А. В. СКОРОХОД, чл.-корр. АН УССР
Институт математики АН УССР

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕСМЕЩЕННЫХ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ ГАУССОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются семейства гауссовых распределений, определенных на σ-алгебре борелевских множеств $\mathfrak{B}$ сепарабельного гильбертового пространства X. При определенных условиях устанавливается единственность несмещенной оценки для среднего значения и корреляционного оператора. В том случае, если несмещенная оценка неединственна, доказывается существование несмещенной оценки с минимальной дисперсией и указывается ее вид. Отметим очевидную связь рассматриваемых задач с задачами оценок среднего значения и корреляционной функции гауссовского случайного процесса.

В дальнейшем будут использованы не только обычные, но и обобщенные меры на X. Это меры на некотором расширении X, полученном пополнением X в скалярном произведении (Bx, x), где B — некоторый положительный оператор (конструкция предложена Ю. Л. Далецким [1]).

Результаты об оценках параметров гауссовых мер будут выведены из следующей теоремы.

Теорема. Пусть ν_a, $a \in X$ — семейство мер на $\mathfrak{B}$ (возможно обобщенных), обладающих свойством: ν_a абсолютно непрерывно относительно $\nu_0 = \nu$ и

$$\frac{d\nu_a}{d\nu}(x) = \exp\{(a, x) + C(a)\},$$

где $C(a)$ — аналитическая функция a в некоторой окрестности точки $a = 0$.

Пусть, далее, числовая измеримая функция $f(x)$ удовлетворяет условию: для всякого $a \in X$ функция $|f(x)|^2 e^{(a,x)}$ интегрируема по мере ν и функция $f(x)$ является несмещенной оценкой функции $\varphi(a)$ на множестве $L \subset X$, т. е.

$$\varphi(a) = \int f(x)\nu_a(dx).$$

Тогда: 1) если $L = X$, то f однозначно определяется по φ; 2) если L — подпространство X и P — оператор проектирования на L, то функция

$$h(x)=\int f(Px+y)\,\nu^{Px}(dy),$$

где $\nu^{Px}(\cdot)$ — условное распределение $x-Px$ при фиксированном Px на вероятностном пространстве $\{X, \mathfrak{B}, \nu\}$ будет несмещенной оценкой $\varphi(a)$ с наименьшей дисперсией.

Доказательство. Для доказательства утверждения 1) достаточно показать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условию теоремы и соотношению

$$\int f(x)\,\nu_a(dx)=0,\quad a\in X,$$

почти всюду по мере ν равна нулю. Дифференцируя соотношение

$$\int f(x)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} t_k(x,\ a_k)\right\}\nu(dx)$$

по $t_1, \ldots, t_n$ и полагая $t_1=\cdots=t_n=0$, убеждаемся, что

$$\int f(x)\prod_{k=1}^{n}(x,\ a_k)\,\nu(dx)=0 \qquad (1)$$

для всех n и $a_1, \ldots, a_n$. Значит, $f(x)$ ортогонально любому полиному в пространстве $L_2[\nu]$ — функций, интегрируемых с квадратом по мере ν. Из леммы § 2 гл. 8 [2] вытекает, что система полиномов полна в $L_2[\nu]$, поскольку в условиях теоремы

$$\int e^{(a,x)}\,\nu(dx)=e^{-C(a)}$$

аналитическая в окрестности нуля функция. Поэтому из (1) вытекает, что $f=0$ почти всюду по мере ν.

