Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, асп.,
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ. II

Во второй части работы изучаются возможные предельные распределения для случайных функционалов аддитивного типа в схеме серий от полумарковского блуждания на прямой с единичными скачками, диффузионных процессов и одного специального непрерывного блуждания на прямой, являющегося непрерывным аналогом схемы Бернулли.

1. Пусть для каждого $\alpha \in [0, 1]$ $S_j(\alpha)$, $j = 1, 2$ — независимые совокупности случайных векторов, определяемые следующим образом:

$S_1(\alpha) = \{\zeta_\alpha(n) = (x_\alpha(n), \beta_\alpha(n)), n = 0, 1, \ldots\}$ — однородная цепь Маркова со множеством состояний $Z = E \times \{l_1 = +1, l_2 = -1\}$ $(E = \{0, \pm 1, \ldots\})$ и переходными вероятностями

$$P\{x_\alpha(n+1) = x + y, \beta_\alpha(n+1) = l_j / x_\alpha(n) = x, \beta_\alpha(n) = l_i\} = \begin{cases} p_{ij}(\alpha, x) > 0, & \text{если } y = l_j, x \in E, i, j = 1, 2 \\ 0, & \text{если } y \neq l_j, x \in E, i, j = 1, 2; \end{cases}$$

$S_2(\alpha) = \{(\tau(\alpha, n, (x, l_i)), \gamma(\alpha, n, (x, l_i))), n \geqslant 0, (x, l_i) \in Z\}$ — множество независимых в совокупности случайных векторов, которые принимают значения в $[0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ и распределения которых не зависят от n.

Введем в рассмотрение случайный функционал

$$\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t) = \sum_{k=1}^{\nu(\alpha, t)} \gamma(\alpha, k-1, \zeta_\alpha(k-1)),$$

где

$$\nu(\alpha, t) = \max\left(n : \sum_{k=1}^{n} \tau(\alpha, k-1, \zeta_\alpha(k-1)) \leqslant t\right),$$

$$(x_0, \beta_0) = \zeta_\alpha(0) = \mathrm{const} \in Z \text{ с вероятностью } 1.$$

Определим

$\Delta(\alpha, z_0, z_1, \ldots, z_k) = \min(n : \zeta_\alpha(n) \in \{z_1, \ldots, z_k\}$ при $(x_0, \beta_0 = z_0)$,

и

$$d_j(\alpha, z_0, z_1, \ldots, z_k) =$$

$$= P\{\Delta(\alpha, z_0, z_1, \ldots, z_k) < \infty, \ \zeta_\alpha(\Delta(\alpha, z_0, z_1, \ldots, z_k)) = z_j\},$$
$$j = \overline{1, k}, \quad z_i \in Z, \quad i = \overline{0, k}.$$

Естественно интерпретировать $\beta_\alpha(n)$ как n-й случайный скачок некоторой частицы, блуждающей по множеству целочисленных точек прямой E, а $x_\alpha(n)$ как ее положение после n-го скачка. Назовем рассматриваемое блуждание возвратным, если

$$d_1(\alpha, z_0, z_1) = 1 \text{ для всех } z_0, \ z_1 \in Z.$$

Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы для какого-нибудь $a \in E$ выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^{2} r_i(\alpha, a) = 0,$$

где

$$r_i(\alpha, a) = P\{\Delta(\alpha, l_i(a+1,1), l_i(a, -1)) = \infty\} =$$
$$= 1 - d_1(\alpha, l_i(a+1,1), l_i(a, -1)), \quad i = 1, 2.$$

Нетрудно видеть, что вероятности

$$d_{ij}(\alpha, x, y, z) = d_j(\alpha, (x, l_i), (z, l_1), (y, l_2)), \ y < x < z, \ i, \ j = 1, 2$$

удовлетворяют системе линейных уравнений

$$d_{ij}(\alpha, x, y, z) = \sum_{r=1}^{2} d_{rj}(\alpha, x + l_r, y, z)\, p_{ir}(\alpha, x),$$
$$y < x < z, \ i, \ j = 1, 2,$$
$$d_{ij}\left(\alpha, y + (z-y)\frac{l_i + l_1}{2}, y, z\right) = \left|\frac{l_i + l_j}{2}\right|, \ i, \ j = 1, 2$$

и

$$r_i(\alpha, a) = \lim_{n\to\infty} d_1(\alpha, l_i(a+1,1), l_i(a+n,1), l_i(a, -1)), \ i = 1, 2.$$

В частности, если все

$$p_{ij}(\alpha, x) = p_j(\alpha, x), \ i, \ j = 1, 2 \text{ для } l_k x > a, \ k = 1, 2,$$

то, как показано в [2],

$$r_i(\alpha, a) = \sum_{y=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{y} \frac{p_{i'}(\alpha, l_i(a+r))}{p_i(\alpha, l_i(a+r))}, \ i, \ i' \in \{1, 2\}, \ i' \neq i.$$

Будем предполагать выполненными условия

(D_1): 1) $\lim\limits_{\alpha\to 1} p_{ij}(\alpha, x) = p_{ij}(1, x), \ i, \ j = 1, 2, \ x \in E;$

2) $r_i(1, a) = 0, \ i = 1, 2$ (в силу условия (D_1),

1) при этом $\lim\limits_{\alpha\to 1} r_i(\alpha, a) = r_i(1, a) = 0, \ i = 1, 2);$

(D_2): $\gamma(\alpha, 0, (x, l_i)) = 0$ с вероятностью 1 для всех $(x, l_i) \overline{\in} E_a$, где $E_a = \left\{(x, l_i): -a + \frac{l_i + l_2}{2} \leqslant x \leqslant a + \frac{l_i + l_1}{2}\right\}.$

Нас интересуют возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t)$ при $t \to \infty$ и $\alpha \to 1$ так, что выполняются условия (D_j), $j = 1, 2$.

Очевидно, при выполнении условия (D_2), если $\sum_{i=1}^{2} r_i(\alpha, a) > 0$, то существует конечный с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \xi(x_0, \beta_0, \alpha, t) = \xi(x_0, \beta_0, \alpha),$$

и можно изучать возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(x_0, \beta_0, \alpha)$ при $\alpha \to 1$ так, что выполняется условие (D_1).

Не нарушая общности, можно считать, что $(x_0, \beta_0) \in E_a$. Нетрудно понять, что

$$P\{\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t) < u\} = P\{\xi(\eta_0, \alpha, t) < u\}, \ u \in (-\infty, \infty), \ t \geqslant 0.$$

Здесь $\xi(\eta_0, \alpha, t)$ — случайный функционал в основной схеме [1], для которой:

$$\text{а) } T_1(\alpha) = \{\eta_\alpha(n) = g(y(\alpha, n)), \ n = 0, 1, \ldots\},$$

где $g(\cdot)$ — некоторое взаимно однозначное соответствие между E_a и $H = \{1, 2, \ldots, m = 4(a+1)\}$, $S(\alpha) = \{y(\alpha, n), \ n = 0, 1, \ldots\}$ — однородная цепь Маркова со множеством состояний E_a и переходными вероятностями

$$P\{y(\alpha, n+1) = (y, l_j)/y(\alpha, n) = (x, l_i)\} =$$
$$= \begin{cases} p_{ij}(\alpha, x), & \text{если } y = x + l_j, \ |x| \leqslant a, \ i, j = 1, 2, \\ 1, & \text{если } y = l_i a, \ x = l_i(a+1), \ l_j = -l_i, \ i, j = 1, 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

б) если $g^{-1}(j') = (x, l_i) \in E_a$, то

$$P\{\varkappa'(\alpha, 0, j') < u, \ \gamma(\alpha, 0, j') < v\} =$$
$$= P\{\tau(\alpha, 0, (x, l_i)) < u, \ \gamma(\alpha, 0, (x, l_i)) < v\},$$

$$P\{\varkappa(\alpha, 0, j') < u\} = \begin{cases} \delta(u)^{*)}, & \text{если } (x, l_i) \in E'_a, \\ P\{\tau_\alpha(a, i') < u\}, & \text{если } x = -l_i a, \ i = 1, 2, \end{cases}$$

$$E'_a = E_a \diagdown \{(a, -1), (-a, 1)\}, \ i' \in \{1, 2\}, \ i' \neq i,$$

$$P\{\tau_\alpha(a, i) < u\} =$$
$$= P\left\{\sum_{k=1}^{\Delta_{ii}(\alpha, a+1, a)-1} \tau(\alpha, k, \zeta_\alpha(k)) < u/\Delta_{ii}(\alpha, a+1, a) < \infty\right\},$$

$$\Delta_{ij}(\alpha, x, a) = \Delta(\alpha, (x, l_i), l_j(a, -1)), \ x l_i \geqslant a + 1, \ i, j = 1, 2,$$

$$p(\alpha, j') = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, l_i) \in E'_a, \\ r_i'(\alpha, a), & \text{если } x = -l_i a, \ i = 1, 2. \end{cases}$$

---

*) Здесь и ниже все вспомогательные обозначения, используемые без пояснений, введены в [1].

