Н. Н. ФРОЛОВ, асс.
Воронежский университет

К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть H_γ $(-\infty < \gamma < +\infty)$ — гильбертова шкала пространств [1], порожденная неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором T, действующим в гильбертовом сепарабельном пространстве H_0. Предполагается, что T^{-1} — оператор Гильберта — Шмидта, причем $\| T^{-1} \| \leqslant 1$. Через B_γ будем обозначать σ-алгебру борелевских множеств в H_γ, порожденную (борелевскими) цилиндрическими множествами в H_γ.

Рассмотрим на дважды (сильно) дференцируемых функциях $U(x)$, заданных в H_γ и принимающих значение из R_1, эллиптический оператор [1]

$$LU = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A^* U'' A + (U', a). \tag{1}$$

Здесь при каждом $x \in H_\gamma$, $a(x) \in H_\gamma$, $A(x) \in \{H_{-1} \to H_\gamma\}$.

В открытой области $G \in B_\gamma$ с границей $\Gamma \in B_\gamma$ поставим задачу Дирихле:

$$\begin{gathered} LU(x) = 0, \ x \in G; \\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in G}} U(x) = \varphi(x_0), \ x_0 \in \Gamma, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — заданная непрерывная функция на Γ.

В заметке строится обобщенное решение этой задачи с применением теории случайных процессов. Всюду использованы обозначения из работы [1].

§ 1. Марковский процесс в гильбертовой шкале

1. Пусть фиксировано некоторое основное вероятное пространство (Ω, N, P) с σ-алгеброй N. Через $w(t) = w(t, \omega)$, $0 \leqslant t < \infty$, $\omega \in \Omega$ будем обозначать винеровский случайный процесс в H_{-1} [1], а через $N_t \subset N$ σ-алгебру, порожденную величинами $w(s)$, $s \leqslant t$, $w(0) = 0$.

Рассмотрим стохастическое интегральное уравнение

$$\xi_t = x + \int_0^t a(\xi_s)\,ds + \int_0^t A(\xi_s)\,dw(s). \tag{3}$$

Предполагается, что коэффициенты $a(x)$, $A(x)$ определены во всем пространстве H_γ и при каждом $x \in H_\gamma$ $a(x) \in H_\gamma$, $A(x) \in \{H_{-1} \to H_\gamma\}$, причем при $x, y \in H_\gamma$

$$\sigma_2(T^\gamma A(x) - T^\gamma A(y)) + \|a(x) - a(y)\|_\gamma \leqslant c\|x - y\|_\gamma, \tag{4}$$

где $\sigma_2(B)$ — норма Гильберта — Шмидта оператора B в H_0.

В работе [1] показано, что при условии (4) для каждого $x \in H_\gamma$ существует единственное, с точностью до стохастической эквивалентности, решение $\xi_t^x(\omega)$ уравнения (3), непрерывное с вероятностью 1, такое, что $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} M\|\xi_s^x(\omega)\|_\gamma^2 < \infty$ при каждых $x \in H_\gamma$, $t > 0$.

При надлежащем выборе множества элементарных событий Ω процесса $w(t)$ можно добиться, чтобы совокупность (ξ_t^x, N_t, P) образовывала марковское семейство ([2] теорема 11.4). По этому семейству обычным образом строится марковский случайный процесс (ξ_t, N_t', P_x) с пространством элементарных событий $\Omega' = \Omega \times H_\gamma$.

2. Сформулируем некоторые утверждения, которые легко могут быть получены из результатов [1, 4].

Лемма 1. Пусть ξ_t^x — решение уравнения (3) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (4). Тогда для любого $t > 0$

$$M \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|\xi_s^x - \xi_s^y\|_\gamma^2 \leqslant \|x - y\|_\gamma c(t)\, e^{\beta(t)}, \tag{5}$$

где $\beta = \mathrm{const}$, а $c(t)$ — растет по t не быстрее чем линейно.

Теорема 1. Процесс ξ_t, построенный по марковскому семейству $\xi_t^x(\omega)$, удовлетворяющему уравнению (3), является феллеровским.

Известно [2], что из феллеровости и непрерывности следует строгая марковость процесса ξ_t.

Пусть $\|A(x)\|_{(-1,\gamma)}$ — непрерывна и U — характеристический оператор процесса ξ_t [2]. Можно показать, что сужение U на дважды непрерывно дифференцируемых функциях совпадает с L, т. е. процесс ξ_t — диффузионный.

