А. Д. ШАТАШВИЛИ, ст. научн. сотр.
Донецкий ВЦ АН УССР

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ И ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. II*)

§ 4. Формула плотности мер, соответствующих решениям стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим в m-мерном евклидовом пространстве E два дифференциальных уравнения следующего вида:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + L(t)\,x_1(t) + f(t, x_1(t)) = \xi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{87}$$

$$x_1(0) = \xi(0) = 0$$

и

$$\frac{dx_0(t)}{dt} + L(t)\,x_0(t) = \xi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{88}$$

$$x_0(0) = \xi(0) = 0,$$

где $L(t)$ является некоторым линейным оператором, непрерывно зависящим от t, действующим в E, а $\xi(t)$ — гауссовский процесс со значениями в E, определенный на отрезке $[0, T]$.

Пусть x^* в E обозначает вектор, транспонированный с вектором x. Предположим, что $M\xi(t) = 0$, а корреляционная матрица $R(t, s) = M\xi(t)\,\xi^*(s)$ непрерывна по совокупности обеих переменных в области $[0, T] \times [0, T]$. Пусть векторная функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности обеих переменных в области $[0, T] \times E$, принимает свои значения в E, и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_j} \right\| < \infty \qquad (t \in [0, T],\ x \in E). \tag{89}$$

Пусть μ_1 — мера, порожденная решением дифференциального уравнения (87) $x_1(t)$, а μ_0 — мера, порожденная решением дифференциального уравнения (88) $x_0(t)$. В настоящем параграфе получены условия, при которых мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно меры μ_0, и в явном виде выписана соответствующая плотность.

---

*) Начало см.: Теория вероятностей и матем. стат., вып. 2, 1970.

Обозначим через $Y(t)$ матрицу фундаментальных решений оператора $L(t)$, т. е.

$$\frac{dY(t)}{dt} - Y(t)L(t) \equiv 0 \tag{90}$$

$$Y(0) = I$$

(I — единичная матрица).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что матрица $Y(t)$ имеет обратную матрицу (в дальнейшем ее будем обозначать через $Y^*(t)$), которая тождественно удовлетворяет уравнению

$$\frac{dY^*(t)}{dt} + L(t)Y^*(t) \equiv 0, \tag{91}$$

$$Y^*(0) = I.$$

В уравнении (87) сделаем следующую замену переменных:

$$z_1(t) = Y(t)x_1(t). \tag{92}$$

Тогда

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}x_1(t) + Y(t)\frac{dx_1(t)}{dt}$$

или

$$Y(t)\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dz_1(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{dt}x_1(t). \tag{93}$$

Умножим дифференциальное уравнение (87) слева на матрицу $Y(t)$. Воспользовавшись формулами (90), (92) и (93), получим

$$Y(t)\frac{dx_1(t)}{dt} + Y(t)L(t)x_1(t) + Y(t)f(t, x_1(t)) = Y(t)\xi(t),$$

$$\frac{dz_1(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{dt}x_1(t) + Y(t)L(t)x_1(t) + Y(t)f(t, x_1(t)) = Y(t)\xi(t)$$

или окончательно,

$$\frac{dz_1(t)}{dt} + Y(t)f(t, Y^*(t)z_1(t)) = Y(t)\xi(t). \tag{94}$$

Обозначим

$$Y(t)f(t, Y^*(t)z_1(t)) = \varphi(t, z_1(t)) \tag{95}$$

и

$$Y(t)\xi(t) = \eta(t). \tag{96}$$

Легко видеть, что функция $\varphi(t, z_1(t))$ является векторной функцией, определенной и непрерывной в области $[0, T] \times E$ и со значениями в E, для нее выполняется условие (89), а $\eta(t)$ является гаусcовским векторным процессом с нулевым математическим ожиданием и непрерывной по совокупности обеих переменных в области

$[0, T] \times [0, T]$ корреляционной матрицей $B(t, s)$, которая определяется следующим образом:

$$B(t, s) = M\eta(t)\eta^*(s) = Y(t) M\xi(t)\xi^*(s) Y^*(s)$$

или

$$B(t, s) = Y(t) R(t, s) Y^*(s), \tag{97}$$

где $Y_*(s)$ обозначает матрицу, транспонированную к $Y(t)$.

Таким образом, применяя замену переменных (92) к уравнению (87), мы сводим его к следующему виду:

$$\frac{dz_1(t)}{dt} + \varphi(t, z_1(t)) = \eta(t), \tag{98}$$

$$z_1(0) = \eta(0) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Уравнение (98) в силу условий, которым удовлетворяют векторные функции $\varphi(t, z_1(t))$ и $\eta(t)$ с вероятностью 1 имеет единственное решение $z_1(t)$, определенное на отрезке $[0, T]$ и принимающее свои значения в E.