Теперь нетрудно сформулировать ряд утверждений, переносящих результаты, полученные в [1], на рассматриваемую схему. Пусть

$$\nu(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{X}_{E_a}(\zeta_\alpha(k-1)),$$

$q_\alpha(x, i)$, $(x, l_i) \in E_a$ — стационарное распределение $S(\alpha)$,

$$a(\alpha) = \sum_{(x,l_i)\in E_a} q_\alpha(x, i)\, b(\alpha, (x, l_i)),$$

$$\sigma^2(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D \sum_{k=1}^{n} b(\alpha, y(\alpha, k)),$$

$$h(\alpha) = \sum_{(x,l_i)\in E_a} |q_\alpha(x,i) - q_1(x,i)| + \sum_{j=1}^{2} |q_j - r_j(\alpha, a)\, v(\alpha)|, \quad w(\alpha) = u(\alpha) + \sqrt{v(\alpha)}.$$

Теорема 1. Если выполняются условия (D_j), $j = 1, 2$ и

(D_3): 1) $v(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{2} r_i(\alpha, a)\right)^{-1} < \infty$ для всех $\alpha < 1$;

2) $\lim_{\alpha\to 1} r_i(\alpha, a)\, v(\alpha)^{-1} = q_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$;

(E_1): 1). $\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \sum_{k=1}^{[yv(\alpha)]} \frac{\gamma(\alpha, k, (x, l_i)) - b(\alpha, (x, l_i))}{u(\alpha)} = \gamma_{x,i}(y)$,

где $\gamma_{x,i}(y)$, $(x, l_i) \in E_a$, $y \geqslant 0$ — собственные случайные величины, $u(\alpha) \in \mathfrak{M}$,

$$\lim_{\alpha\to 1} b(\alpha, (x, l_i)) = b(1, (x, l_i)), \quad (x, l_i) \in E_a;$$

2) $\lim_{\alpha\to 1}\left(1 + \frac{\sqrt{v(\alpha)}}{u(\alpha)}\right)^{-1} = q \in [0, 1]$,

то

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.}) \frac{\xi(x_0, \beta_0, \alpha) - a(\alpha)\,\nu(\alpha)}{w(\alpha)} = q \sum_{(x,l_i)\in E_a} \gamma_{x,i}(\nu q_1(x,i) + \sqrt{\nu}$$
$$(1-q) \times N(0, \sigma(1)^2),$$

где

$$P\{\gamma_{x,i}(z_k) < u_{x,i}^{(k)},\ k = \overline{1, r},\ (x, l_i) \in E_a,\ \nu < u,\ N(0, \sigma(1)^2) < v\} = \delta(u)(1 - l^{-bu})\, P\{N(0, \sigma(1)^2) < v\} \times$$
$$\times P\{\gamma_{x,i}(z_k) < u_{x,i}^{(k)},\ k = \overline{1, r}\},\quad b = \sum_{i=1}^{2} q_i q_1(-l_i a, l_i),$$
$$z_k \geqslant 0,\ u_{x,i}^{(k)},\ u,\ v \in (-\infty, \infty),\ r \geqslant 1,\ (x, l_i) \in E_a.$$

Если в дополнение к (D_j), $j=\overline{1,3}$ и (E_1) выполняется условие

$$(E_2):\lim_{\alpha\to 1}\left(1+\frac{a(\alpha)\,v(\alpha)}{w(\alpha)}\right)^{-1}=p\in[0,\ 1],$$

то

$$\lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\,\frac{\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha)}{r(\alpha)}=pq\sum_{(x,l_i)\in E_a}\gamma_{x,l}(\nu q_1(x,l)+$$

$$+p(1-q)\times N(0,\ \sigma(1)^2)\sqrt{\nu}+(1-p)\,\nu,$$

где $r(\alpha)=w(\alpha)+a(\alpha)\,v(\alpha)$.

Теорема 2. Если выполняются условия (D_j), $j=\overline{1,3}$ и

(E_3): 1) $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M\,|\gamma(\alpha,\ 0,\ (x,\ l_i))|^2<\infty$, $(x,\ l_i)\in E_a$,

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1} M\gamma(\alpha,\ 0,\ (x,\ l_i))=M\gamma(1,\ 0,\ (x,\ l_i))$, $(x,\ l_i)\in E_a$,

3). $a(1)>0$, где $a(\alpha)=\sum\limits_{(x,l_i)\in E_a} M\gamma(\alpha,\ 0,\ (x,\ l_i))\,q_\alpha(x,\ j)$,

то

$$\left|P\left\{\frac{\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha)}{v(\alpha)}<u\right\}-\delta(u)\left(1-e^{-u\frac{b}{a(1)}}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant L_1\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}+|a(\alpha)-a(1)|+h(\alpha)\right),$$

где $L_1=\text{const}<\infty$.

Если выполняются условия (D_j), $j=\overline{1,3}$ и

(E_4): 1) $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M\,|\gamma(\alpha,\ 0,\ (x,\ l_i))|^3<\infty$, $(x,\ l_i)\in E_a$,

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1} M\,(\gamma(\alpha,\ 0,\ (x,\ l_i)))^k=M\,(\gamma(1,\ 0,\ (x,\ l_i)))^k$, $(x,\ l_i)\in E_a$,

$k=1,\ 2,$

3) $\sigma(1)^2>0$, где $\sigma(\alpha)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}D\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma(\alpha,\ k,\ y(\alpha,\ k))$,

то

$$\left|P\left\{\frac{\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha)-a(\alpha)\,\nu(\alpha)}{\sqrt{v(\alpha)}}<u\right\}-\int_0^\infty P\,\{N(0,\sigma(1)^2)\sqrt{v}<u\}\,e^{-v}dv\right|\leqslant$$

$$\leqslant L_2\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}+|\sigma(\alpha)-\sigma(1)|+h(\alpha)\right),$$

где $L_2=\text{const}<\infty$, а если, кроме того, выполняется условие

$$(E_5):\ \lim_{\alpha\to 1}(1+a(\alpha)\sqrt{v(\alpha)})^{-1}=l\in[0,\ 1],$$

то

$$\left|P\left\{\frac{\xi(x_0,\beta_0,\alpha)}{s(\alpha)}<u\right\}-\int_0^\infty P\{l\sqrt{v}N(0,\sigma(1)^2)+\right.$$

$$\left.+(1-l)v<u\}e^{-v}\,dv\right|\leqslant$$

$$\leqslant L_3\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}}+|\sigma(\alpha)-\sigma(1)|+\left|l-\frac{1}{1+a(\alpha)\sqrt{v(\alpha)}}\right|+h(\alpha)\right),$$

где

$$L_3=\mathrm{const}<\infty,\ s(\alpha)=(1+a(\alpha)\sqrt{v(\alpha)})\sqrt{v(\alpha)}.$$

Пусть

$$h_i(\alpha,\ x,\ s)=M\exp\{-s\tau(\alpha,\ 0,\ (x,\ l_i))\},$$

$$g_{ij}^{(r)}(\alpha,\ x,\ a,\ s)=M\exp\{-s\tau_{ij}^{(r)}(\alpha,\ x,\ a)\},$$

$$\tau_{ij}^{(r)}(\alpha,\ x,\ a)=\sum_{k=r-1}^{\Delta_{ij}(\alpha,x,a)-1}\tau(\alpha,\ k,\ \zeta_\alpha(k)),\ l_ix\geqslant a+1,\ i,\ j,\ r=1,\ 2.$$

Нетрудно видеть, что функции $g_{ij}^{(2)}(\alpha,x,a,s)$, $l_i\,x\geqslant a+1$, $j=1,2$ удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$g_{ij}^{(2)}(\alpha,\ x,\ a,\ s)=\sum_{k=1}^{2}p_{jk}(\alpha,\ x)\ h_k(\alpha,\ x+l_k,\ s)\,g_{ik}^{(2)}(\alpha,\ x+l_k,\ a,\ s),$$

$$g_{ij}^{(2)}(\alpha,\ a+1,\ a,\ s)=p_{ji'}(\alpha,\ a+1)+p_{ji}(\alpha,\ a+1)\times$$

$$\times g_{ii}(\alpha,\ (a+2)l_i,\ a,\ s),$$

$$xl_i\geqslant a+1,\ j,\ i'\in\{1,\ 2\},\ i'\neq i.$$

Очевидно,

$$M\exp\{-s\tau_\alpha(a,\ i)\}=\frac{g_{ii}^{(2)}(\alpha,\ a+1,\ a,\ s)}{g_{ii}^{(2)}(\alpha,\ a+1,\ a,\ 1)},\ \ i=1,\ 2.$$

Замечание 1. Из приведенных выше рассуждений видно, что задача о возможных предельных распределениях для случайного функционала $\xi(x_0,\beta_0,\alpha,t)$ сводится, по существу, к тому, чтобы в более явном виде выразить условия притяжения случайных величин $\tau_\alpha(a,i)$, $i=1,2$ к тому или иному безгранично делимому закону. В общем случае это достаточно трудная задача, представляющая собой значительный интерес с точки зрения общей теории дискретных случайных блужданий на прямой. Для случая, когда все $\tau(\alpha,0),(x,l_i))=1$ с вероятностью 1 для всех $x\geqslant l_i(a+1)$, $i=1,2$ и $p_{ij}(\alpha,x)\equiv p_{ij}(1,x)$, $|x|\geqslant l_i(a+1)$, $i,j=1,2$, некоторые результаты в этом направлении получены в [3, 4].

