представление

$$\xi(\eta_0, \alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))+s\nu(\alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))=\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha))+$$

$$+\gamma(\alpha)+\xi_{\mu_\alpha}(\beta_\alpha(t(\alpha)), \alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, \rho_\alpha(\mu_\alpha)))+$$

$$+s(\nu(\alpha, t(\alpha))+1+\nu_{\mu_\alpha}(\alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, \rho_\alpha(\mu_\alpha)))),\tag{10}$$

где

$$\xi_u(\beta_\alpha(u), \alpha, t)=\sum_{k=\nu(\alpha,u)+1}^{\nu(\alpha,t+u)}\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)),$$

$$\nu_u(\alpha, t)=\max\left(n:\sum_{k=\nu(\alpha,u)+1}^{n}\tau(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1))\leqslant t\right),$$

$$\rho_\alpha(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\geqslant\pi_0(\alpha, t);\\ t-\sum\limits_{k=1}^{\nu(\alpha,t)}\varkappa(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)), & \text{если } t<\pi_0(\alpha, t)\end{cases}$$

$$\mu_\alpha=\sum_{k=1}^{\nu(\alpha,t(\alpha))+1}\tau(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1));$$

$$\beta_\alpha(u)=\eta_\alpha(\nu(\alpha, u)),\ \gamma(\alpha)=\gamma(\alpha, \nu(\alpha, t(\alpha)), \beta_\alpha(t(\alpha))).$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\, u(\alpha)^{-1}\gamma(\alpha)=0,$$

а случайные векторы $(\xi_{\mu_\alpha}(\beta_\alpha(t(\alpha)), \alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, v)), \nu(\alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, v)))$, $v \geqslant 0$ зависят от $\rho_\alpha(\mu_\alpha)$ только через значение $\beta_\alpha(t(\alpha))$ и при условии, что $\beta_\alpha(t(\alpha)) = i$, распределены для каждого $v \geqslant 0$ одинаково с $(\xi(i, \alpha, \pi_0(\alpha, v)), \nu(\alpha, \pi_0(\alpha, v)))$. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \frac{\xi_{\mu_\alpha}(\beta_\alpha(t(\alpha)), \alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, \rho_\alpha(\mu_\alpha)))}{w(\alpha)} -$$

$$-\frac{c(\alpha)\,\nu_{\mu_\alpha}(\alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, \rho_\alpha(\mu_\alpha)))}{w(\alpha)} + s\frac{\nu_{\mu_\alpha}(\alpha, \pi_{\mu_\alpha}(\alpha, \rho_\alpha(\mu_\alpha)))}{v(\alpha)} = 0,$$

если только

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \frac{\rho_\alpha(\mu_\alpha)}{v(\alpha)} = 0.$$

Но

$$\rho_\alpha(\mu_\alpha) \leqslant \theta(\alpha, t(\alpha)) = \sum_{k=1}^{\nu(\alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))} \varkappa'(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)),$$

а распределение случайной величины $\theta(\alpha, t(\alpha))$ совпадает с распределением $\xi(\eta_0, \alpha, \pi_0(\alpha, t(\alpha)))$ при условии, что все $\gamma(\alpha, n, i) = \varkappa'(\alpha, n, i)$, $n \geqslant 0$, $i \in H$ с вероятностью 1. Поэтому в силу условия (A_2), 2) и (9) получаем

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \frac{\theta(\alpha, t(\alpha))}{t(\alpha)} = 0.$$

Из (10) и (11) следует

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\,\nu(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)} + s\frac{\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} = \xi(\nu) + s\nu.$$

Совершенно аналогично проводится доказательство и для случая, когда $p(\alpha, i) \neq 0$, $i \in H$, $\alpha \in [0, 1)$. Теорема доказана.