Для дифференциального уравнения (88) поступаем аналогично. Вводим следующую замену переменных:

$$z_0(t) = Y(t) x_0(t). \tag{99}$$

Отсюда

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt} x_0(t) + Y(t) \frac{dx_0(t)}{dt}$$

или

$$Y(t) \frac{dx_0(t)}{dt} = \frac{dz_0(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{dt} x_0(t). \tag{100}$$

Умножим дифференциальное уравнение (88) слева на $Y(t)$. Принимая во внимание (90), (99) и (100), имеем

$$Y(t) \frac{dx_0(t)}{dt} + Y(t) L(t) x_0(t) = Y(t)\xi(t),$$

$$\frac{dz_0(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{dt} x_0(t) + Y(t) L(t) x_0(t) = Y(t)\xi(t)$$

или

$$\frac{dz_0}{dt} = \eta(t), \tag{101}$$

где векторный процесс $\eta(t)$ определяется по формуле (96).

Из формулы (101) видно, что векторный процесс $z_0(t)$ является гауссовским с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $B(t, s)$. Далее, в силу формул (92) и (99) и того, что матрица $Y(t)$ имеет обратную между векторными процессами $x_1(t)$ и $z_1(t)$, а также $x_0(t)$ и $z_0(t)$ установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому

$$\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_0}} = \frac{d\mu_{z_1}}{d\mu_{z_0}} = \frac{d\mu_{z_1}}{d\mu_{\eta}}, \tag{102}$$

где выражения $d\mu_{x_1}/d\mu_{x_0}$, $d\mu_{z_1}/d\mu_{z_0}$ и $d\mu_{z_1}/d\mu_\eta$ обозначают плотность одной меры относительно другой соответственно (μ_η — это мера, порожденная гауссовским векторным процессом $\eta(t)$).

Рассмотрим теперь совокупность минимальных σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, порожденных случайными векторами $\xi(\tau)$, $\tau < t$, $t \in [0, T]$. Очевидно, что при $t_2 > t_1$ $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$. В силу формул (98) и (101) имеем

$$\frac{dz_1(t)}{dt} + \varphi(t, z_1(t)) = \eta(t), \tag{103}$$

$$z_1(0) = \eta(0) = 0.$$

Учитывая формулы (92), (95), (97), (101) — (103), а также применяя к уравнению (103) результаты § 3 [1], можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть в m-мерном евклидовом пространстве E_m заданы два дифференциальных уравнения (87) и (88), где $L(t)$ — некоторый линейный оператор, с переменными коэффициентами, действующий в E_m, $\xi(t)$ — гауссовский векторный процесс, определенный на отрезке $[0, T]$, с нулевым математическим ожиданием $M\xi(t) = 0$ и непрерывной корреляционной матрицей $M\xi(t)\xi^*(s) = \mathrm{R}(t, s)$ в области $[0, T] \times [0, T]$, а $f(t, x(t))$ — m-мерная непрерывная функция в области $[0, T] \times E_m$ со значениями в E_m, удовлетворяющая условию (89). Обозначим через $\mathrm{Y}(t)$ матрицу фундаментальных решений дифференциального уравнения (90), а через $\mathrm{Y}^*(t)$ — матрицу, обратную к ней, которая, как известно, является матрицей фундаментальных решений уравнения (91), через $\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}(t, s)$ — матрицу, определенную из соотношения

$$\mathrm{B}(t, s) = \int_0^T \mathrm{B}^{\frac{1}{2}}(t, u)\,\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}(u, s)\,du.$$

Пусть существуют случайная векторная функция $G(t)$ и случайный векторный винеровский процесс $W(t)$, удовлетворяющие условиям 1) — 5) теоремы 2 [1], а также следующим условиям:

$$f\left(t, \mathrm{Y}^*(t)\int_0^T \mathrm{Y}^*(s)\,\xi(s)\,ds\right) = \mathrm{Y}^*(t)\int_0^T \mathrm{B}^{\frac{1}{2}}(t, u)\,G(u)\,du \tag{104}$$

и

$$\xi(t) = \mathrm{Y}^*(t)\int_0^T \left(\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}(t, u)\,dW(u)\right). \tag{105}$$

Тогда мера μ_{x_1}, соответствующая решению дифференциального уравнения (87) $x_1(t)$, абсолютно непрерывна относительно меры μ_{x_0}, соответствующей решению дифференциального уравнения (88) $x_0(t)$ и

$$\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_0}}[x_0] = \exp\left\{-\int_0^T (G(t), dW(t)) - \frac{1}{2}\int_0^T \|G(t)\|^2\,dt\right\}. \tag{106}$$

Рассмотрим теперь в m-мерном евклидовом пространстве E_m два дифференциальных уравнения вида