Рассмотрим случай, когда выполняется условие

(F_1) : 1 существуют $m_k = \text{const} \in \{1, 2, \ldots\}$, $k = 1, 2$ такие, что
$p_{ij}(\alpha, x) = p_{ij}(\alpha, x + l_k m_k)$ для $|x| \geqslant l_k(\alpha + 1)$, $i, j, k = 1, 2$;

$$2)\ \tau(\alpha, 0, (x, l_i)) \approx \tau(\alpha, 0, (x + l_k m_k, l_i))^{*)}$$

$$\text{для } l_k x \geqslant a + 1,\ i, k = 1, 2,$$

$$3)\ \sup_{\alpha \in [0,1]} M\tau(\alpha, 0, (x, l_i)) < \infty, \quad (x, l_i) \in Z.$$

Покажем, что в этом случае выполняется условие (B_3) [1]. Обозначим через $\tau_{ij}^{(r)}(\alpha, x, y, z)$, $y < x < z$, $i, j, r = 1, 2$ случайные величины, для которых

$$M \exp\{-s\tau_{ij}^{(r)}(\alpha, x, y, z)\} = f_{ij}^{(r)}(\alpha, x, y, z, s) =$$

$$= M\left(\exp\left\{-s \sum_{k=r-1}^{\Delta(\alpha,(x,l_i),(y,l_2),(z,l_1))-1} \tau(\alpha, k, \zeta_\alpha(k))\right\} / \beta_\alpha(\Delta(\alpha, (x, l_i),\right.$$

$$\left.(y, l_2), (z, l_1) = l_j\right).$$

Функции $f_{ij}^{(r)}(\alpha, x, y, z, s)$, $y < x < z$, $i = 1, 2$ для $j, r = 1, 2$ удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$f_{ij}^{(1)}(\alpha, x, y, z, s) =$$

$$= h_i(\alpha, x, s)\left(\sum_{k=1}^{2} r_{ik}^{(j)}(\alpha, x) f_{kj}^{(1)}(\alpha, x + l_k, y, z, s)\right),$$

$$f_{ij}^{(2)}(\alpha, x, y, z, s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} r_{ik}^{(j)}(\alpha, x) h_k(\alpha, x + l_k, s) f_{kj}^{(2)}(\alpha, x + l_k, y, z, s),$$

$$f_{ij}^{(r)}\left(\alpha, y + (z - y)\frac{l_i + l_j}{2}; y, z, s\right) =$$

$$= \left|\frac{l_i + l_j}{2}\right|, \quad y < x < z,\ i, j, r = 1, 2,$$

где

$$r_{i,k}^{(j)}(\alpha, x) = P\{\beta_\alpha(1) = l_k/(x_0, \beta_0) =$$

$$= (x, l_i);\ \beta_\alpha(\Delta(\alpha, (x, l_i), (y, l_2), (z, l_1))) = l_j\} =$$

$$= \frac{d_{kj}(\alpha, x + l_k, y, z)\, p_{ik}(\alpha, x)}{d_{ij}(\alpha, x, y, z, s)}, \quad y < x < z,\ i, j, k = 1, 2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\tau_{11}^{(2)}(\alpha, a + 1, a) \approx$$

$$\approx \begin{cases} \tau_{12}^{(2)}(\alpha, a + 1, a, a + m_1) \\ \text{с вероятностью } d_{12}(\alpha, a + 1, a, a + m_1), \quad \tau_{11}^{(2)}(\alpha, a + 1, a, \\ a + m_1) * \tau_{11}^{(1)}(\alpha, a + m_1, a)^{**)} \\ \text{с вероятностью } d_{11}(\alpha, a + 1, a, a + m_1), \end{cases} \tag{1}$$

---

*) Символ $\xi \approx \eta$ означает, что распределения случайных величин ξ и η совпадают.

**) Символ $\xi_1 * \xi_2 * \ldots * \xi_k$ следует читать как $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$, где случайные величины $\xi_1, \ldots \xi_k$ независимы в совокупности.

а случайные величины $\tau_{1j}(\alpha,\ a+m_1,\ a)$, $j=1,2$ удовлетворяют следующей системе стохастических равенств:

$$\tau_{1j}^{(1)}(\alpha,\ a+m_1,\ a)\approx$$

$$\approx\begin{cases}\tau_{j2}^{(1)}(\alpha,\ a+m_1,\ a,\ a+2m_1) \text{ с вероятностью } d_{j2}(\alpha,\ a+\\ +m_1,\ a,\ a+2m_1),\\ \tau_{j1}^{(1)}(\alpha, a+m_1, a, a+2m_1)\ast\tau_{11}^{(1)}(\alpha,\ a+m_1,\ a)\ast\\ \ast\tau_{12}^{(1)}(\alpha,\ a+m_1,\ a) \text{ с вероятностью } d_{j1}(\alpha,\ a+m_1,\ a,\ a+2m_1).\end{cases}\qquad(2)$$

Совершенно аналогичные (1) и (2) соотношения можно выписать для случайных величин $\tau_{22}^{(2)}(\alpha,\ -(a+1),\ a)$, $\tau_{2j}^{(1)}(\alpha,\ -(a+m_2),\ a)$, $j=1,\ 2$. Переходя в (2) (или в аналогичной системе стохастических равенств для случайных величин $\tau_{2j}^{(1)}(\alpha,\ -(a+m_2),\ a)$, $j=1,\ 2$) к характеристическим функциям, получаем системы линейных уравнений для нахождения $g_{ij}^{(1)}(\alpha,\ l_i(a+m_i), a, s)$, $i,\ j=1,\ 2$. Решая эти системы, получаем

$$g_{ii}^{(1)}(\alpha,\ l_i(a+m_i),\ a,\ s)=(2p_{21}^{(i)}(\alpha)\,l_{21}^{(i)}(\alpha,\ s))^{-1}\times$$
$$\times(1-\Delta^{(i)}(\alpha,\ s)-$$
$$-\sqrt{(1-\Delta^{(i)}(\alpha,\ s))^2-4p_{12}^{(i)}(\alpha)\,p_{21}^{(i)}(\alpha)\,l_{12}^{(i)}(\alpha,\ s)\,l_{21}^{(i)}(\alpha,\ s)}).$$

Здесь

$$\Delta^{(i)}(\alpha,\ s)=p_{11}^{(i)}(\alpha)\,p_{22}^{(i)}(\alpha)\,l_{11}^{(i)}(\alpha,\ s)\,l_{22}^{(i)}(\alpha,\ s)-$$
$$-p_{21}^{(i)}(\alpha)\,p_{12}^{(i)}(\alpha)\,l_{21}^{(i)}(\alpha,\ s)\,l_{12}^{(i)}(\alpha,\ s),$$

$$p_{kr}^{(i)}(\alpha)=d_r(\alpha,\ l_i(a+m_i,\ l_k),\ l_i(a+2m_i,\ l_1),\ l_i(a,\ l_2)),$$

$$l_{kr}^{(1)}(\alpha,\ s)=f_{kr}^{(1)}(\alpha,\ a+m_1,\ a,\ a+2m_1,\ s),$$

$$l_{kr}^{(2)}(\alpha,\ s)=f_{k',r'}^{(1)}(\alpha,\ -(a+m_2),\ -(a+2m_2),\ -a,\ s),$$

где $i,k,r,k',r'\in\{1,\ 2\}$, $k'\neq k$, $r'\neq r$.