2. С точки зрения приложений к случайным блужданиям интересным является случай, когда для случайных величин $\gamma(\alpha, 0, i)$, $i \in H$ выполняется условие

$$(B_1): M\exp\{\sqrt{-1}s\gamma(\alpha, 0, i)\} = 1 + \sqrt{-1}sa_1(\alpha, i) + f_{i,1}(\alpha, s),$$

где $\lim\limits_{\alpha\to 1} a_1(\alpha, i) = a_1(1, i)$, $\lim\limits_{\alpha\to 1, s\to 0} f_{i,1}(\alpha, s)\, s^{-1} = 0$, $i \in H$ (случайные величины $\gamma(\alpha, 0, i)$, $i \in H$ принадлежат области притяжения вырожденного закона); или

$$(B_2): M\exp\{\sqrt{-1}s\gamma(\alpha, 0, i)\} =$$

$$= 1 + \sqrt{-1}sa_1(\alpha, i) - \frac{1}{2}s^2a_2(\alpha, i) + f_{i,2}(\alpha, s),$$

где $\lim\limits_{\alpha\to 1} a_k(\alpha, i) = a_k(1, i)$, $\lim\limits_{s\to 0} f_{i,2}(\alpha, s)\, s^{-2} = 0$, $i \in H$, $k = 1, 2$

(случайные величины $\gamma(\alpha, 0, i)$, $i \in H$ принадлежат области притяжения нормального закона), а для случайных величин $\varkappa'(\alpha, 0, i)$, $\varkappa(\alpha, 0, i)$, $\zeta(\alpha, 0, i)$, $i \in H$ выполняется условие

$$(B_3): 1)\ M \exp\{\sqrt{-1}s\varkappa'(\alpha, 0, i)\} = 1 + \sqrt{-1}sg_{0,i}(\alpha, s),\ \ i \in H,$$

$$M \exp\{\sqrt{-1}s\varkappa(\alpha, 0, i)\} = h_{1,i}(\alpha, s) + h_{2,i}(\alpha, s) \times$$
$$\times\, \kappa(i, \alpha)(p(\alpha) r(i, \alpha) + g_{1,i}(\alpha, s)s -$$
$$- \sqrt{(p(\alpha) r(i, \alpha))^2 - 2\sqrt{-1}sb(i, \alpha) + sh_i(\alpha, s)}),$$

где

$$h_{k,i}(\alpha, s) = \frac{1 + sg_{2k,i}(\alpha, s)}{1 + sg_{2k+1,i}(\alpha, s)},\ \ k = 1, 2,$$

$$|g_{r,i}(\alpha, s)| \leqslant A_r = \text{const} < \infty,\ \ r = \overline{0, 5},\ i \in H,$$

$$\lim_{\alpha \to 1} k(i, \alpha) = k_i \geqslant 0,\ \ i \in H,$$

$$\lim_{\alpha \to 1, s \to 0} h_i(\alpha, s) = 0,\ i \in H,$$

$$\lim_{\alpha \to 1} r(i, \alpha) = r_i > 0,$$

$$\lim_{\alpha \to 1} b(i, \alpha) = b_i > 0,\ \ i \in H,$$

$$\lim_{\alpha \to 1} p(\alpha) = 0\ (p(\alpha) \geqslant 0,\ \alpha \in [0, 1)),$$

$$2)\ \ p(\alpha, i) = p_{\alpha,i}p(\alpha),\ \text{где}\ \lim_{\alpha \to 1} p_{\alpha,i} = p_i \geqslant 0, i \in H,$$

$$3)\ \lim_{\alpha \to 1} (1 + p(\alpha)\sqrt{t})^{-1} = q \in [0, 1],$$

$$(1 - q)\,p + \sum_{i=1}^{m} qk_i > 0,$$

$$p = \sum_{i=1}^{m} q_i(1)\,p_i.$$

Пусть ν_q — случайная величина с функцией распределения

$$P\{\nu_q < u\} = \delta(u)\left(1 - P\left\{\sum_{i=1}^{m} \tau_{i,q}(uq_i(1)) \leqslant 1\right\} e^{-u(1-q)p}\right),$$