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + L(t)[x_1(t)] + f(t, x_1(t), x^1(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) = \xi(t) \quad (107)$$

$$(0 \leqslant t \leqslant T),$$

$$x_1(0) = x_1'(0) = \cdots = x^{(n-1)}(0) = \xi(t)$$

и

$$\frac{d^n x_0(t)}{dt^n} + L(t)[x_0(t)] = \xi(t) \quad (108)$$

$$(0 \leqslant t \leqslant T),$$

$$x_0(0) = x_0'(0) = \cdots = x_0^{(n-1)}(0) = \xi(0) = 0.$$

Здесь $L'(t)$ — дифференциальный линейный оператор $(n-1)$-порядка с переменными коэффициентами, действующий в E_m: если $y(t)$ функция со значениями в E_m, то

$$L(t)[y] = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(t)\, y^{(k)}(t) \quad (109)$$

($C_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ являются матрицами m-го порядка); функция $f(t, x_1(t), x'(t) \ldots, x^{(n-1)}(t))$ — векторная функция, определенная и непрерывная по совокупности всех переменных в области $[0, T] \times E_m \times \cdots \times E_m$, принимает свои значения в E_m и удовлетворяет условию

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{\partial f(t, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial x_i^{(j)}} \right\| < \infty \quad (110)$$

($x_i^{(j)}$ — i-я компонента вектора $x^{(j)}$), а $\xi(t)$ является m-мерным векторным гуассовским процессом с нулевым математическим ожиданием $M\xi(t) = 0$ и непрерывной корреляционной матрицей $R(t, s) = M\xi(t)\xi^*(s)$ в области $[0, T] \times [0, T]$.

Заменим дифференциальные уравнения (107) и (108) эквивалентными системами дифференциальных уравнений соответственно

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1'(t),$$

$$\frac{dx_1'(t)}{dt} = x_1''(t), \quad (111)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_1^n(t)}{dt} + L(t)[x_1(t)] + f(t, x_1(t), x_1^1(t), \ldots, x_1^{(n-1)}(t)) = \xi(t);$$

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = x_0'(t),$$

$$\frac{dx_0'(t)}{dt} = x_0''(t), \tag{112}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_0^n(t)}{dt} + L(t)[x_0(t)] = \xi(t).$$

Рассмотрим mn-мерное евклидово пространство E_{mn}, в котором введем обозначения векторов следующим образом:

$$\tilde{x}_1(t) = [x_1(t), x_1'(t), \ldots, x_1^{(n-1)}(t)]; \tag{113}$$

$$\tilde{x}_0(t) = [x_0(t), x_0'(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t)]; \tag{114}$$

$$F(t, \tilde{x}_1(t)) = [0, \ldots, 0, f(t, x_1(t), \ldots, x_1^{(n-1)}(t))]; \tag{115}$$

$$\eta(t) = [0, \ldots, 0, \xi(t)]. \tag{116}$$

Рассмотрим mn-мерную матрицу

$$\tilde{L} = \begin{vmatrix} (0) & (I) & (0) & \ldots (0) \\ (0) & (0) & (I) & \ldots (0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (0) & (0) & (0) & (I) \\ (C_0(t)) & (C_1(t)) & (C_2(t)) & \ldots (C_{n+1}(t)) \end{vmatrix}, \tag{117}$$

где каждый ящик вида (0) является m-мерной квадратной матрицей с нулевыми элементами, ящик вида I — m-мерная единичная матрица, а ящик $(C_k(t))$ $(k = 0, \ldots, n - 1)$ — m-мерные матрицы, которые входят в оператор L.

Тогда с помощью этих обозначений системы дифференциальных уравнений (111) и (112) могут быть заменены эквивалентными дифференциальными уравнениями в евклидовом пространстве $E_{m,n}$:

$$\frac{d\tilde{x}_1(x)}{dt} + \tilde{L}(t)\tilde{x}_1(t) + F(t, \tilde{x}_1(t)) = \eta(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{118}$$

$$\tilde{x}_1(0) = \eta(0) = 0$$

и

$$\frac{d\tilde{x}_0(t)}{dt} + \tilde{L}(x)\tilde{x}_0(t) = \eta(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{119}$$

$$\tilde{x}_0(0) = \eta(0) = 0.$$

Обозначим норму и скалярное произведение в E_{mn} через $(\cdot)$ и $(\cdot \mid \cdot)$ и через $K(t, u)$ — корреляционную матрицу гауссовского процесса $\eta(t)$. Таким образом, дифференциальные уравнения (107) и (108), рассматриваемые в евклидовом пространстве E_m, приведены к дифференциальным уравнениям (118) и (119), рассматриваемым в евклидовом пространстве E_{mn}. Применяя теперь результаты теоремы 3 к уравнениям (118) и (119), можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть в пространстве E_m рассматриваются уравнения (107) и (108), где оператор $L(t)$, векторная функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ и векторный гауссовский процесс $\xi(t)$ удовлетворяют выше перечисленным условиям. Пусть, далее, существуют векторная функция $G(t)$ и векторный винеровский процесс $W(t)$ со значениями в E_{mn}, удовлетворяющие условиям 1) — 5) теоремы 2 [1], а также следующим условиям:

$$F(t, \tilde{Y}^*(t) \int_0^t \tilde{Y}(s)\,\eta(s)\,ds) = Y^*(t) \int_0^T K^{\frac{1}{2}}(t, u)\, G(u)\, du, \tag{120}$$