Теперь для того, чтобы получить нужное разложение для $M\exp\{\sqrt{-1}\,s\tau_\alpha(a,\ 1)\}$, достаточно перейти в (1) к характеристическим функциям и разложить $g_{11}^{(1)}(\alpha,\ a+m_1,\ a,\ s)$, $l_{ij}^{(1)}(\alpha,\ s)$, $M\exp\{\sqrt{-1}\,s\tau_{1j}^{(r)}(\alpha,\ a,+1,\ a,\ a+m_1)\}$, $i,\ j=1,2$ по степеням s (в силу условия (F_1), 3) $\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} M\tau_{ij}^{(r)}(\alpha,\ x,\ y,\ z)<\infty$, $y<x<z$, $i,\ j$, $r=1,2$. При этом, если $g^{-1}(j')=(x,\ l_i)\in E_a$, то

$$k(j',\ \alpha)=\begin{cases}1, & \text{если } (x,\ l_i)\in E'_a,\\ d_{i'}(\alpha), & \text{если } x=-al_i,\ i=1,\ 2,\end{cases}$$

где $d_i(\alpha)=d_1(\alpha,\ (l_i,\ a),\ l_i(a+m_i,\ 1),\ l_i(a,\ -1))$, $i=1,\ 2$,

$$p_{\alpha,j'}p(\alpha)=\begin{cases}0, & \text{если } (x,\ l_i)\in E'_a,\\ r_{i'}(\alpha,\ a), & \text{если } x=-al_i,\ i=1,\ 2.\end{cases}$$

В этом случае $r_i(\alpha, a)$, $i = 1, 2$ имеют вид

$$r_i(\alpha, a) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_{11}^{(i)}(\alpha) \leqslant p_{22}^{(i)}(\alpha), \\ d_i(\alpha)\left(1 - \dfrac{p_{12}^{(i)}(\alpha)}{p_{21}^{(i)}(\alpha)}\right), & \text{если } p_{11}^{(i)}(\alpha) > p_{22}^{(i)}(\alpha), \end{cases}$$

$$r(j', \alpha)\, p(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, l_i) \in E'_a, \\ \dfrac{\left|p_{12}^{(i')}(\alpha) - p_{21}^{(i')}(\alpha)\right|}{2\max\left(p_{12}^{(i')}(\alpha), p_{21}^{(i')}(\alpha)\right)}, & \text{если } x = -al_i,\ i = 1, 2, \end{cases}$$

$$b(j', \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, l_i) \in E'_a, \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p_{11}^{(i')}(\alpha)}{p_{22}^{(i')}(\alpha)} \sum\limits_{k=1}^{2} M_{ik}(\alpha, a + m_{i'}) + O_1\left(\left|p_{11}^{(i')}(\alpha) - p_{22}^{(i')}(\alpha)\right|\right)^{*)}, & \\ \qquad \text{если } x = -al_i,\ i = 1, 2, & \end{cases}$$

где $i, i' \in \{1, 2\}$, $i' \neq i$.

$$M_{ik}(\alpha, x) = M \sum_{k=0}^{\Delta^{(i)}{}_{k,x}(\alpha)-1} \tau(\alpha, k, \zeta_\alpha(k)),$$

$$\Delta_{kx}^{(i)}(\alpha) = \Delta(\alpha, (l_i a + x, l_k), l_i(a + 2m_i, 1), l_i(a, -1)),$$
$$i, k = 1, 2, \ |x| < m_i$$

Очевидно, функции $M_{ik}(\alpha, x)$, $|x| < m_i$, $i, k = 1, 2$ удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

$$M_{ik}(\alpha, x) = M\tau(\alpha, 0, (l_i a + x, l_k)) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{2} p_{kr}(\alpha, l_i a + x) M_{ir}(\alpha, x + l_r),$$
$$|x| < m_i,\ M_{ik}(\alpha, \pm m_i) = 0,\ i, k = 1, 2.$$

Замечание 2. При соблюдении условия (F_1) выполняется условие (B_3) [1] и нахождение всех необходимых параметров сводится к решению конечных систем линейных уравнений.

Для того чтобы в разложении характеристической функции случайной величины $\varkappa(\alpha, 0, i)$, $i \in H$

$$h_i(\alpha, s) = g_i(\alpha, s)\, s,$$

где

$$|g_i(\alpha, s)| \leqslant A = \text{const} < \infty,$$

необходимо потребовать в дополнение к (F_1) выполнения условия

$$(F_2):\ \sup_{\alpha \in [0,1]} M\tau(\alpha, 0, (x, l_j))^2 < \infty,\ xl_i \geqslant a + 1,\ i, j = 1, 2.$$

---

*) Здесь и ниже $\overline{\lim\limits_{x \to 0}}\, x^{-1} O_k(x) = a_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$

Теперь нетрудно сформулировать утверждения, переносящие результаты, полученные в теоремах 2 и 4 [1] на рассматриваемую схему.

2. Пусть для случайного блуждания $S_1(\alpha)$ выполняется условие

$$p_{ij}(\alpha, x) = p_{ij}(\alpha), \quad x \in E, \quad i, j = 1, 2$$

(если, кроме того, $p_{ij}(\alpha) = p_j(\alpha)$, $i, j = 1, 2$, то это обычная схема Бернулли). Пусть, например, $\beta_0 = l_1$. Обозначим через τ_k — время между $(k-1)$-й и k-й сменами направления движения блуждающей частицы. Очевидно, случайные величины τ_k, $k = 1, 2, \ldots$ независимы и

$$\begin{array}{l} P\{\tau_k = n\} = \\ n = 0, 1, \ldots \end{array} \begin{cases} p_{11}(\alpha)^n (1 - p_{11}(\alpha)), & \text{если } k \text{ нечетно}, \\ p_{22}(\alpha)^n (1 - p_{22}(\alpha)), & \text{если } k \text{ четно}. \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемое блуждание можно интерпретировать как своеобразное колебание частицы на прямой со случайными независимыми и одинаково распределенными (как разность двух фиксированных независимых геометрически распределенных случайных величин) периодами колебаний. Естественным непрерывным аналогом подобной схемы является случайное блуждание

$$x_\alpha(t) = x_0 + \int_0^t \beta_\alpha(s)\, ds,$$

где $\beta_\alpha(u)$, $u \geqslant 0$ — для каждого $\alpha \in [0, 1]$ однородная цепь Маркова с непрерывным временем и двумя состояниями, l_1, l_2 переходные вероятности которой $p_{ij}(\alpha, t)$, $t \geqslant 0$, $i, j = 1, 2$ удовлетворяют системе Колмогорова

$$\frac{dp_{ij}(\alpha, t)}{dt} = \sum_{k=1}^{2} p_{kj}(\alpha, t)\, a_{ik}(\alpha), \quad i, j = 1, 2,$$

где

$$|a_{ij}(\alpha)| > 0, \quad i, j = 1, 2,$$

$$(x_0, \beta_0) = (x_\alpha(0), \beta_\alpha(0)) = \mathrm{const} \in Z \text{ с вероятностью } 1,$$

$$Z = (-\infty, \infty) \times \{l_1, l_2\}.$$

Обозначим

$$\tau(\alpha, z_0, z_1, \ldots, z_k) = \inf(s : (x_\alpha(s), \beta_\alpha(s)) \in \{z_1, \ldots, z_k\} \text{ при } (x_0, \beta_0) = z_0), \quad z_i \in Z, \quad i = \overline{0, k},$$

$$q_{ij}(\alpha, x, y, z) = P\{\beta_\alpha(\tau(\alpha, (x, l_i), (y, l_2), (z, l_1))) = l_j\},$$

$$y \leqslant x \leqslant z, \quad i, j = 1, 2.$$

Для нахождения $q_{i1}(\alpha, x, y, z)$, $x \leqslant y \leqslant z$, $i = 1, 2$ нетрудно выписать систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_{11}(\alpha, x, y, z)}{dx} = a_{12}(\alpha)\, q_{11}(\alpha, x, y, z) - a_{12}(\alpha)\, q_{12}(\alpha, x, y, z),$$

$$\frac{dq_{12}(\alpha, x, y, z)}{dx} = a_{21}(\alpha)\, q_{11}(\alpha, x, y, z) - a_{21}(\alpha)\, q_{12}(\alpha, x, y, z)$$

с краевыми условиями

$$q_{12}(\alpha, y, y, z)=1, \quad q_{11}(\alpha, z, y, z)=1,$$

решая которую, находим

$$q_{11}(\alpha, x, y, z)=\frac{a_{12}(\alpha)(u-v)}{a_{21}(\alpha)-a_{21}(\alpha)v},$$

$$q_{12}(\alpha, x, y, z)=\frac{a_{21}(\alpha)u-a_{12}(\alpha)v}{a_{21}(\alpha)-a_{12}(\alpha)v},$$

где

$$u=e^{(a_{21}(\alpha)-a_{12}(\alpha))(x-y)}, \quad v=e^{(a_{21}(\alpha)-a_{12}(\alpha))(z-y)}.$$

Следовательно, рассматриваемое блуждание возвратно (для всех $z_0, z_1 \in Z : P\{\tau(\alpha, z_0, z_1)<\infty\}=1$) тогда и только тогда, когда $a_{12}(\alpha)=a_{21}(\alpha)$.