где случайные величины $\tau_{i,q}(uq_i(1))$, $i \in H$ — независимы в совокупности и

$$P\{\tau_{i,q}(u) < v\} = \delta(v)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{\frac{\sqrt{b_i}uqk_i}{\sqrt{v}}}^{\infty} \exp\left\{(1 - q)\,r_ik_iv -\right.$$

$$\left. - \frac{((1 - q)\,k_ir_iv)^2}{2z^2} - \frac{z^2}{2}\right\} dz.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{M}\exp\{-s\tau_{i,q}(u)\} =$$
$$= \exp\{uk_i(r_i(1-q) - \sqrt{r_i^2(1-q)^2 + 2sb_iq^2}\}.$$

В частности, если все

$$k_i = \sigma_i k,\ r_i = r,\ b_i = b,\ i \in H,\ \text{где } \sigma_i \in \{0, 1\},$$

то

$$P\{\nu_q < u\} = \Psi(q, p, \sqrt{b}\beta, r\beta, u),$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} q_i(1) k_i$$

$$\Psi(q, a_1, a_2, a_3, u) =$$
$$= \delta(u)\left(1 - e^{-u(1-q)a_1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{qa_2u}^{\infty}\exp\left\{(1-q)a_3u - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{((1-q)a_3u)^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2}\right\}\cdot dv\right),\ q \in [0, 1],\ a_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, 3}.$$

Обозначим

$$a(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} a_1(\alpha, i)\, q_i(\alpha),$$

$$\sigma(\alpha)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}D\sum_{k=1}^{n} a_1(\alpha, \eta_\alpha(k)) + \sum_{i=1}^{m}(a_2(\alpha, i) - a_1(\alpha, i)^2)\, q_i(\alpha),$$

$$v(\alpha, t) = \frac{\sqrt{t}}{1 + p(\alpha)\sqrt{t}}.$$

Теорема 2. Пусть выполняется условие

(A) : $\lim\limits_{\alpha\to 1} p_{ij}(\alpha) = p_{ij}(1)$, $i, j \in H$, где однородная цепь Маркова $T = \{\eta_1(n),\ n = 0, 1, \ldots\}$ с матрицей переходных вероятностей $\| p_{ij}(1)\|_{ij=1}^{m}$ эргодична (ее стационарное распределение обозначим $q_j(1)$, $j = \overline{1, m}$).

Тогда: 1) если выполняются условия (B_1) и (B_3), то

$$\lim_{\alpha\to 1, t\to\infty}(\text{сл.})\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t) + s\nu(\alpha, t)}{v(\alpha, t)} = (a(1) + s)\,\nu_q;$$

2) если выполняются условия (B_2) и (B_3), то

$$\lim_{\alpha\to 1,\, t\to\infty}(\text{сл.})\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t) - a(\alpha)\,\nu(\alpha, t)}{\sqrt{v(\alpha, t)}} + s\frac{\nu(\alpha, t)}{v(\alpha, t)} =$$
$$= \sqrt{\nu_q}N(0, \sigma(1)^2) + s\nu_q,$$

где $\xi = N(0, \sigma(1)^2)$ и ν_q независимы.

Следствие 2. Если в дополнение к (B_2) и (B_3) выполняется условие

$$(B_4)\ \lim_{\alpha\to1, t\to\infty} (1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha, t)})^{-1} = l \in [0, 1],$$

то

$$\lim_{\alpha\to1, t\to\infty} (\text{сл.})\ \frac{\xi(\eta_0, \alpha, t)}{u(\alpha, t)} = l\sqrt{v_q}\xi + (1-l)\, v_q,$$

где

$$u(\alpha, t) = (1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha, t)})\sqrt{v(\alpha, t)}.$$