Лемма 2. Пусть при любом $t > 0$ выполнены соотношения

$$M \int_0^t \|A^*(\xi_u^x)\,\psi\|^2\,du < \infty, \quad \int_0^\infty \|A^*(\xi_u^x)\,\psi\|^2\,du = \infty \pmod P.$$

Если

$$\tau_t = \inf\left\{s : \int_0^s \|A^*(\xi_u^x)\,\psi\|^2\,du \geqslant t\right\},$$

то $\tilde{w}(t) = \int\limits_0^{\tau_t} (A^*(\xi_u^x)\psi, dw(u))$ $(\psi \in H_{-\gamma})$ является винеровским процессом в R_1.

Замечание. В предположениях леммы 2 справедливо равенство

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \int\limits_0^s (A^*(\xi_u^x)\psi, dw(u)) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant \zeta} \tilde{w}(s),$$

$$\zeta = \int\limits_0^t \| A^*(\xi_u^x)\psi \|^2 du.$$

3. Пусть $G \in B_\gamma$ — открытая область с границей $\Gamma \in B_\gamma$. Обозначим через $\tau = \tau(G)$ момент первого выхода процесса ξ_t на Γ:

$$\tau = \inf\{t : \xi_t \overline{\in} G\}.$$

Из топологических свойств H_γ, непрерывности ξ_t и леммы 3.10 [7] следует, что τ — марковский момент относительно $\{N_t\}$.

Единственность решения задачи Дирихле (2) тесно связана с вопросом о выходе траекторий соответствующего процесса на границу Γ области G.

Некоторые достаточные условия для того, чтобы траектории процесса ξ_t, исходя из любой точки $x \in G$, с вероятностью 1 выходили на Γ, дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть процесс ξ_t управляется уравнением (3) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (4). Пусть G — ограниченная область в H_γ и при некоторых N, $\mu > 0$ существует вектор $\psi \in H_{-\gamma}$, при котором выполнено одно из условий:

$$а)\ |(a(x), \psi)| + \| A^*(x)\psi \| < N,\ \| A^*(x)\psi \| > 2\mu;$$

$$б)\ (a(x), \psi) \geqslant \mu,\ \text{или}\ (a(x), \psi) \leqslant -\mu$$

для всех $x \in H_\gamma$.

Для случая неограниченной области G, и лежащей в полупространстве $(x, \psi) > \alpha$, предположим, что одновременно выполнены два неравенства:

$$в)\ \| A^*(x)\psi \| < N,\ (a(x), \psi) \leqslant -\mu,\ (x \in H_\gamma).$$

Тогда для любого ограниченного множества $K \subseteq G$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_0 > 0$, что для всех $x \in K$

$$P_x\{\tau(G) < t_0\} > 1 - \varepsilon. \tag{6}$$

В случае а) дока ательство может быть проведено по схеме, предложенной в работе [6] для конечномерных пространств.

Лемма 3. Пусть $\chi_0(t) = 0$ при $t \neq 0$ и $\chi_0(0) = 1$. Если выполнено условие а) теоремы 2, то

$$\int\limits_s^t \chi_0[(\xi(s, u), \psi)]\, du = 0,$$

где

$$\xi(s, t) = \int_s^t a(\xi_u^x)\, du + \int_s^t A(\xi_u^x)\, dw(u).$$

Доказательство. Пусть $a_n(t)$ — непрерывная функция в R_1, равная 1 при $|t| < \frac{1}{n}$, нулю при $|t| > \frac{2}{n}$ и линейная на остальных участках. Положим $b_n(t) = \int_0^t (t - s)\, a_n(s)\, ds$.