и

$$\eta(t) = Y^*(t) \int_0^T (K^{\frac{1}{2}}(t, u) \,|\, dW(u)), \tag{121}$$

где $\tilde{Y}^*(t)$ является обратной матрицей к матрице $Y(t)$ фундаментальных решений следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} - \tilde{Y}(t)\,\tilde{L}(t) = 0, \tag{122}$$

а матрица $K^{\frac{1}{2}}(t, u)$ удовлетворяет соотношению

$$K(t, s) = \int_0^T K^{\frac{1}{2}}(t, u)\, K(u, s)\, du. \tag{123}$$

Тогда мера μ_{x_1}, порожденная решением дифференциального уравнения (107) $x_1(t)$ абсолютно непрерывна относительно меры μ_{x_0}, порожденной решением дифференциального уравнения (108) $x_0(t)$ и

$$\frac{d\mu_{x_1}}{d\mu_{x_0}}[x_0] = \exp\left\{-\int_0^T (G(u) \,|\, dW(u)) - \frac{1}{2}\int_0^T |G(u)|^2\, du\right\}. \tag{124}$$

Заметим, что теоремы 1, 2 работы [1] и 3, 4 остаются в силе, если E, $E_{mn} = E \times E \times E_m$ сепарабельное гильбертово пространство E, $E_{mn} = E \times E \times \times E \times \ldots \times E$, а дифференциальные уравнения (71), (75), (87), (88), (107) и (108) являются дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве E.

§ 5. Оптимальный многомерный прогноз решения дифференциального уравнения с гауссовским возмущением

В настоящем параграфе будет получена формула для оптимального прогноза для решений дифференциальных уравнений, аддитивно содержащих гауссовские векторные процессы. Для уравнений с малой нелинейностью этот прогноз разлагается в ряд по малому параметру.

Пусть в m-мерном евклидовом пространстве E_m задано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(t, x(t)) = \xi'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a), \tag{125}$$

$$x(0) = \xi(0) = 0,$$

где векторная функция $f(t, x(t))$ определена и непрерывна в области $[0, a] \times E_m$, $\xi(t)$ — векторный гауссовский процесс, определенный на отрезке $[0, a]$ с нулевым математическим ожиданием и непрерывной корреляционной матрицей $R(t, s)$ в области $[0, a] \times \times [0, a]$.

Пусть $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ являются измеримыми функциями, определенными на элементах пространства E_m. Обозначим через $\mathfrak{F}_T^g$ и $\mathfrak{F}_{T+\alpha}^g$ σ-алгебры, порожденные значениями $g(x(s))$, $s \leqslant T$ и $g(x(s))$, $s \leqslant T+\alpha$ (точки $T, T+\alpha \in [0, a]$), где $x(t)$ — решение уравнения (125). Предположим, что для уравнения (125) выполняются условия теоремы 1. Тогда мера μ_x, порожденная решением уравнения (125) $x(t)$ будет абсолютно непрерывна относительно меры μ_ξ, порожденной векторным гауссовским процессом $\xi(t)$ и

$$\rho_a(\xi) = \frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}[\xi] = \exp\left\{-\int_0^a (G(t), dW(t)) - \frac{1}{2}\int_0^a \|G(t)\|^2 dt\right\}, \tag{126}$$

где случайная векторная функция $G(t)$ и векторный винеровский процесс $W(t)$ определяются из соотношений (72) и (73) [1] ($T = a$).

Предположим теперь, что траектория решения дифференциального уравнения (125) наблюдается до момента T. Зададимся целью найти наилучший в смысле среднеквадратическом прогноз в точке $T+\alpha$, $h(x(T+\alpha))$ функционала $h(x(T+\alpha))$. Используя общую формулу (9) [1], мы можем написать

$$\widehat{h}(x(T+\alpha)) = \left.\frac{M\{h(\xi(T+\alpha))\rho_{T+\alpha}(\xi)/\mathfrak{F}_T^*\}}{\rho_T(\xi)}\right|_{\xi(\cdot)=x(\cdot)} =$$

$$= \left.\frac{M\{h(u(T+\alpha)) + \varepsilon_T(T+\alpha))\rho_{T+\alpha}(u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)\}}{\rho(\xi)}\right|_{\substack{u(\cdot)=l_T(\cdot)\\ \xi(\cdot)=x(\cdot)}}, \tag{127}$$

где $\mathfrak{F}_T^*$ — σ-алгебра, порожденная значениями $g(\xi(s))$, $s \leqslant T$, функции $l_T(\cdot)$ и $\varepsilon_T(\cdot)$ определяются по формулам (7) и (8) [1].