Замечание 3. Существует простой способ нахождения величины $\sigma(\alpha)^2$. Пусть

$$\gamma_\alpha(i, j) = \sum_{k=1}^{\tau_\alpha(i,j)} (\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) - a(\alpha)) i,\ j \in H,$$

$$g(\alpha, i, j, s) = M \exp\{\sqrt{-1} s \gamma\alpha(i, j)\},$$

$$h(\alpha, i, s) = M \exp\{\sqrt{-1} s (\gamma(\alpha, 0, i) - a(\alpha))\}.$$

Функции $g(\alpha, i, j, s)$, $i \in H$ для каждого $j \in H$ удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$g(\alpha, i, j, s) = h(\alpha, i, s)\Big(p_{ij}(\alpha) + \\ + \sum_{k \in H, k \neq i} p_{ik}(\alpha)\, g(\alpha, k, j, s)\Big),\ i \in H.$$

Дифференцируя эту систему, нетрудно получить системы линейных уравнений для нахождения моментов величин $\gamma_\alpha(i, j)$, $i, j \in H$.

В [1] показано, что

$$\sigma(\alpha)^2 = q_i(\alpha)\, D\gamma_{\alpha(i,i)} \quad i \in H.$$

3. Метод доказательства теоремы 1 подсказывает идею получения оценок скорости сходимости функции распределения случайного функционала $\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\, v(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)}$ к своему предельному значению.

Лемма 1. Если для случайных величин ξ_t, η_t и ξ выполняются соотношения

$$|P\{\xi_t < u\} - P\{\xi < u\}| \leqslant a_{t,u},$$
$$P\{\eta_t > \varepsilon\} \leqslant b_{t,\varepsilon},$$

то

$$|P\{\xi_t + \eta_t < u\} - P\{\xi < u\}| \leqslant 2(b_{t,\varepsilon} + P\{\xi \in [u-\varepsilon, u)\} + \\ + 2 \sup_{x \in (u-\varepsilon, u+\varepsilon)} a_{t,x}).$$

Доказательство леммы приведено в работе [3]. Используя соотношение (5) и лемму 1, получаем оценку

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t(\alpha)) - c(\alpha)\nu(\alpha, t(\alpha))}{w(\alpha)} + s\frac{\nu(\alpha, t(\alpha))}{v(\alpha)} < y\right\} - \right.$$

$$- P\{\xi(\nu) + s\nu < y\} \leqslant 4\sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^\infty h_s(\alpha, x, y) P\{\nu \in dy\} +$$

$$+ 2H_s(\alpha, \varepsilon) + 2\sup_{-\infty<y<\infty} P\{\xi(\nu) + s\nu \in [y - \varepsilon, y)\} +$$

$$+ 4d(\alpha) + 4K\pi(\alpha) + 8P\{\nu \geqslant \sigma(\alpha)\}, \tag{12}$$

где

$$h_s(\alpha, x, y) = \left| P\left\{\sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]}\frac{(\gamma(\alpha, k-1, \eta_\alpha(k-1)) - c(\alpha))}{w(\alpha)} + sy < x\right\} - \right.$$

$$\left. - P\{\xi(\nu) + s\nu < x\}\right|,$$

$$H_s(\alpha, \varepsilon) = P\{w(\alpha)^{-1}(\xi_{t(\alpha)}(\beta_\alpha(t(\alpha)), \alpha, \pi_{t(\alpha)}(\alpha, \rho_\alpha(t(\alpha)))) -$$

$$- c(\alpha)\nu_{t(\alpha)}(\alpha, \pi_{t(\alpha)}(\alpha, \rho_\alpha(t(\alpha))))) +$$

$$+ sv(\alpha)^{-1}\nu_{t(\alpha)}(\alpha, \pi_{t(\alpha)}(\alpha, \rho_\alpha(t(\alpha)))) > \varepsilon\}.$$

И задача состоит в нахождении более явных выражений для величин $h_s(\alpha, x, y)$, $H_s(\alpha, \varepsilon)$, $d(\alpha)$ через исходные параметры схемы суммирования. Заметим, что для функционала $\xi(\eta_0, \alpha)$ оценка (12) имеет вид

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha) - c(\alpha)\nu(\alpha)}{w(\alpha)} + s\frac{\nu(\alpha)}{v(\alpha)} < y\right\} - P\{\xi(\nu) + s\nu < y\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant d(\alpha) + K\pi(\alpha) + 2P\{\nu \geqslant \sigma(\alpha)\} + \sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^\infty h_s(\alpha, x, y) P\{\nu \in dy\},$$

поскольку в этом случае все $\varkappa'(\alpha, n, i)$, $\varkappa(\alpha, n, i) = 0, i \in H$, $n \geqslant 0$ с вероятностью 1, и второй этап доказательства теоремы 1, связанный с оценкой $H_s(\alpha, \varepsilon)$, просто отсутствует.