Применим к функции $f_n(x) = b_n[(x, \psi)]$ и процессу $\xi(s, t)$ формулу Ито, распространенную в [1] на случай гильбертова пространства:

$$\int_s^t \chi_0[(\xi(s, u), \psi)]\, du \leqslant \frac{1}{2\mu} \int_s^t a_n[(\xi(s, u), \psi)]\, \| A^*(\xi_u^x)\psi\|^2\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu} b_n[(\xi(s, u)\psi)] - \frac{1}{\mu} \int_s^t b_n'[(\xi(s, u), \psi)]\, (a(\xi_u^x), \psi)\, du -$$

$$- \frac{1}{\mu} \int_s^t b_n'[(\xi(s, u), \psi)]\, (A^*(\xi_u^x)\psi, dw)u)).$$

Полагая $n \to \infty$, получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2. Пусть G ограничена. Возьмем $r > 0$ таким, чтобы область $U = \{x \in H_\gamma : |(x, \psi)| < r\}$ содержала замыкание G; и обозначим через $\tau_x = \tau_x(U)$ момент первого выхода процесса ξ_t^x из U $(x \in G)$. Очевидно,

$$P\{\tau_x > nt\} \leqslant P[\bigcap_{i=0}^{n-1} \{|\gamma(it, (i+1)t)| < 2r\}],$$

где

$$\gamma(s, t) = \int_s^t (a(\xi_u^x)\psi)\, du + \int_s^t (A^*(\xi_u^x), \psi, \ dw(u).$$

Следовательно, в случае а) достаточно показать, что при всех s и некотором $t > 0$ с вероятностью 1

$$P\{|\gamma(s, s+t)| < 2r\, |N_s\} \leqslant p < 1.$$

Применив к процессу

$$\varphi(s, t) = \int_s^t A(\xi_u^x)\ \ dw(u)$$

и к функции $f(x) = |(x, \psi)|^{2n}$ формулу Ито [2], получим

$$M\left[\left|\int_s^t (A^*(\xi_u^x)\psi, dw(u)\right|^{2n} \Big| N_s\right] =$$

$$= n(2n-1) \int_s^t M[|(\varphi(s, u), \ \psi)|^{2n-2} \| A^*(\xi_u^x)\psi\|^2\, |N_s]\, du \leqslant$$

$$\leqslant N^{2n} t^n (2n-1)!!$$

Используя эту оценку, легко убедиться, что при некотором $K = K(N, \alpha, t)$ с вероятностью 1 $M[\eta(s, s+t) | N_s] < K, D[\eta(s, s+t) | N_s] < K$, где при $\alpha > 0$ положено

$$\eta(s, s+t) = \exp[\alpha |\gamma(s, s+t)|].$$

Применим известное неравенство

$$P\{\xi - M\xi < C\} \leqslant \frac{D\xi}{D\xi + C^2}, \ C < 0$$

к случайной величине η, тогда

$$P\{|\gamma(s, s+t)| < 2r | N_s\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D[\eta(s, s+t) | N_s]}{D[\eta(s, s+t) | N_s] + (e^{2\alpha r} - M[\eta(s, s+t) | N_s])^2},$$

если только с вероятностью 1 $M[\eta(s, s+t) | N_s] > e^{2\alpha r}$. Покажем, что последнее достигается выбором достаточно большого α. Пусть $f_n(t)$ — последовательность выпуклых функций такая, что $f_n(t) = |t|$ при $|t| > \frac{1}{n}$; положим

$$\eta_n(s, t) = \exp[\alpha f_n(\gamma(s, t))].$$

Применим к функции $\exp[\alpha f_n((x, \psi))]$ и процессу $\xi(s, t)$ формулу Ито, получим:

$$M[\eta_n(s, t) | N_s] - 1 = \frac{\alpha^2}{2} \int_s^t M[(f_n'(\gamma(s, u)))^2 \eta_n(s,u) \| A^*(\xi_u^x) \psi\|^2 | N_s] du +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_s^t M[f_n''(\gamma(s, u)) \eta_n(s, u) \| A^*(\xi_u^x) \psi\|^2 | N_s] du +$$

$$+ \alpha \int_s^t M[f_n'(\gamma(s,u)) \eta_n(s, u) (a(\xi_u^x), \psi) | N_s] du.$$

Используя вышеприведенную лемму и условие а) при $n \to \infty$, из последнего неравенства получаем:

$$M[\eta(s, t) | N_s] \geqslant (\mu\alpha^2 - \alpha N) \int_s^t M[\eta(s, u) | N_s] du.$$

Откуда при $\alpha > \frac{N}{\mu} + \frac{2r}{\mu t} + 1$

$$M[\eta(s, s+t) | N_s] \geqslant e^{\alpha(\alpha\mu - N)t} \geqslant e^{2\alpha r + \mu}.$$

Пусть теперь выполнено условие б), например, $(a(x), \psi) \geqslant \mu$ (случай $(a(x), \psi) \leqslant -\mu$ рассматривается аналогично). Тогда из (3) для всех $x \in G$

$$M(\xi_t^x, \psi) \geqslant (x, \psi) + \mu t \geqslant -r + \mu t.$$

Из этого неравенства следует существование таких $t' > 0$, $\varepsilon > 0$, что

$$P\{(\xi_t^x, \psi) > r,\ \tau_x < t'\} > \varepsilon.$$

Откуда уже нетрудно получить (6) (см. [3]).