Будем предполагать выполненным условие

$$(G_1): 1)\ a_{21}(\alpha)\geqslant a_{12}(\alpha) \text{ для } \alpha<1;$$

$$2)\ \lim_{\alpha\to 1} a_{21}(\alpha)=\lim_{\alpha\to 1} a_{12}(\alpha)=a_{21}(1)=a_{12}(1)=a\in(0, \infty).$$

Введем в рассмотрение случайный функционал

$$\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t)=\int_0^t f_\alpha(x_\alpha(s), \beta_\alpha(s))\,ds,$$

где $f_\alpha(x, l_i)$ — функция, определенная на Z и удовлетворяющая условию

$$(G_2): 1)\ |f_\alpha(x, l_i)|\leqslant L_4 X_{[-c,c]}(x),$$

где $L_4=\text{const}<\infty$,

$$2)\ \lim_{\alpha\to 1} f_\alpha(x, l_i)=f_1(x, l_i),\ (x, l_i)\in Z;$$

3) $f_\alpha(x, l_i)$ как функция $x\in(-\infty, \infty)$ для каждого $i\in\{1, 2\}$ может иметь разрывы только первого рода, множество точек которых конечно.

Пусть

$$\theta(\alpha, 0)=\inf(s : x_\alpha(s)=\pm c, \beta_\alpha(s)=\text{sign}\pm c),$$

$$\theta(\alpha, n)=\inf(s : s>\theta(\alpha, n-1), x_\alpha(s)=\pm c), n=1, 2, \ldots,$$

$$\mu(\alpha)=\max(n : \theta(\alpha, n)\leqslant t),\ \nu(\alpha, t)=\frac{1}{4c}\int_0^t X_{[-c,c]}(x_\alpha(s))\,ds.$$

Нетрудно показать, что случайная величина $\theta(\alpha, 0)$ при выполнении условия (G_1) равномерно по α ограничена по вероятности, а

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} M\left|\int_0^{\theta(\alpha,0)} f_\alpha(x_\alpha(s), \beta_\alpha(s))\,ds\right|<\infty$$

при выполнении условий (G_i), $i = 1, 2$. Следовательно, не нарушая общности, можно считать, что $(x_0, \beta_0) = \pm (c, l_1)$.

Для случайного функционала $\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t)$ имеет место представление

$$\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t) = \widehat{\xi}(x_0, \beta_0, \alpha, t) + \gamma(\alpha, t),$$

где

$$\widehat{\xi}(x_0, \beta_0, \alpha, t) = \int\limits_0^{\theta(\alpha,\mu(\alpha))} f_\alpha(x_\alpha(s), \beta_\alpha(s))\, ds, \quad \gamma(\alpha, t) = \int\limits_{\theta(\alpha,\mu(\alpha))}^{t} f_\alpha(x_\alpha(s), \beta_\alpha(s))\, ds.$$

Очевидно,

$$P\{|\gamma(\alpha, t)| \geqslant 0\} \leqslant P\{|x_\alpha(t)| \leqslant c\}.$$

Нетрудно показать, что

$$P\{|x_\alpha(t)| \leqslant c\} = O_2(\sqrt{t}) \text{ при } t \to \infty, \ \alpha \to 1.$$

С другой стороны,

$$\widehat{\xi}(x_0, \beta_0, \alpha, t) \approx \xi(\eta_0, \alpha, t).$$

Здесь $\xi(\eta_0, \alpha, t)$ — случайный функционал в основной схеме $T_j(\alpha)$, $j = \overline{1, 3}$, для которой:

а) $T_1(\alpha) = \{g(y(\alpha, n), y(\alpha, n+1)), n = 0, 1, \ldots\}$,

где

$g(\cdot, \cdot)$ — взаимно однозначное соответствие между

$\{(l_i a, l_j a), i, j = 1, 2\} = H'$ и $\{1, 2, \ldots, m = 4\} = H$;

$S(\alpha) = \{y(\alpha, n), n = 0, 1, \ldots\}$ — однородная цепь Маркова со множеством состояний H' и переходными вероятностями

$$P\{y(\alpha, n+1) = l_j a / y(\alpha, n) = l_j a\} =$$
$$= P\{x_\alpha(\theta(\alpha, 2)) = l_j a / x_\alpha(\theta(\alpha, 0)) = l_i a, \ \theta(\alpha, 2) > \infty\} =$$
$$= q_{i'j}(\alpha, l_i a, -a, a), \ i, j, i' \in \{1, 2\}, \ i' \neq i;$$

б) если $g^{-1}(k) = (l_i a, l_j a)$, $i, j \in \{1, 2\}$, то

$$P\{\gamma(\alpha, 0, k) < u, \varkappa'(\alpha, 0, k) < v\} =$$
$$= P\{\int\limits_{\theta(\alpha,1)}^{\theta(\alpha,2)} f_\alpha(x_\alpha(s), \beta_\alpha(s))\, ds < u,$$
$$\theta(\alpha, 2) - \theta(\alpha, 1) < v / \theta(\alpha, 2) < \infty, \ x_0 = l_i a, \ x_\alpha(\theta(\alpha, 2)) = l_j a\},$$

$$P\{\varkappa(\alpha, 0, k) < u\} = P\{\theta(\alpha, 1) < u / \theta(\alpha, 1) < \infty, \ x_0 = l_i a\},$$

$$p(\alpha, k) = \begin{cases} P\{\theta(\alpha, 1) = \infty / x_0 = l_i a\} = r(\alpha), & \text{если } x_0 = a, \\ 0, & \text{если } x_0 = -a, \end{cases}$$

где $r(\alpha) = 1 - \dfrac{a_{12}(\alpha)}{a_{21}(\alpha)}$.

В [5, 6] показано, что в этом случае

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} M(\varkappa'(\alpha, 0, k)^r + |\gamma(\alpha, 0, k)|^r) < \infty, \ r \geqslant 1$$

и в силу замечания 3 [1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} M \sum_{k=1}^{n} \gamma(\alpha, k, \eta_\alpha(k)) = \frac{1}{2} q_1(\alpha) M\lambda_1(\alpha, c),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} D \sum_{k=1}^{n} \gamma(\alpha, k, \eta_\alpha(k)) = \frac{1}{2} q_1(\alpha) D\lambda_1(\alpha, c), + 0(b_1(\alpha)),$$

где

$$\lambda_i(\alpha, c) = \int_0^{\tau_i(\alpha, c)} f_\alpha(x_\alpha(s), \beta_\alpha(s))\, ds,$$

$$\tau_i(\alpha, c) = \tau(\alpha, l_i c, -l_i c), \ i = 1, 2,$$

$q_i(\alpha)$, $i = 1, 2$ — стационарное распределение $S(\alpha)$.
В [5, 6] показано, кроме того, что

$$q_i(\alpha) = \frac{1}{2} + O_3(r(\alpha)), \ M\lambda_1(\alpha, c)^k = b_k(\alpha), \ k = 1, 2,$$

где

$$b_1(\alpha) = \int_{-c}^{c} \sum_{i=1}^{2} f_\alpha(x, l_i)\, dx + O_4(r(\alpha)),$$

$$b_2(\alpha) = \int_{-c}^{c} \int_{-c}^{c} 2a \min(|x|, |y|) \sum_{i=1}^{2} f_\alpha(x, l_i) \sum_{j=1}^{2} f_\alpha(y, l_j)\, dx dy + $$
$$+ b_1(\alpha)^2 + O_5(r(\alpha)), \quad (3)$$
$$M(\exp\{-s\tau_i(\alpha, c)\}/\tau_i(\alpha, c) < \infty\}) = (2a_{12}(\alpha))^{-1} \times$$
$$\times (a_{12}(\alpha) + a_{21}(\alpha) + 2s -$$
$$- \sqrt{(a_{12}(\alpha) - a_{21}(\alpha))^2 + 4s^2 + 4s(a_{12}(\alpha) + a_{21}(\alpha))}).$$

Следовательно, выполняются все условия теорем 2 и 4 [1]. Сформулируем в терминах рассматриваемой схемы теорему 4 [1].