Исходя из того, что выражение

$$\exp\left\{-\int_0^T (G(t), dW - \frac{1}{2})\int_0^T \|G(t)\|^2 dt\right\}$$

измеримо относительно σ-алгебры $\mathfrak{F}_T^*$, пользуясь свойством аддитивности интеграла, формулу (127) упростим и приведем к виду

$$\widehat{h}(x(T+\alpha)) = M\Big[h(u(T+\alpha) + \varepsilon_T(T+\alpha)) \times$$
$$\times \exp\Big\{-\int_T^{T+\alpha} (G(t), dW(t)) - \frac{1}{2}\int_T^{T+\alpha} \|G(t)\|^2 dt\Big\}\Big]\Big|_{\substack{u(\cdot)=l_T(\cdot)\\ \xi(\cdot)=X(\cdot)}}. \quad (128)$$

Пусть теперь $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\lambda_k\}$ являются собственными векторными функциями и собственными числами корреляционной матрицы $\mathrm{R}(t, s)$, $t, s \in [0, T+\alpha]$.

Введем следующие обозначения:

$$f_k = \int_0^{T+\alpha} (f(t, x(t)), \varphi_k(t))\, dt;$$
$$G_k = \int_0^{T} (G(t), \varphi_k(t))\, dt; \quad (129)$$
$$W_k = \int_0^{T+\alpha} (\varphi_k(t), dW(t)).$$

Умножим выражение $f(t, x(t)) = \int_0^{T+\alpha} \mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, G(u)\, du$ скалярно на $\varphi_k(t)$ и проинтегрируем от 0 до $T+\alpha$. Имеем в силу (129)

$$f_k = \int_0^{T+\alpha}\int_0^{T+\alpha} (\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(t, s)\, G(s), \varphi_k(t))\, du =$$
$$= \int_0^{T} (\sqrt{\lambda_k}\varphi_k(s), G(s))\, ds = \sqrt{\lambda_k} G_k,$$

откуда

$$G_k = \frac{f_k}{\sqrt{\lambda_k}} \quad (130)$$

или

$$G_k = \frac{\int_0^{T+\alpha} (f(t, \xi(t)), \varphi_k(t))\, dt}{\sqrt{\lambda_k}}. \quad (131)$$

Отсюда

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^{T+\alpha} (f(s, \xi(s)), \varphi_k(s))\right)}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(t). \quad (132)$$

Умножим теперь выражение $\xi'(t)=\int\limits_0^{T+\alpha} R^{\frac{1}{2}}(t,\ u)\,dW(u)$ скалярно на $\varphi_k(t)$ и проинтегрируем в интервале $[0,\ T+\alpha]$. Аналогично получим

$$W_k=\frac{\int\limits_0^{T+\alpha}(\xi'(t),\ \varphi_k(t))\,dt}{\sqrt{\lambda_k}}. \tag{133}$$

Поэтому

$$dW(t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k\varphi_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{T+\alpha}(\varphi_k(s),\ \xi'(s))\,ds}{\sqrt{\lambda_k}}\varphi_k(t). \tag{134}$$

Используя (132) и (133), имеем

$$\int\limits_0^{T+\alpha}(G(t),\ dW(t))=\sum_{k=1}^{\infty}G_kW_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^{T+\alpha}\int\limits_0^{T+\alpha}(f(t,\ \xi(t)),\ \varphi_k(t))(\xi'(s),\ \varphi_k(s))\,dtds. \tag{135}$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_0^{T+\alpha}\|G(t)\|^2\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}G_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left(\int\limits_0^{T+\alpha}(f(t,\ \xi(t)),\ \varphi_k(t))\,dt\right)^2. \tag{136}$$

Поэтому формулу (128) в силу (135) и (136) можно записать в виде

$$\hat{h}(x(T+\alpha))=M\Bigg[h(u(T+\alpha)+\varepsilon_T(T+\alpha))\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\int\limits_T^{T+\alpha}\int\limits_T^{T+\alpha}(f(t,\ \xi(t)),\ \varphi_k(t))(\xi'(s),\ \varphi_k(s))\,dtds+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\int\limits_T^{T+\alpha}(f(t,\ \xi(t)),\ \varphi_k(t))\,dt\right)^2\right]\right\}\Bigg]\right|_{\substack{u(\cdot)=l_T(\cdot)\\ \xi(\cdot)=x(\cdot)}}. \tag{137}$$

Формула (137) приобретает особый интерес, когда функционал $h(x)\equiv x$ и приращение α мало. Тогда, пользуясь формулой Ито (см. [2]), имеем

$$\exp\left\{-\int\limits_T^{T+\alpha}(G(t),\ dW(t))-\frac{1}{2}\int\limits_T^{T+\alpha}\|G(t)\|^2\,dt\right\}=$$

$$=1+\int\limits_T^{T+\alpha}(G(t),\ dW(t))+o(\alpha)=$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} (f(t, \xi(t)), \varphi_k(t))\, (\xi'(s), \varphi_k(s))\, dtds + o(\alpha). \quad (138)$$