В случае неограниченной области из (3) имеем

$$(\xi_t^x, \psi) \leqslant (x, \psi) - \mu t + \int_0^t (A^*(\xi_u^x)\psi,\ dw(u)).$$

Если $M = \sup_{x \in K} (x, \psi)$, то последнее соотношение показывает, что для всех $x \in K$

$$P\{\tau_x < t\} \leqslant P\{\sup_{s \leqslant t} \int_0^s (A^x(\xi_u^x)\psi, dw(u)) \geqslant \mu t + \alpha - \mu\}.$$

Используя теперь известную формулу для винеровского процесса $\tilde{w}(s)$ в R_1 [4]:

$$P\{\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \tilde{w}(s) > a\} = 2P\{\tilde{w}(t) > a\},\ a > 0$$

и замечание к лемме 2, окончательно находим:

$$P\{\tau_x < t\} \leqslant P\{\sup_{s \leqslant \xi} \tilde{w}(s) \geqslant \mu t + \alpha - \mu\} \leqslant$$
$$\leqslant P\{\sup_{s \leqslant N^2 t} \tilde{w}(s) \geqslant \mu t + \alpha - \mu\} \leqslant C_1 e^{-\frac{\mu^2 t}{2N^2}}. \qquad (7)$$

Доказательство закончено.

Замечание 1. В условиях теоремы 2 справедливо неравенство

$$\sup_{x \in K} P_x\{\tau(G) > t\} \leqslant \mu e^{-\alpha t},\ \alpha,\ \mu > 0. \qquad (8)$$

Для случая ограниченной области неравенство (8) доказано в работе [8], для неограниченной — следует из (7).

Замечание 2. Можно показать, что изменение коэффициентов уравнения (3) вне области G с сохранением условия (4) не влияет на величину $\tau(G)$.

§ 2. Существование и единственность обобщенного решения задачи (2)

1. Пусть ξ_t — процесс, управляемый уравнением (3), $G \in B_\gamma$ — открытая область в H_γ, τ — момент первого выхода ξ_t из G. Всюду в дальнейшем будем предполагать выполненным утверждение

теоремы 2. Обозначим через $\bar{\xi}_t = \xi_{\min(t,\tau)}$ процесс, полученный из ξ_t путем остановки последнего на Г. Процесс $\bar{\xi}_t$ является также строго марковским ([2], теорема 10.2).

Пусть $C^2(G)$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций в области G, ограниченных в ней вместе с производными; A — инфинитезимальный оператор процесса $\bar{\xi}_t$.

Теорема 3. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условию (4) в H_γ, ограничены в G:

$$\| a(x) \|_\gamma + \sigma_2 (T^\gamma A(x)) \leqslant C_2 < \infty, \quad x \in \bar{G} = G \cup \Gamma$$

и $\| A(x) \|_{(-1,\gamma)}$ — непрерывна в G.

Всякая функция $U \in C^2(G)$, удовлетворяющая в G уравнению $LU = 0$, принадлежит области определения $D(A)$ оператора A, причем $AU = LU = 0$. Всякая функция $U \in D(A) \cap C^2(G)$, удовлетворяющая соотношению $Au = 0$, удовлетворяет уравнению $LU = 0$ в G.

Доказательство. Пусть τ_x — момент первого выхода процесса ξ_t^x из G, а $\bar{\xi}_t^x = \xi^x_{\min(t,\tau_x)}$. Так как ξ_t удовлетворяет уравнению (3), то $\bar{\xi}_t^x$ можно представить в виде

$$\bar{\xi}_t^x = x + \int_0^t \mathrm{X}_{\tau_x > s} a(\xi_s^x)\, ds + \int_0^t \mathrm{X}_{\tau_x > s} A(\xi_s^x)\, dw(s),$$

где X_B — характеристическая функция множества $B \in N$.