Теорема 3. Пусть выполняются условия (G_i), $i = 1, 2$ и

$$(G_3): \lim_{\alpha\to 1, t\to\infty} (1 + r(\alpha)\sqrt{t})^{-1} = q \in [0, 1].$$

Тогда: если $b_1(1) > 0$, то

$$\left| P\left\{ \frac{\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t)}{V(\alpha, t)} < u \right\} - \Psi\left(q, 1, 2a^{-\frac{1}{2}}, 1, \frac{u}{b_1(1)}\right)^{*)} \right| \leqslant$$

*) Функция распределения $\Psi(q, a_1, a_2, a_3, u)$ определена в [1].

$$\leqslant L_5\left(\left|(1+r(\alpha)\sqrt{t})^{-1}-q\right|^{\frac{1}{2}}+v(\alpha,\ t)^{-\frac{1}{4}}+|b_1(\alpha)-b_1(1)|\right),$$

где $L_5=\text{const}<\infty,\quad v(\alpha,\ t)=\dfrac{\sqrt{t}}{1+r(\alpha)\sqrt{t}}$;

если $b_2(1)>0$, то

$$\left|\int_0^\infty P\{\sqrt{v}N(0,\ b_2(1))<u\}\,d_v\Psi(q,\ 1,\ 2a^{-\frac{1}{2}},\ 1,\ v)-\right.$$

$$\left.-P\left\{\frac{\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha,\ t)-b_1(\alpha)\,v(\alpha,\ t)}{\sqrt{v(\alpha,\ t)}}<u\right\}\right|\leqslant L_6\left(v(\alpha,\ t)^{-\frac{1}{6}}+\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{i=1}^{2}b_i(\alpha)-b_i(1)\right|+\left|(1+r(\alpha)\sqrt{t})^{-1}-q\right|^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $L_6=\text{const}<\infty$;

если $b_2(1)>0$ и $\lim\limits_{\alpha\to1,t\to\infty}(1+b_1(\alpha)\sqrt{v(\alpha,\ t)})=p\in[0,\ 1]$, то

$$\left|\int_0^\infty P\{N(v(1-p),\ p^2vb_2(1))<u\}\,d_v\Psi(q,\ 1,\ 2a^{-\frac{1}{2}},\ 1,\ v)-\right.$$

$$\left.-P\left\{\frac{\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha,\ t)}{u(\alpha,\ t)}<u\right\}\right|\leqslant L_7\left(\left|\frac{1}{1+b_1(\alpha)\sqrt{v(\alpha,\ t)}}-p\right|+\right.$$

$$\left.+\left|(1+r(\alpha)\sqrt{t})^{-1}-q\right|^{\frac{1}{2}}+v(\alpha,\ t)^{-\frac{1}{6}}+\sum_{i=1}^{2}|b_i(\alpha)-b_i(1)|\right),$$

где $L_7=\text{const}<\infty,\quad u(\alpha t)=(1+b_1(a)\sqrt{v(a,\ t)})\sqrt{v(a,\ t)}.$

Если $r(\alpha)>0$, то существует конечный с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty}\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha,\ t)=\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha).$$

Возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(x_0,\ \beta_0,\ \alpha)$ при $\alpha\to1$ так, что выполняются условия (G_i), $i=1,2$, полностью описываются теоремами 2 и 3 [1]. Все необходимые параметры задаются соотношениями (3).

3. Пусть для каждого $\alpha\in[0,\ 1]$ $x_\alpha(t)$, $t\geqslant0$ — однородный во времени диффузионный процесс, определяемый плотностью вероятности перехода $u_\alpha(x,\ t,\ y)$, $t\geqslant0$, $x,\ y\in(-\infty,\ \infty)$, являющейся фундаментальным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_\alpha(x,\ t,\ y)}{\partial t}=\frac{1}{2}b_\alpha(x)\frac{\partial^2u_\alpha(x,\ t,\ y)}{\partial x^2}+a_\alpha(x)\frac{\partial u_\alpha(x,\ t,\ y)}{\partial x},$$

для коэффициентов которого $a_\alpha(x)$ и $b_\alpha(x)$ потребуем выполнения следующего условия невырожденности

(H_1): 1) $a_\alpha(x)$ и $b_\alpha(x)$ непрерывны для всех $x\in R_1=(-\infty,\ \infty)$,

2) $b_\alpha(x)>0,\ x\in R_1$.

Не нарушая общности, можно считать, что случайный процесс $x_\alpha(t)$, $t \geqslant 0$ непрерывен и $x_\alpha(0) = x_0 = \text{const} \in R_1$ с вероятностью 1. Обозначим

$$\tau(\alpha, x_0, x_1, x_2) = \inf(t : x_\alpha(t) \in \{x_1, x_2\}),$$

$$q_j(\alpha, x, y, z) = P\Big\{\tau(\alpha, x, y, z) < \infty,$$

$$x_\alpha(\tau(\alpha, x, y, z)) = y + (z - y)\frac{l_j + l_1}{2}\Big\}, \qquad j = 1, 2$$

и назовем процесс $x_\alpha(t)$, $t \geqslant 0$ возвратным, если

$$\sum_{j=1}^{2} q_j(\alpha, x, y, z) = 1 \text{ для всех } x, y, z \in R_1.$$

Для этого, очевидно, достаточно, чтобы для каких-нибудь $x \in R_1$ и $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{2} r_j(\alpha, x, \varepsilon) = 0,$$

где

$$r_j(\alpha, x, \varepsilon) = \lim_{z \to \infty} q_1(\alpha, l_j(x + \varepsilon), l_j x, l_j z), \; j = 1, 2.$$

В [7] показано, что

$$q_1(\alpha, x, y, z) = \int_y^x R_\alpha(y, t)\,dt \left(\int_y^z R_\alpha(y, t)\,dt\right)^{-1}, \; y \leqslant x \leqslant z, \tag{4}$$

где

$$R_\alpha(y, t) = \exp\left\{-\int_y^t \frac{2a_\alpha(u)}{b_\alpha(u)}\,du\right\}.$$

Будем предполагать выполненным условие

(H_2) : 1) $\lim\limits_{\alpha \to 1} a_\alpha(x) = a_1(x)$, $\lim\limits_{\alpha \to 1} b_\alpha(x) = b_1(x)$, $x \in R_1$,

2) $r_j(1, x, \varepsilon) = 0$, $\quad j = 1, 2$ (в силу условия (H_2), 1) и (4) $\lim\limits_{\alpha \to 1} r_j(\alpha, x, \varepsilon) = r_j(1, x, \varepsilon) = 0$, $j = 1, 2$).

Введем в рассмотрение случайный функционал

$$\xi(x_0, \alpha, t) = \int_0^t f_\alpha(x_\alpha(s))\,ds,$$

где $f_\alpha(x)$, $x \in R_1$ удовлетворяет условию

(H_3) : 1) $|f_\alpha(x)| \leqslant L_3 \mathrm{X}_{[-c,c]}(x)$, где $L_3 = \text{const} < \infty$,

2) $\lim\limits_{\alpha \to 1} f_\alpha(x) = f_1(x)$, $x \in R_1$,

3) $f_\alpha(x)$, $x \in R_1$ — непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

Нас интересуют возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(x_0, \alpha, t)$ при $t \to \infty$ и $\alpha \to 1$ так, что выполняются условия (H_i), $i = \overline{1, 3}$.

Замечание 3. Для случая, когда

$$f_\alpha(x) = f_1(x),\ a_\alpha(x) = a_1(x),\ b_\alpha(x) = b_1(x),\ x \in R_1,$$

соответствующие результаты (исключая оценки скорости сходимости) получены в работе [8].

Очевидно, если $\sum_{i=1}^{2} r_i(\alpha, 0, \varepsilon) > 0$, то существует конечный с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \xi(x_0, \alpha, t) = \xi(x_0, \alpha),$$

и можно изучать возможные предельные распределения для случайного функционала $\xi(x_0, \alpha)$ при $\alpha \to 1$.