Докажем теперь утверждение 2). Убедимся, что $h(x)$ также является несмещенной оценкой для $\varphi(a)$:

$$\int h(x)\,e^{(a,x)}\,\nu(dx)=\int h(Px)\,e^{(a,Px)}\,\nu(P^{-1}(dx))=$$
$$=\iint f(Px+y)\,\nu^{Px}(dy)\,e^{(a,Px)}\,\nu(P^{-1}(dx))=$$
$$=\int f(z)\,e^{(a,z)}\,\nu(dz)=e^{-C(a)}\int f(z)\,\nu_a(dz)=e^{-C(a)}\varphi(a).$$

Сравним дисперсии оценок

$$\int [f(x)-\varphi(a)]^2\,\nu_a(dx)-\int [h(x)-\varphi(a)]^2\,\nu_a(dx)=$$
$$=e^{-C(a)}\int [f^2(x)-h^2(x)]\,e^{(a,x)}\,\nu(dx)=$$
$$=e^{-C(a)}\int [f(x)-h(x)]^2\,e^{(a,x)}\,\nu(dx)\geqslant 0,$$

так как

$$\int [f(x)-h(x)]\,h(x)\,e^{(a,x)}\,\nu(dx)=$$
$$=\iint [f(Px+y)-h(Px)]\,h(Px)\,e^{(a,Px)}\,\nu^{Px}(dy)\,\nu(P^{-1}(dx))=0.$$

Таким образом, для каждой насмещенной оценки $f(x)$ функции $\varphi(a)$ можно указать несмещенную оценку вида $h(Px)$, также несмещенную с дисперсией, не превышающей дисперсию $f(x)$. Поскольку

$$\varphi(a) = \int\limits_L h(x) e^{(a,x)} \nu(P^{-1}(dx))$$

и меры $\nu_a(P^{-1}(dx))$ и функция $h(x)$ на L удовлетворяют условиям теоремы, если заменить X на L, то в силу утверждения 1) оценка $h(x)$ единственна и, следовательно, минимальна. Теорема доказана.

Замечание. Совершенно необязательно, чтобы L являлось подпространством, достаточно, чтобы оно было плотно в подпространстве в некоторой окрестности нуля. Меры ν_a могут быть определены лишь для a из L. Можно также рассматривать несмещенные оценки функций $\varphi(a)$ со значениями из некоторого банахова пространства Y, при этом $f(x)$ также принимает значения из Y и для любого линейного функционала l на Y выполняется соотношение

$$l(\varphi(a)) = \int l(f(x))\, \nu_a(dx),\ a \in L.$$

Оценка будет иметь «наименьшую дисперсию», если для всякого линейного функционала l на Y дисперсия $l(h(x))$ является минимальной. Утверждения теоремы остаются справедливыми, если $l(f(x))$ удовлетворяет условию теоремы для всякого линейного функционала l на Y.

Применим доказанную теорему к семейству гауссовских распределений μ_a с корреляционным оператором B и средним значением a; оператор B будет один и тот же для всего семейства, а среднее значение пусть меняется во множестве L. Будем предполагать, что $L \subset B^{\frac{1}{2}} X$. Тогда меры μ_a абсолютно непрерывны относительно меры $\mu = \mu_0$ и

$$\frac{d\mu_a}{d\mu}(x) = \exp\left\{(B^{-\frac{1}{2}} a,\ B^{-\frac{1}{2}} x) - \frac{1}{2}(B^{-\frac{1}{2}} a,\ B^{-\frac{1}{2}} a)\right\}$$

(см. [2], гл. 7, § 4). Чтобы свести данный случай к теореме, рассмотрим отображение $y = B^{-\frac{1}{2}} x$, переводящее семейство мер μ_a в семейство обобщенных гауссовых мер ν_b, $b = B^{-\frac{1}{2}} a$, при этом

$$\frac{d\nu_b}{d\nu}(x) = \exp\left\{(b, x) - \frac{1}{2}(b, b)\right\}.$$

Учитывая, что функция $e^{\varepsilon(x,x)}$ интегрируема по мере μ_a при всяком a, если ε достаточно мало, рассмотрим класс F функций $f(x)$, измеримых и удовлетворяющих соотношению

$$\lim_{|x| \to \infty} |f(x)|\, e^{-\varepsilon(x,x)} = 0$$

для всех $\varepsilon > 0$. Тогда, если $B^{-\frac{1}{2}} L$ плотно в X (или некоторой сфере), то каждая функция $\varphi(a)$ имеет не более одной несмещенной оценки из F. В частности, в этом случае x является единственной несмещенной оценкой для a, удовлетворяющей условию $(f(x), z) \in F$ для всех $z \in X$. Пусть L — линейное многообразие, L' — замыкание $B^{-\frac{1}{2}} L$, P — оператор проектирования на L'. Тогда несмещенная оценка a с наименьшей дисперсией (рассматриваемого класса) будет