Теорема 3. Пусть выполняется условие

(C_1) : 1) $\lim\limits_{\alpha\to 1} p_{ij}(\alpha) = p_{ij}(1)$, $i, j \in H$, где однородная цепь Маркова $T = \{\eta_1(n), n = 0, 1, \ldots\}$ с матрицей переходных вероятностей $\| p_{ij}(1)\|_{i,j=1}^m$ эргодична (ее стационарное распределение обозначим $q_j(1)$, $j = \overline{1, m}$);

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1} p(\alpha, i) v(\alpha) = p_i \in [0, \infty)$, $i \in H$,

где $$v(\alpha) \in \mathfrak{M}, \sum_{i=1}^m p_i q_i(1) = p > 0.$$

Тогда, если выполняется условие

(C_2): 1) $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M\ |\gamma(\alpha, 1, i)|^2 < \infty$, $i \in H$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1} a_1(\alpha, i) = a_1(1, i)$, $i \in H$, где $a_1(\alpha, i) = M\gamma(\alpha, 1, i)$;

3) $a(1) > 0$, где $a(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i(\alpha)\, a_1(\alpha, i)$,

то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha)}{v(\alpha)} < u\right\} - \delta(u)\left(1 - e^{-u\frac{p}{a(1)}}\right)\right| = R^{(1)}_{\alpha,u} \leqslant$$
$$\leqslant L_1\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}} + |a(\alpha) - a(1)| + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m} |q_i(\alpha) - q_i(1)| + |v(\alpha)\, p(\alpha, i) - p_i|\right).$$

Если выполняется условие

(C_3): 1) $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M|\gamma(\alpha, 0, i)|^3 < \infty$, $i \in H$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1} a_k(\alpha, i) = a_k(1, i)$, $i \in H$, $k = 1, 2$, где $a_k(\alpha, i) =$
$$= M(\gamma(\alpha, 0, i))^k;$$

3) $\sigma(1)^2 > 0$, где $\sigma(\alpha)^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} D \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma(\alpha, k, \eta_\alpha(k))$ (способ нахождения явного выражения $\sigma(\alpha)$ через $\| p_{ij}(\alpha) \|_{i,j=1}^{m}$ и $a_k(\alpha, i)$, $i \in H$, $k = 1, 2$ приведен в замечании 3), то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha) - a(\alpha)\,\nu(\alpha)}{\sqrt{v(\alpha)}} < u\right\} - \int_0^\infty P\{\sqrt{v} N(0, \sigma(1)^2) < u\}\, e^{-v} dv\right| =$$
$$= R^{(2)}_{\alpha,u} \leqslant L_2\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}} + |\sigma(\alpha) - \sigma(1)| + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m} |q_i(\alpha) - q_i(1)| + |v(\alpha)\, p(\alpha, i) - p_i|\right),$$

где $L_j = \text{const} < \infty$, $j = 1, 2$.

Пусть в дополнение к (C_1) и (C_3) выполняется условие

(C_4): $\lim\limits_{\alpha\to 1} (1 + \sqrt{v(\alpha)}\, a(\alpha))^{-1} = l \in [0, 1]$.

Тогда

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha)}{r(\alpha)} < u\right\} - \int_0^\infty P\{v(1 - l) + \sqrt{v} l\, N(0, \sigma(1)^2) < u\}\, e^{-v} dv\right| =$$

$$= R^{(3)}_{\alpha,u} \leqslant L_3\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}} + |\sigma(\alpha) - \sigma(1)| + \left|\frac{1}{1 + \sqrt{v(\alpha)}\, a(\alpha)} - l\right| + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(|q_i(\alpha)-q_i(1)|+|p(\alpha,i)v(\alpha)-p_i|\right)\Big),$$

где $L_3=\mathrm{const}<\infty$.