Пусть $\widehat{E} = \{0 \pm a, \pm 2a, \ldots\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $x_0 \in \widehat{E}$ и $c = a$. Для случайного функционала $\xi(x_0, \alpha, t)$ имеет место представление

$$\xi(x_0, \alpha, t) = \hat{\xi}(x_0, \alpha, t) + \gamma(\alpha, t),$$

где

$$\hat{\xi}(x_0, \alpha, t) = \int_0^{\theta(\alpha,t)} f_\alpha(x_\alpha(s))\, ds,\quad \gamma(\alpha, t) = \int_{\theta(\alpha,t)}^{t} f_\alpha(x_\alpha(s))\, ds,$$

$$\theta(\alpha, t) = \sup(s : s \leqslant t,\ x_\alpha(s) \in \widehat{E}).$$

Можно показать, что при выполнении условий (H_i), $i = \overline{1, 3}$

$$M\,|\gamma(\alpha, t)|^2 \leqslant L_9 = \mathrm{const} < \infty.$$

Случайный функционал $\widehat{\xi}(x_0, \alpha, t)$ полностью вкладывается в схему $S_j(\alpha)$, $j = 1, 2$, $\xi(x_0, \beta_0, \alpha, t)$, для которой:

$$p_{ij}(\alpha, x) = P\{x_\alpha(\tau(\alpha, ax, (a-1)x, (a+1)x)) = \\ = (a + l_j)x\},\ x \in E,\ i, j = 1, 2;$$

$$P\{\tau(\alpha, 0, (x, l_i)) < u,\ \gamma(\alpha, 0, (x, l_i)) < v\} = \\ = P\left\{\tau_{x,i}(\alpha) < u,\ \int_0^{\tau_{x,i}(\alpha)} f_\alpha(x_\alpha(s))\, ds < v / x_\alpha(\tau_{x,i}(\alpha)) = xa\right\}.$$

Здесь $\tau_{x,i}(\alpha) = \tau(\alpha, a(x - l_i), (x - 2l_i)a, xa)$, $x \in E$, $i = 1, 2$. Из результатов, приведенных в [9], следует, что в данном случае

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} M\tau(\alpha, 0, (x, l_i))^k < \infty,\ M\,|\gamma(\alpha, 0, (x, l_i))|^k \leqslant L_k' \mathrm{X}_{[-2,2]}(x)$$

$$\lim_{\alpha\to 1} M\tau(\alpha, 0, (x, l_i))^k = M\tau(1, 0, (x, l_i))^k,$$

$$\lim_{\alpha\to 1} M\gamma(\alpha, 0, (x, l_i)))^k = M(\gamma(1, 0, (x, l_i)))^k,$$

$$k \geqslant 1.$$

В [9] приведены дифференциальные уравнения, позволяющие найти в явном виде все моменты случайных величин и $\tau(\alpha, 0, (x, l_i))$, $\gamma(\alpha, 0, (x, l_i))$, $x \in E$, $i = 1, 2$.

Опуская промежуточные преобразования, сформулируем утверждения, переносящие результаты, полученные выше, на рассматриваемую схему. Пусть

$$c_1(\alpha) = \int_a^{2a} R_\alpha(-a, t) \int_{-a}^{t} \frac{2f_\alpha(u)}{b_\alpha(u) R_\alpha(-a, u)} dudt,$$

$$b_\alpha = \int_a^{2a} R_\alpha(-a, t) \int_{-a}^{t} \frac{2}{b_\alpha(u) R_\alpha(-a, u)} dudt,$$

$$c_2(\alpha) = \int_a^{2a} R_\alpha - (a, t) \int_{-a}^{t} \frac{2f_\alpha(u)}{b_\alpha(u) R_\alpha(-a, u)} \times$$

$$\times \int_u^{2a} R_\alpha(-a, s) \int_{-a}^{s} \frac{2f_\alpha(v)}{b_\alpha(v) R_\alpha(-a, v)} dvdsdudt,$$

$q_j(\alpha)$, $j = 1, 2$ — стационарное распределение однородной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей,

$$\| p_{ij}(\alpha) = q_j(\alpha, l_i a, 2a, -2a) \|_{i,j=1}^{2},$$

$$a(\alpha) = \frac{1}{2} q_1(\alpha) c_1(\alpha),$$

$$\sigma(\alpha)^2 = \frac{1}{2} q_1(\alpha) (c_2(\alpha) - c_1(\alpha)^2),$$

$$\nu(\alpha, t) = \int_0^t b_\alpha^{-1} \chi_{[-a,a]}(x_\alpha(s))\, ds,$$

$$\nu(\alpha) = \lim_{t\to\infty} \nu(\alpha, t),$$

$$\tau_i(\alpha, x, a) = \inf(s : x_\alpha(s) = l_i a), \ x l_i \geqslant a, \ i = 1, 2,$$

$$g_i(\alpha, x, a, s) = M(\exp\{\sqrt{-1}\, s\tau_i(\alpha, x, a)\}/\tau_i(\alpha, x, a) < \infty) \times$$
$$\times P\{\tau_i(\alpha, x, a) < \infty)\}.$$

В [9] показано, что $g_i(\alpha, x, a, s)$, $x l_i \geqslant a$ для каждого $i \in \{1, 2\}$ являются единственным ограниченным по модулю решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} b_\alpha (xl_i) \frac{d^2 g_i(\alpha, x, a, s)}{dx^2} + a_\alpha (xl_i) \frac{dg_i(\alpha, x, a, s)}{dx} +$$
$$+ \sqrt{-1}\, s g_i(\alpha, x, a, s) = 0$$

с краевыми условиями

$$g_i(\alpha, x, a, s) \to 1 \text{ при } x \to a,$$
$$g_i(\alpha, x, a, s) \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

В частности, если выполняется условие

$$(\mathrm{H}_4): a_\alpha(x) = a_\alpha(x + ka),\ b_\alpha(x) = b_\alpha(x + ka),$$

где $x,\ x + ka \overline{\in} [-a, a]$, то

$$M \exp\{-s\tau_i(\alpha, 2a, a)\} = (2p_i(\alpha) h_i(\alpha, s))^{-1} \times$$
$$\times (1 - \sqrt{1 - 4p_1(\alpha) p_2(\alpha) h_1(\alpha, s) h_2(\alpha, s)}), \quad i = 1, 2,$$

где

$$p_i(\alpha) = P\left\{x_\alpha(\tau(\alpha, 2a, a, 3a)) = 2a + \frac{l_i + l_1}{2} a\right\} = q_i(\alpha, 2a, a, 3a),$$

$$h_i(\alpha, s) =$$
$$= M(\exp\{-s\tau(\alpha, 2a, a, 3a)\}/x_\alpha\left(\tau(\alpha, 2a, a, 3a)) = 2a + \frac{l_i + l_1}{2} a\right),$$
$$i = 1, 2,$$

откуда следует, что при соблюдении (H_4) выполняется условие (F_1). Нетрудно показать, что при выполнении условия (H_4)

$$\begin{array}{r} r_i(\alpha, a, a) = \\ i, i' \in \{1, 2\},\ i' \neq i \end{array} \begin{cases} 1 - \dfrac{p_{i'}(\alpha)}{p_i(\alpha)}, & \text{если } p_i(\alpha) > \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{если } p_i(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия (H_i), $i = \overline{1, 3}$ и

$$(\mathrm{H}_5): 1)\ v(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{2} r_i(\alpha, a, a)\right)^{-1} < \infty \text{ для } \alpha < 1,$$

$$2)\ \lim_{\alpha \to 1} r_i(\alpha, a, a)\, v(\alpha) = p_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2.$$

Тогда: если $a(1) > 0$, то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(x_0, \alpha)}{v(\alpha)} < u\right\} - \delta(u)\left(1 - e^{-\frac{p}{a(1)} u}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant L_{10}\left(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}} + |c_1(\alpha) - c_1(1)| + |q_1(\alpha) - q_1(1)| +\right.$$
$$\left. + |r_1(\alpha, a, a)\, v(\alpha) - p_i|\right),$$

где $L_{10} = \text{const} < \infty$, $p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i(1) p_i$;

если $\sigma(1)^2 > 0$, то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(x_0, \alpha) - c_1(\alpha)\nu(\alpha)}{\sqrt{v(\alpha)}} < u\right\} - \int_0^\infty P\{N(0, \sigma(1)^2)\sqrt{v} < u\} e^{-v} dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant L_{11}(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}} + |c_2(\alpha) - c_2(1)| + |q_1(\alpha) - q_1(1)| + + |r_1(\alpha, a, a)v(\alpha) - p_1|),$$

где $L_{11} = \text{const} < \infty$;

если $\sigma(1)^2 > 0$ и $\lim_{\alpha\to 1}(1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha)})^{-1} = l \in [0, 1]$, то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(x_0, \alpha)}{w(\alpha)} < u\right\} - \int_0^\infty \{P\sqrt{v}\, lN(0, \sigma(1)^2) + v(1 - l) < u\} e^{-v} dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant L_{12}(v(\alpha)^{-\frac{1}{4}} + |c_2(\alpha) - c_2(1)| + |q_1(\alpha) - q_1(1)| + + \left|\frac{1}{1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha)}} - l\right| + |r_1(\alpha, a, a)v(\alpha) - p_1|),$$

где

$$L_{12} = \text{const} < \infty, \quad w(\alpha) = (1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha)})\sqrt{v(\alpha)}.$$

Замечание 4. Условия $a(1) > 0$ или $\sigma(1)^2 > 0$ необходимы только для получения оценок скорости сходимости.