$$f(x) = (B^{\frac{1}{2}} P B^{-\frac{1}{2}}) x.$$

Действительно, несмещенной оценкой для $B^{\frac{1}{2}} b$ семейства ν_b будет $B^{\frac{1}{2}} y$, а оценкой с наименьшей дисперсией является величина

$$B^{\frac{1}{2}} Py + \int B^{\frac{1}{2}} (y - Py) \nu^{Py} (d(y - Py)) = B^{\frac{1}{2}} Py =$$
$$= (B^{\frac{1}{2}} P B^{-\frac{1}{2}}) x.$$

Функция $f(x)$ на вероятностном пространстве $\{X, \mathfrak{B}, \mu_a\}$ является гауссовой величиной со средним $a \in L$ и корреляционным оператором

$$B' = B^{\frac{1}{2}} P B^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим теперь семейство гауссовых распределений $\mu(U, dx)$ с корреляционным оператором

$$B_U = B^{\frac{1}{2}} (I + U) B^{\frac{1}{2}},$$

где B — ядерный оператор, I — единичный, а U принадлежит множеству симметричных операторов Гильберта — Шмидта, для которых оператор $(I + U)$ положителен.

Используя результаты § 4 гл. 7 [2], можно убедиться, что

$$\frac{d\mu_U}{d\mu}(x) = \exp\{(B^{-\frac{1}{2}} V_U B^{-\frac{1}{2}} x, x) + C(U)\},$$

где $V_U = \frac{1}{2} U (I + U)^{-1}$, $C(U)$ — аналитическая функция U при достаточно малом $\mathrm{Sp}\, U^2$ ($\mathrm{Sp}\, A$ — след оператора A), $(B^{-\frac{1}{2}} V_U B^{-\frac{1}{2}} x, x)$ — центрированный квадратический функционал, построенный по оператору $B^{-\frac{1}{2}} V_U B^{-\frac{1}{2}}$ (см. § 6 гл. 5 [2]). Чтобы можно было использовать результаты теоремы, рассмотрим гильбертово пространство H_2 всех симметричных операторов Гильберта — Шмидта со скалярным произведением

$$(A, B) = \mathrm{Sp}\, AB.$$

Пусть Y_x — элемент H_2, определенный соотношением $Y_x z = (z, x)\, x$, а ν_U — мера, в которую переходит мера μ_U при отображении $x \to Y_x$. Будем рассматривать лишь U с конечным следом (они всюду плотны в H_2). Тогда оператор $W_U = B^{-\frac{1}{2}} V_U B^{-\frac{1}{2}}$ таков, что

$$(B^{-\frac{1}{2}} V_U B^{-\frac{1}{2}} x, x) = (W_U, Y_x) + d(U),$$

где $d(U)$ — аналитическая функция U.

Снова применим теорему. Так как Y_x является несмещенной оценкой для B_U, то в том случае, когда $\{W_U\}$ плотно в некоторой сфере H_2, это единственная оценка, если же W_U меняется в некотором подпространстве L и плотно в некоторой сфере этого подпространства, то оператор $P(Y_x)$, где P — оператор проектирования в H_2 на L, будет несмещенной оценкой B_U с наименьшей дисперсией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.— Успехи матем. наук, **22**, вып. 4 (136), 1967.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1, М., «Наука», 1970.

A. V. Skorokhod

A NOTE ON UNBIASED ESTIMATIONS OF PARAMETERS OF GAUSSIAN DISTRIBUTIONS IN HILBERT SPACE

Summary

The families of Gaussian distributions on σ-algebra Borelian sets of Hilbert space is considered. Under some conditions the uniqueness of unbiased estimations of mean and correlation operator of distribution or existence of unbiased estimations with minimal dispersion is established.

Поступила в редколлегию 10.X. 1969.