Доказательство. Обозначим

$$d_i(\alpha,x,y)=$$

$$=\begin{cases}\left|P\left\{v(\alpha)^{-1}\sum\limits_{k=1}^{[yv(\alpha)]}\gamma(\alpha,k-1,\eta_\alpha(k-1))<x\right\}-P\{ya(1)<x\}\right|, \\ \text{если } i=1 \\ \left|P\left\{v(\alpha)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{k=1}^{[yv(\alpha)]}\gamma(\alpha,k-1,\eta_\alpha(k-1))-a(\alpha)\right)+\right.\right. \\ \left.+\frac{(-1)^i+1}{2}s_\alpha y<x\right\}-P\left\{\frac{(-1)^i+1}{2}s_1y+\right. \\ \left.\left.+N(0,y\sigma(1)^2)<x\right\}\right|, \text{ если } i=2,3.\end{cases}$$

Лемма 2. Если выполняются условия (C_1) и (C_2), то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^\infty d_1(\alpha,x,y)e^{-ay}dy\leqslant L_4(v(\alpha)^{-\frac{1}{3}}+|a(\alpha)-a(1)|),$$

где $a=\mathrm{const}>0$, $L_4=\mathrm{const}<\infty$, а при (C_1) и (C_3)

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\int_0^\infty d_i(\alpha,x,y)e^{-ay}dy\leqslant L_5\Big(v(\alpha)^{-\frac{1}{2}}+|\sigma(\alpha)-\sigma(1)|+$$

$$+|s_\alpha-s_1|\frac{(-1)^i+1}{2}\Big),\quad i=2,3,$$

где $L_5=\mathrm{const}<\infty$.

Доказательство леммы приведено в [4]. Используя лемму 2 и выбирая в (12) $\varepsilon(\alpha)=\sigma(\alpha)^{-1}=v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}$, получаем для $R^{(i)}_{\alpha,u}$, $i=\overline{1,3}$ оценки

$$R^{(1)}_{\alpha,u}\leqslant L_6(d(\alpha)+v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}+|a(\alpha)-a(1)|),$$

$$R^{(i)}_{\alpha,u}\leqslant L_7\Big(d(\alpha)+v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}+|\sigma(\alpha)-\sigma(1)|+$$

$$+\left|\frac{1}{1+\sqrt{v(\alpha)}\,a(\alpha)}-l\right|\frac{(-1)^i+1}{2}\Big),\quad i=2,3, \tag{13}$$

где $L_j=\mathrm{const}<\infty$, $j=6, 7$.

Для $d(\alpha)$, если воспользоваться простым неравенством

$$\left|\prod_{i=1}^{m}a_i-\prod_{i=m+1}^{2m}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|a_i-a_{i+m}||a_{k_i}|$$

при $|a_j| \leqslant 1$, $j = \overline{1, 2m}$, $k_l \in \{1, 2, \ldots 2m\}$ нетрудно получить оценку

$$d(\alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sup_{x(\alpha, i)} \sup_{0 \leqslant u < \infty} |(1 - p(\alpha, i))^{[x(\alpha, i)\, uv(\alpha)]} -$$
$$- e^{-x(\alpha, i)\, uv(\alpha)} |\, c_i(\alpha, u), \qquad (14)$$

где

$$c_i(\alpha, u) = \begin{cases} 1, & \text{если } p_i > 0 \\ (1 - p(\alpha, k))^{[x(\alpha, k)\, uv(\alpha)]}, & \text{если } p_i = 0,\ p_k > 0 \end{cases},$$

$$|x(\alpha, i) - q_i(1)| \leqslant |q_i(\alpha) - q_i(1)| + v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Лемма 3. Если ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$ — случайные величины, распределенные по геометрическому закону

$$\xi_n = k \text{ с вероятностью } p_n(1 - p_n)^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} p_n v_n = \mu \in (0, \infty), \text{ где } \lim_{n\to\infty} v_n = \infty,$$

то

$$\left| P\left\{\frac{\xi_n}{v_n} < u\right\} - \delta(u)(1 - e^{-\mu u}) \right| \leqslant L_8(|\mu - v_n p_n| + v_n^{-\frac{1}{2}}),$$

где $L_8 = \text{const} < \infty$.