Используя формулу Ито [1], получаем для любой функции $U \in C^2(G)$:

$$U(\bar{\xi}_t^x) = U(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Sp} A^*(\xi_s^x)\, U''(\bar{\xi}_s^x)\, A(\xi_s^x)\, \mathrm{X}_{\tau_x > s} ds +$$

$$+ \int_0^t (a(\xi_s^x),\; U'(\bar{\xi}_s^x))\, \mathrm{X}_{\tau_x > s} ds + \int_0^t \mathrm{X}_{\tau_x > s} (A^*(\xi_s^x)\, U'(\bar{\xi}_s^x),\; dw(s)). \tag{9}$$

Заметим, что в этой формуле ξ_s^x можно заменить на $\bar{\xi}_s^x$. Так как τ_x — марковский момент относительно $\{N_t\}$, то

$$M \int_0^t \mathrm{X}_{\tau_x > s} (A^*(\xi_s^x)\, U'(\bar{\xi}_s^x),\; dw(s)) = 0.$$

Следовательно, для $U(x) \in C^2(G)$

$$MU(\bar{\xi}_t^x) = U(x) + M \int_0^t \mathrm{X}_{\tau_x > s} f(\bar{\xi}_s^x)\, ds, \tag{10}$$

где $f(x) = LU(x)$.

Если $LU(x) = 0$, то из (10) следует, что $MU(\bar{\xi}_t^x) = U(x)$ при всех $t > 0$, т. е. $AU = 0$. Пусть теперь $AU = 0$; тогда из (10) вытекает, что для всех $x \in G$, $t \geq 0$

$$M \int_0^t X_{\tau_x > s} f(\bar{\xi}_s^x)\, dx = 0.$$

Доказательство будет закончено, если мы покажем, что для любого $x \in G$.

$$\lim_{t \downarrow 0} M \frac{1}{t} \int_0^t X_{\tau_x > s} f(\bar{\xi}_s^x)\, ds = f(x). \tag{11}$$

Пусть $x \in G$ фиксировано, $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем δ-окрестность U точки x такую, чтобы $U \subset G$ и для $y \in U$ $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Тогда при $s < \tau_x(U)$ $|f(\bar{\xi}_s^x) - f(x)| < \varepsilon$, следовательно,

$$M \int_0^t X_{\tau_x > s} X_{\tau_x(U) > s} |f(\bar{\xi}_s^x) - f(x)|\, ds < \varepsilon t. \tag{12}$$

Используя лемму 1, получаем при $s \to 0$

$$P\{\tau_x(U) \leq s\} = P\{\sup_{0 \leq t \leq s} \|\xi_t^x - x\|_\gamma > \delta\} \leq$$

$$\leq \frac{4}{\delta^2} M \left\| \int_0^s A(\xi_u^x)\, dw(u) \right\|_\gamma^2 + \frac{2s}{\delta} M \int_0^s \|a(\xi_u^x)\|_\gamma^2 du = 0(s).$$

В силу ограниченности $f(x)$ отсюда следует

$$M \int_0^t X_{\tau_x > s} X_{\tau_x(U) \leq s} |f(\xi_s^x) - f(x)|\, ds = o(t),$$

$$M \int_0^t X_{\tau_x \leq s} ds \leq M \int_0^t X_{\tau_x(U) \leq s} ds = o(t). \tag{13}$$

Из (12), (13) следует (11). Теорема доказана.

Замечание 1. Ограниченность коэффициентов оператора L и непрерывность функции $\|A(x)\|_{(-1,\gamma)}$ в области G можно заменить условием $LU(x) \in C(G)$.

Замечание 2. Пусть $V(x) \in C(G)$, причем во всякой внутренней подобласти $G' \subset G$ ($G' \in B_\gamma$) функции $LV(x)$, $\|A^*(x)V'(x)\|$ ограничены. Если $LV(x) \leq 0$ в G, $V(x)|_\Gamma \geq 0$, то всюду в $\bar{G}$ $V \geq 0$.

Теорема 3 дает основания называть решения уравнения $AU = 0$ обобщенными решениями уравнения $LU = 0$ в области G.

Рассмотрим задачу

$$AU = 0; \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in G}} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in \Gamma. \tag{14}$$

Как и в работе [3], можно доказать следующие утверждения.