Из (7) [1] имеем

$$\xi'(t) = l_T'(t) + \varepsilon_T'(t). \quad (139)$$

В этом случае формула (137) принимает вид

$$\hat{h}(x(T+\alpha)) = M\Bigg[h(u(T+\alpha) + \varepsilon_T(T+\alpha)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h(u(T+\alpha) + \varepsilon_T(T+\alpha)) \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} (f(t, \xi(t)), \varphi_k(t)) \times$$

$$\times (\xi'(s), \varphi_k(s))\, dtds + o(\alpha)\Bigg] = \int_{-\infty}^{\infty} h(l_T(T+\alpha) + z)\, p(z, T+\alpha)\, dz -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} h(l_T(T+\alpha) + z_1)\, (\varphi_k(t), f(t, l_T(t) + z_2) \times$$

$$\times (z_3, \varphi_k(s))\, p_3(z_1, z_2, z_3, t, s, T+\alpha)\, dtdsdz_1dz_2dz_3 -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} h(l_T(T+\alpha) + z_1)\, (\varphi_k(t), f(t, l_T(t) + z_2) \times$$

$$\times (l_T(T+\alpha), \varphi_k(s))\, p_2(z_1, z_2, t, T+\alpha)\, dtdsdz_1dz_2 + o(\alpha) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(l_T(T+\alpha) + z)\, p(z, T+\alpha)\, dz -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [A_1^{(k)}(h, f, T+\alpha) + A_2^{(k)}(h, f, T+\alpha)] + o(\alpha), \quad (140)$$

где p_k $(z_1, z_2, \ldots, z_k, t_1, \ldots, t_k$ — совместная гауссовская плотность распределения $\xi_T(t_1), \ldots, \xi_T(t_k)$,

$$A_1^{(k)}(h, f, T+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} h(l_T(T+\alpha) + z_1) \times$$

$$\times (\varphi_k(t), f(t, l_T(T) + z_2)\, (z_3, \varphi_k(s))\, p_3(z_1, z_2, z_3, t, s, T+\alpha) \times$$

$$\times dtdsdz_1dz_2dz_3 \quad (141)$$

и

$$A_2^{(k)}(h, f, T+\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} h(l_T(T+\alpha) + z_1)\, (\varphi_k(t), f(t, l_T(t) +$$

$$+ z_2)\, (l_T(T+\alpha), \varphi_k(s))\, p_2(z_1, z_2, t, T+\alpha)\, dtdsdz_1dz_2. \quad (142)$$

Следовательно, окончательно оптимальный прогноз $\hat{h}(x(T+\alpha))$ имеет вид

$$\hat{h}(x(T+\alpha)) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(l_T(T+\alpha)+z)\, p(z, T+\alpha)\, dz - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [A_1^k(h, f, T+\alpha) + A_2^{(k)}(h, f, T+\alpha)] + o(\alpha) \right\} \Bigg|_{\xi(\cdot) = x(\cdot)} . \quad (143)$$

Формула (143) принимает простой вид, если положить $h(x) \equiv x$ (учитываем, что $M\xi_T(t) = 0$):

$$\hat{x}(T+\alpha) = l_T(T+\alpha) - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [A_1^{(k)}(\xi, f, T+\alpha) + \right.$$

$$\left. + A_2^{(k)}(\xi, f, T+\alpha)] + o(\alpha) \right\} \Bigg|_{\xi(\cdot) = x(\cdot)} . \quad (144)$$

Если вместо дифференциального уравнения (125) рассмотреть уравнение с малым параметром

$$\frac{dx(t)}{dt} + \varepsilon f(t, x(t)) = \xi'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a), \quad (145)$$
$$x(0) = \xi(0) = 0$$

и учесть, что

$$\exp\left\{ -\varepsilon \int_T^{T+\alpha} (G(t), dW(t)) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_T^{T+\alpha} \|G(t)\|^2 dt = \right.$$

$$= 1 - \varepsilon \int_T^{T+\alpha} (G(t), dW(t)) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_T^{T+\alpha} \|G(t)\|^2 dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\int_T^{T+\alpha} (G, (t), dW(t) \right)^2 + o(\varepsilon^2), \quad (146)$$

а также формулы (135) — (137), то оптимальный прогноз $\hat{h}(x(T+\alpha))$ можно разложить по малому параметру ε.