Доказательство леммы приведено в [4]. Вместе с оценками (13) и (14) лемма 3 доказывает теорему.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (A) и (B_3) теоремы 2, причем в разложении характеристической функции случайной величины

$$\varkappa(\alpha, 0, i),\ i \in H; \quad h_i(\alpha, s) = s g_i(\alpha, s),$$

где $|g_i(\alpha, s)| \leqslant A = \text{const} < \infty$.

Тогда если выполняется условие (C_1), то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t)}{v(\alpha, t)} < u\right\} - P\{a(1)\nu_q < u\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant L_9\left(v(\alpha, t)^{-\frac{1}{4}} + \left|\frac{1}{2 + p(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}} + |a(\alpha) - a(1)| + h(\alpha)\right),$$

где $L_9 = \text{const} < \infty$, а при условии ($C_2$)

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t) - a(\alpha)\nu(\alpha, t)}{\sqrt{v(\alpha, t)}} < u\right\} - P\{\sqrt{\nu_q} N(0, \sigma(1)^2) < u\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant L_{10}\left(v(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}} + \left|\frac{1}{1 + p(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}} + |\sigma(\alpha) - \sigma(1)| + h(\alpha)\right),$$

где $L_{10} = \text{const} < \infty$.

Если в дополнение к (C_3) выполняется условие (B_4), то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(\eta_0, \alpha, t)}{u(\alpha, t)} < u\right\} - P\left\{l\sqrt{\nu_q}N(0, \sigma(1)^2) + (1-l)\nu_q < u\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant L_{11}\left(v(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}} + \left|\frac{1}{1+p(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{1}{1+a(\alpha)\sqrt{v(\alpha, t)}} - l\right| + |\sigma(\alpha) - \sigma(1)| + h(\alpha)\right),$$

где $L_{11} = \text{const} < \infty$,

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^{m}(|k(i, \alpha) - k_i|^{\frac{1}{2}} + |q_i(\alpha) - q_i(1)| +$$

$$+ |r(i, \alpha) - r_i)^{\frac{1}{2}} + |b(i, \alpha) - b_i|^{\frac{1}{2}} + |p_{\alpha,i} + p_i|).$$

Доказательство теоремы, в которое входит ряд громоздких вычислений, связанных с применением теоремы об оценке близости функций распределения по характеристическим функциям [5], содержится полностью в [4]. Для случая $m = 1$ теорема 4 доказана в статьях [3, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. М., «Мир», 1964.
2. Анісімов В. В. Граничні теореми для сум випадкових величин, зв'язаних в скінченний однорідний ланцюг Маркова.— ДАН УРСР, сер. А, 3, 1970.
3. Сильвестров Д. С. Предельные теоремы для непрерывного блуждания на полупрямой, управляемого марковским процессом с двумя состояниями, в схеме серий. II.— Теория вероят. и матем. стат., 2, 1970.
4. Сильвестров Д. С. Предельные теоремы для полумарковских процессов и их применения к случайным блужданиям. Канд. дисс. К., 1969.
5. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965.
6. Сильвестров Д. С. Предельные теоремы для дискретного случайного блуждания на полупрямой, управляемого цепью Маркова. II.— Теория вероят. и матем. стат., 2, 1970.

D. S. Silvestrov

LIMIT THEOREMS FOR SEMI-MARKOV PROCESSES AND ITS APPLICATIONS. 1.

Summary

The possible limit distributions for additive functionals in scheme of series of semi-Markov processes are studied.

Поступила в редколлегию 6.VI. 1969.