Пусть $\tau_i(\alpha, a)$ — случайные величины такие, что

$P\{\tau_i(\alpha, a) < u\} = P\{\tau_i(\alpha, 2a, a) < u / \tau_i(\alpha, 2a, a) < \infty\}$, $\quad i = 1, 2$ и $\tau_i^{(k)}(\alpha, a)$, $k = 1, 2, \ldots$ — для каждого $i \in \{1, 2\}$ последовательность независимых в совокупности и одинаково распределенных с $\tau_i(\alpha, a)$ случайных величин.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (H_i), $i = \overline{1, 3}$ и

$$(H_6):\ 1)\ \lim_{\alpha\to 1} r_i(\alpha, a, a)u(\alpha) = q_i \in [0, \infty), \quad i = 1, 2,$$

где $u(\alpha) \in \mathfrak{M}$;

$$2)\ \lim_{\alpha\to 1}(\text{сл.})\sum_{k=1}^{[xu(\alpha)]} \frac{\tau_i^k(\alpha, a)}{t(\alpha)} = \tau_i(x), \quad x \geqslant 0, \quad i = 1, 2,$$

где $\tau_i(x)$, $i = 1, 2$, $x \geqslant 0$ — собственные случайные величины, $t(\alpha) \in \mathfrak{M}$;

$$3)\ \sum_{i=1}^{2}(q_i + P\{\tau_i(1) > 0\}) > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to 1}\frac{u(\alpha)}{t(\alpha)} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to 1} (\text{сл.}) \frac{\xi(x_0, \alpha, t(\alpha))}{u(\alpha)} = a(1)\nu,$$

где

$$P\{\nu < u\} = \delta(u)\left(1 - P\left\{\sum_{i=1}^{2} \tau_i\left(q_i(1)\frac{u}{2}\right) \leqslant 1\right\} e^{-\frac{1}{2}u\sum\limits_{i=1}^{2} q_i(1)q_i}\right).$$

Здесь $\tau_1\left(q_1(1)\frac{u}{2}\right)$ и $\tau_2\left(q_2(1)\frac{u}{2}\right)$ независимы,

$$\lim_{\alpha\to 1} (\text{сл.}) \frac{\xi(x_0, \alpha, t(\alpha)) - c_1(\alpha)\nu(\alpha, t(\alpha))}{\sqrt{u(\alpha)}} = \sqrt{\nu}\,N(0, \sigma(1)^2),$$

где ν и $N(0, \sigma(1)^2)$ независимы, а если $\lim\limits_{\alpha\to 1}(1 + a(\alpha)\sqrt{u(\alpha)})^{-1} = p \in [0, 1]$, то

$$\lim_{\alpha\to 1} (\text{сл.}) \frac{\xi(x_0, \alpha, t(\alpha))}{s(\alpha)} = p\sqrt{\nu}\,N(0, \sigma(1)^2) + (1-p)\nu,$$

где $s(\alpha) = (1 + a(\alpha)\sqrt{u(\alpha)})\sqrt{u(\alpha)}$.

Замечание 5. В [8,10] для случая $a_\alpha(x) = a_1(x)$, $b_\alpha(x) = b_1(x)$, $x \in R_1$ приведен ряд достаточных условий для того, чтобы случайные величины $\tau_i(1, a)$, $i = 1, 2$ принадлежали области притяжения того или иного устойчивого закона.

Условие (H_4) влечет выполнение условий применимости теорем 2 и 4 [1]. Сформулируем в терминах рассматриваемой схемы теорему 4 [1] (заметим, что, как и в теореме 4; условия $a(1) > 0$ или $\sigma(1)^2 > 0$ необходимы только для получения оценок скорости сходимости). Обозначим

$$v(\alpha, t) = \frac{\sqrt{t}}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}},$$

$$r(\alpha) = 1 - \frac{p_2(\alpha)}{p_1(\alpha)},$$

$$u(\alpha, t) = (1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha, t)})\sqrt{v(\alpha, t)},$$

$$c(\alpha) = M\tau(\alpha, 2a, a, 3a) = 2\int_a^{2a} dt \int_{2a}^{3a} ds \int_t^s \frac{R_\alpha(a, t)\,R_\alpha(a, s)}{R_\alpha(a, u)}\,du \times$$

$$\times \left(\int_a^{3a} R_\alpha(a, t)\,dt\right)^{-1}.$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия (H_i), $i = \overline{1, 4}$ и

(H_7): 1) $p_1(\alpha) \geqslant p_2(\alpha)$ для $\alpha < 1$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 1}(1 + r(\alpha)\sqrt{t})^{-1} = q \in [0, 1]$.

Тогда: если $a(1) > 0$, то

$$\left| P\left\{\frac{\xi(x_0, \alpha, t)}{v(\alpha, t)} < u\right\} - \Psi\left(q, \frac{1}{2} q_1(1), \frac{1}{2}\sqrt{c(1)}, \frac{1}{4}, \frac{u}{a(1)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant L_{13}\left(v(\alpha, t)^{-\frac{1}{4}} + |q_1(\alpha) - q_1(1)| + \left|\frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left. + |c(\alpha) - c(1)|^{\frac{1}{2}} + |c_1(\alpha) - c_1(1)|\right),$$

где $L_{13} = \text{const} < \infty$;

если $\sigma(1)^2 > 0$, то

$$\left|\int_0^\infty P\{\sqrt{v}\, N(0, \sigma(1)^2) < u\}\, d_v\Psi\left(q, \frac{1}{2} q_1(1), \frac{1}{2}\sqrt{c(1)}, \frac{1}{4}, v\right) -\right.$$

$$\left. - P\left\{\frac{\xi(x_0, \alpha, t) - c_1(\alpha)\, v(\alpha, t)}{\sqrt{v(\alpha, t)}} < u\right\}\right| \leqslant L_{14}\left(|q_1(\alpha) - q_1(1)| +\right.$$

$$+ v(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}} + \left|\frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}} + |c_1(\alpha) - c_1(1)| +$$

$$\left. + |c(\alpha) - c(1)|^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $L_{14} = \text{const} < \infty$;

если $\sigma(1)^2 > 0$ и

$$\lim_{\alpha \to 1} (1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha, t)})^{-1} = p \in [0, 1],$$

то

$$\left|\int_0^\infty P\{\sqrt{v}\, pN(0, \sigma(1)^2) + v(1 - p) < u\}\, d_v\psi\left(q, \frac{1}{2} \times\right.\right.$$

$$\left. \times q_1(1), \frac{1}{2}\sqrt{c(1)}, \frac{1}{4}, v\right) -$$

$$\left. - P\left\{\frac{\xi(x_0, \alpha, t)}{u(\alpha, t)} < u\right\}\right| \leqslant L_{15}\left(v(\alpha, t)^{-\frac{1}{6}} + |q_1(\alpha) - q_1(1)| +\right.$$

$$+ \left|\frac{1}{1 + r(\alpha)\sqrt{t}} - q\right|^{\frac{1}{2}} + \left|\frac{1}{1 + a(\alpha)\sqrt{v(\alpha, t)}} - p\right| + |c_1(\alpha) - c_1(1)| +$$

$$\left. + |c(\alpha) - c(1)|^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $L_{15} = \text{const} < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сильвестров Д. С. Предельные теоремы для полумарковских процессов и их применения. I.— Теория вероят. и матем. стат., 3, 1970.

2. Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. М., «Мир», 1964.

3. Феллер З. В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. I. М., «Мир», 1964.

4. D a r l i n g D. A. and K a c M. On occupation times for Markov processes.— Trans. Amer. Math. Soc., 84, 1957.

5. С и л ь в е с т р о в Д. С. Предельные теоремы для непрерывного блуждания на полупрямой, управляемого марковским процессом с двумя состояниями, в схеме серий. I.— Теория вероят. и матем. стат., I, 1970.

6. С и л ь в е с т р о в Д. С. Предельные теоремы для непрерывного блуждания на полупрямой, управляемого марковским процессом с двумя состояниями, в схеме серий. II.— Теория вероят. и матем. стат., 2, 1970.

7. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

8. Х а с ь м и н с к и й Р. З. О предельных распределениях аддитивных функционалов от диффузионных процессов.— Матем. заметки, 4, 5, 1968.

9. Х а с ь м и н с к и й Р. З. Распределение вероятностей для функционалов от траекторий случайного процесса диффузионного типа.— ДАН СССР, сер. А, 104, 1, 1955.

10. Э с к и н Л. Д. Об асимптотике решений задачи Коши.— Успехи матем. наук, 23, 2, 1968.

D. S. Silvestrov

LIMIT THEOREMS FOR SEMI-MARKOV PROCESSES AND ITS APPLICATIONS. II.

S u m m a r y

The possible limit distributions for additive functionals in scheme of series of random walks on the straight line are studied.

Поступила в редколлегию 6.VI. 1969.