Действительно, из (137) и (146) имеем

$$\hat{h}(x(T+\alpha)) = Mh(l_T(T+\alpha) + \varepsilon_T(T+\alpha))\,|_{\xi(\cdot) = x(\cdot)} -$$

$$- \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} M \left[\frac{1}{\lambda_k} h(l_T(T+\alpha) + \varepsilon_T(T+\alpha)) \int_T^{T+\alpha} \int_T^{T+\alpha} (f(t, u(t) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_T(t))\, \varphi_k(t)\, (u_1(s) + \varepsilon_T(s), \varphi_k(s))\, dt\, ds \right] \Bigg|_{\substack{u_1(\cdot) = l_T'(\cdot) \\ \xi(\cdot) = x(\cdot) \\ u(\cdot) = l_T(\cdot)}} -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}M\Bigg[h\left(l_T(T+\alpha)+\varepsilon_T(T+\alpha)\right)\times$$

$$\times\left(\int_T^{T+\alpha}\int_T^{T+\alpha}(f(t,u(t)+\varepsilon_T(t)),\varphi(t))\,dt\right)^2\Bigg]\Bigg|_{\substack{\xi(\cdot)=x(\cdot)\\ u(\cdot)=l_T(\cdot)}}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}M\Bigg[h\left(l_T(T+\alpha)+\varepsilon_T(T+\alpha)\right)\int_T^{T+\alpha}\int_T^{T+\alpha}(f(t,u(t)+$$

$$+\varepsilon_T(t)),\varphi_n(t))\,(u_1(s)+\varepsilon_T(s),\rho_k(s))\,dtds\int_T^{T+\alpha}\int_T^{T+\alpha}(f(t,u(t)+$$

$$+\varepsilon_T(t),\varphi_j(t))\,(u_1(s)+\varepsilon_T'(s),\varphi_j(s))\,dtds\Bigg]\Bigg|_{\substack{u(\cdot)=l_T(\cdot)\\ \xi(\cdot)=x(\cdot)\\ u_1(\cdot)=l_T'(\cdot)}}+o(\varepsilon^2)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(l_T(T+\alpha)+z\right)p(z)\,dz-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}B_1^{(k)}(h,f,T+\alpha)-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}B_2^{(k)}(h,f,T+\alpha)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}B_3^{(i,j)}(h,f,T+\alpha)+o(\varepsilon^2), \qquad (147)$$

где величины $B_1^{(k)}(h,f,T+\alpha)$, $B_2^{(k)}(h,f,T+\alpha)$ и $B_3^{(i,j)}(h,f,T+\alpha)$ считаются буквально так же, как были получены величины $A_1^{(k)}(h,f,T+\alpha)$, $A_2^{(k)}(h,f,T+\alpha)$ в формулах (141) и (142), а $p(z)$ — гауссовская плотность.

Таким образом, оптимальный прогноз $\hat{h}(x(T+\alpha))$ разлагается по малому параметру следующим образом:

$$\hat{h}(x(T+\alpha))=\int_{-\infty}^{\infty}(l_T(T+\alpha))+z)\,p(z)\,dz-$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}B_1^{(k)}(h,f,T+\alpha)-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}B_2^{(k)}(h,f,T+\alpha)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}B_3^{(i,j)}(h,f,T+\alpha)+o(\varepsilon^2). \qquad (148)$$

При $h(x) \equiv x$ формула (148) принимает вид

$$\hat{x}(T+\alpha) = l_T(T+\alpha) - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} B_1^{(k)}(x, f, T+\alpha) -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} B_2^{(k)}(x, f, T+\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \lambda_j} B_3^{(i,j)}(x, f, T+$$

$$+ \alpha) + o(\varepsilon^2). \tag{149}$$

Используя общие формулы, полученные в § 2 [1] для оптимального прогноза, а также формулы плотностей из § 3 (86) [1], аналогичными методами можно получить формулы для оптимального прогноза $\hat{h}(x(T+\alpha))$, где $x(\cdot)$ является решением дифференциального уравнения (75).

§ 6. Оптимальная многомерная фильтрация решения дифференциального уравнения с гауссовским возмущением

Найдем многомерный оптимальный фильтр решения дифференциального уравнения, аддитивно содержащего гауссовский векторный процесс.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant a)$ — два произвольных векторных процесса со значениями в евклидовых пространствах E_m и E_k соответственно (индекс указывает размерность пространства). Предположим, что на промежутке $[0, T]$, $(T \in [0, a])$ наблюдается векторный процесс $x(t)$. Пусть $\mathfrak{F}_T^{(1)\,g}$ обозначает σ-алгебру событий, порожденных значениями векторного процесса $g(x(t))$ на промежутке $[0, T]$. Как известно (см. § 2 [1]), наилучшая оценка $\hat{h}(y(s))$ функционала $\hat{h}(y(s))$ $(0 \leqslant s \leqslant T+\alpha,\ T+\alpha \in [0, a])$ по значениям $g(x(t))$ имеет вид

$$\hat{h}(y(s)) = M\{h(y(s))/\mathfrak{F}_T^{(1)\,g}\} \qquad (0 \leqslant s \leqslant T+\alpha). \tag{150}$$

Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ являются векторными гауссовскими процессами, определенными на промежутке $[0, a]$ со значениями в E_m и E_k соответственно.