Пусть $\varphi(x)$ — B_γ измеримая и ограниченная функция на Γ. Тогда функция $U(x) = \int_{\Omega'} \varphi(\xi_{\tau(G)}(\omega')) P_x(d\omega')$ удовлетворяет уравнению $AU = 0$. Для любой регулярной точки $x_0 \in \Gamma$ (напомним, что точка $x_0 \in \Gamma$ называется регулярной, если для любой ее окрестности $U \in B_\gamma$ при $x \to x_0$ $P_x\{\xi_{\tau(G)} \in U\} \to 1$) выполняется граничное условие: $U(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0$ $(x \in G)$. Для единственности решения задачи (14) необходимо и достаточно условие $P_x\{\tau(G) < \infty\} = 1$ для всех $x \in G$.

Теорема 2 дает достаточное условие для выполнения этого равенства.

2. Остановимся теперь на вопросе о регулярности граничных точек области G.

Теорема 4. Пусть существуют окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 \in \Gamma$ и B_γ-измеримая функция (барьер) $V(x)$, определенная в $U(x_0)$, такие, что:

а) для любого $\varepsilon > 0$ $\inf\limits_{x \in U_\varepsilon} V(x) > 0$, где положено

$$U_\varepsilon = \overline{G}' \cap \{x \in H_\gamma : \|x - x_0\|_\gamma > \varepsilon\}, \quad G' = U(x_0) \cap G;$$

б) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in G}} V(x) = 0;$

в) для любых $U \in G'$, $x \in U$ $M_x V(\xi_{\tau(u)}) \leqslant V(x)$, где $\tau(u)$ — момент первого выхода ξ_t из $U \in B_\gamma$. Тогда точка $x_0 \in \Gamma$ — регулярна.

Доказательство. Пусть $U(x) = M_x f(\xi_\tau)$, где $\tau = \tau(G)$, а $f(x) = \|x - x_0\|_\gamma$ в шаре $\|x - x_0\| < R$ и $f(x) = R$ вне этого шара $(R > 0)$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ задано так, что $\varepsilon < R$ и ε-окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ точки $x_0 \in \Gamma$ содержится в $U(x_0)$. На множестве $\overline{G \cap U(x_0, \varepsilon/2)}$ рассмотрим функцию

$$V_1(x) = N_\varepsilon V(x) \pm U(x) + \varepsilon, \quad N_\varepsilon = \mathrm{const},$$

где N_ε выбрано так, чтобы $N_\varepsilon V(x) > |U(x)|$ для x, принадлежащих той части границы области $G \cap U(x_0, \varepsilon/2) = G_\varepsilon'$, которая лежит внутри G. Это сделать можно в силу условия а). Согласно определению $U(x)$, для $x \in G \cap U(x_0, \varepsilon/2)$ и $\tau' = \tau(G_\varepsilon')$ $M_x U(\xi_{\tau'}) = U(x)$. Поэтому из в) следует, что для $x \in \overline{G \cap U(x_0, \varepsilon/2)}$ $M_x V_1(\xi_{\tau'}) \leqslant V_1$. А поскольку на той части Γ, которая лежит внутри $U(x_0, \varepsilon/2)$, имеем $U(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то $V_1(x) \geqslant 0$ на всей границе области $G \cap U(x_0, \varepsilon/2)$. Следовательно, $V_1(x) \geqslant 0$ всюду в $G \cap U(x_0, \varepsilon/2)$, и в этой области

$$|U(x)| \leqslant N_\varepsilon V(x) + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, получаем в силу произвольности ε, что $u(x) \to 0$. Очевидно,

$$U(x) = \int_{H_\gamma} f(y) P_x\{\xi_\tau \in dy\} \geqslant \varepsilon P_x\{\xi_\tau \overline{\in} U(x_0, \varepsilon)\}.$$

Учитывая непрерывность $U(x)$ в точке x_0, при $x \to x_0$ отсюда получаем утверждение.

Пусть область G определяется формулой

$$G = \{x \in H_\gamma : S(x) > 0\},$$

где $S(x)$ — достаточно гладкая функция на H_γ.

Границей Γ области G естественно назвать множество

$$\Gamma = \{x \in H_\gamma : s(x) = 0\}.$$

Для $0 < \lambda < \varepsilon$ введем в рассмотрение выражение

$$W_{x_0}(\lambda) = Z_{x_0}(\lambda) \int\limits_\lambda^\varepsilon Z_{x_0}^{-1}(\lambda)\, \Phi(\lambda)\, d\lambda.$$

Здесь

$$Z_{x_0}(\lambda) = \exp\left\{\int\limits_\lambda^\varepsilon F(\lambda)\, d\lambda\right\},$$

$$\Phi(\lambda) = \left[\inf_{x \in U_\lambda}\left(\frac{\| A^*(x)\, S'(x)\|^2}{\sigma_2^2(T^\gamma A(x)) + 2\,|(a(x),\ x - x_0)_\gamma|}\right)\right]^{-1},$$

$$F(\lambda) = \sup_{x \in U_\lambda}\left(\frac{\operatorname{Sp} A^*(x)\, S''(x)\, A(x) + 2\,(S'(x),\ a(x))}{\| A^*(x)\, S'(x)\|^2}\right),$$

где

$$U_\lambda = \{x \in H_\gamma : S(x) = \lambda\} \cap U(x_0, \varepsilon),$$

а $U(x_0, \varepsilon)$ — ε-окрестность точки $x_0 \in \Gamma$.

Теорема 5. Пусть в некоторой ε-окрестности точки $x_0 \in \Gamma$ $S(x)$ и коэффициенты оператора L таковы, что функции $\Phi(\lambda)$, $F(\lambda)$ непрерывны в области $0 < \lambda < \varepsilon$. Если $W_{x_0}(\lambda)$ интегрируема в нуле, то точка $x_0 \in \Gamma$ регулярна.

Доказательство следует из теоремы 4 путем проверки, что функция

$$V(x) = \int\limits_0^{s(x)} W_{x_0}(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2}\| x - x_0\|^2,\quad x \in \overline{G \cap U(x_0, \varepsilon)}$$

является барьером в точке $x_0 \in \Gamma$.

Заметим, что подобная теорема в конечномерном случае была получена Р. З. Хасьминским [5] для построения барьеров вырождающихся эллиптических уравнений.

В невырождающемся случае, т. е., когда $\| A^*(x)\, y\| \geqslant m \| y\|_{-\gamma-1}$ при некотором $m > 0$ и для всех $x \in \overline{G}$, $y \in H_{-\gamma}$, можно привести более естественные условия регулярности граничных точек. Например, пусть существуют окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 \in \Gamma$ и замкнутый шар $K(z, R)$ такие, что $K(z, R) \cap \overline{G}$ состоит из единственной точки $x_0 \in \Gamma$, причем при любом $\varepsilon > 0$ $\inf\limits_{x \in U_\varepsilon} \| z - x\|_\gamma > R$, где

$$U_\varepsilon = U(x_0) \cap G \cap \{x \in H_\gamma : \| x - x_0 \|_\gamma > \varepsilon\}.$$

Тогда точка $x_0 \in \Gamma$ регулярна. В этом случае легко проверить, что функция $V(x) = R^{-p} - \| x - z \|_\gamma^{-p}$ при достаточно большом $p > 0$ является барьером в точке x_0.

Заметим, что условие невырожденности достаточно требовать лишь в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Gamma$.

В заключение хочу выразить благодарность С. Г. Крейну, Ю. Л. Далецкому и Е. Б. Дынкину за оказанное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.— УМН, XXII, 4 (136), 1967.
2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. Физматгиз, М., 1963.
3. Фрейдлин М. И. О стохастических уравнениях Ито и вырождающихся эллиптических уравнениях.— Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 5, 1962.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968.
5. Хасьминский Р. З. Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области.— Теор. вер. и ее прим., 3, 4, 1958.
6. Крылов Н. В. О квазидиффузионных процессах.— Теор. вер. и ее прим., 11, 3, 1966.
7. Дынкин Е. Б. Основания марковских процессов. Москва, 1959.
8. Фрейдлих М. И. О гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений.— Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 6, 1968.

N. N. Frolov

TO THE DIRICHLET PROBLEM ON HILBERT SPACE

Summary

The existence and uniqueness of the generalized solution Dirichlet problem for the equation

$$\frac{1}{2}\operatorname{Sp} A^*(x)\, u''(x)\, A(x) + (u'(x), a(x)) = f(x)$$

on the open set of the separable Hilbert space in established. The proof is based on the construction of Markov process on Hilbert space. The question of regularity of boundary points is investigated.

Поступила в редколлегию 4.VII.1969.