Пусть, далее, $\mu_{x,y}$ и $\mu_{\xi,\eta}$ обозначают меры, порожденные соответственно парами $x(t), y(t)$ и $\xi(t), \eta(t)$. Допустим, что мера $\mu_{x,y}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu_{\xi,\eta}$ и $\rho(\xi, \eta) = \dfrac{d\mu_{x,y}}{d\mu_{\xi,\eta}}[\xi, \eta]$ обозначает соответствующую плотность. Пользуясь леммой 1, можно показать, что

$$\hat{h}(y(s)) = \left.\frac{M\{h(\eta(s))\,\rho(\xi(\cdot),\eta(\cdot))/\mathfrak{F}_T^{(1)g^*}\}}{\frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}[\xi]}\right|_{\xi(\cdot)=x(\cdot)} \tag{151}$$

$$(0 \leqslant S' \leqslant T + \alpha'),$$

где $\mathfrak{F}_T^{(1)g^*}$ σ-алгебра, порожденная значениями $g(\xi(t))$, $t \leqslant T$, а $\frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}[\xi]$ — плотность меры μ_x относительно μ_ξ.

Пусть $\bar{\eta}(s)$ является оптимальной линейной оценкой гауссовского векторного процесса $\eta(s)$ по значениям $g(\xi(s))$ $0 \leqslant s \leqslant T + \alpha$. Тогда $\bar{\eta}(s)$ $\mathfrak{F}_T^{(1)g^*}$-измеримо и

$$\eta(s) = \bar{\eta}(s) + \varepsilon(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant T + \alpha), \tag{152}$$

где $\xi(s)$ — гауссовский векторный процесс, не зависящий от σ-алгебры $\mathfrak{F}_T^{(1)g^*}$.

Так как

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}[\xi] = M\{\rho(\xi(\cdot),\eta(\cdot))/\mathfrak{F}_T^{(1)g^*}\}, \tag{153}$$

то окончательно имеем (см. § 2 [1])

$$\hat{h}(y(s)) = \left.\frac{M\{h(u(s)+\varepsilon(s))\,\rho(z(\cdot),u(\cdot)+\xi(\cdot))\}}{M\{\rho(z(\cdot),u(\cdot)+\varepsilon(\cdot))\}}\right|_{\substack{z(\cdot)=x(\cdot)\\ u(\cdot)=\bar{\eta}(\cdot)}}. \tag{154}$$

Формула (154) дает оптимальную фильтрацию выражения $h(y(s))$ по значениям $g(x(\cdot))$. Если в (154) предположить $\hat{h}(y) \equiv y$, то

$$\hat{y}(s) = \hat{\eta}(s) + \left.\frac{M\{\varepsilon(s)\,\rho(z(\cdot),u(\cdot)+\varepsilon(\cdot))\}}{M\{\rho(z(\cdot),u(\cdot)+\varepsilon(\cdot))\}}\right|_{\substack{z(\cdot)=x(\cdot)\\ u(\cdot)=\bar{\eta}(\cdot)}}, \tag{155}$$

где $\hat{y}(s)$ является оптимальной фильтрацией по значениям $g(x(t))$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} + f_1(t, x(t), y(t)) = \xi'(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + f_2(t, x(t), y(t)) = \eta'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a), \tag{156}$$

$$x(0) = y(0) = \xi(0) = \eta(0) = 0,$$

где векторные функции $f_1(t,x,y)$ и $f_2(t,x,y)$ определены и непрерывны в области $[0,a] \times E_{m+k}$, принимают свои значения соответственно в E_m и E_k,

$$\sum_{z_k=1}^{m+k}\left|\frac{\partial f(t,z)}{\partial z_k}\right| < C < \infty, \tag{157}$$

а $\xi'(t)$ и $\eta'(t)$ являются определенными на $[0, a]$ гауссовскими векторными процессами соответственно в E_m и E_k с нулевым математическим ожиданием.

Систему (156) в E_{m+k} можно записать как одно дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} + F(t, z(t)) = \gamma'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a) \tag{158}$$

$$z(0) = \gamma(0) = 0,$$

где $z(t) = (x(t), y(t)) \in E_{m+k}$, $\gamma'(t) \in (\xi'(t), \eta'(t)) \in E_{m+k}$, векторная функция $F(t, z) = (f_1(t, z), f_2(t, z))$, $z \in E_{m+k}$, определена и непрерывна в области $[0, a] \times E_{m+k}$ и принимает свои значения в E_{m+k}.

Пусть символы $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначают скалярное произведение и норму в E_{m+k}, а $\mathrm{R}(t, s)$ — корреляционную матрицу гауссовского векторного процесса $\gamma(t)$, определенную и непрерывную в области $[0, a] \times [0, a]$.

Предположим, что для дифференциального уравнения (158) выполняются условия теоремы I. Тогда мера μ_z, порожденная векторным процессом $z(t)$, или, что то же, мера $\mu_{x,y}$, порожденная парой векторных процессов $x(t)$ и $y(t)$, будет абсолютно непрерывна относительно меры μ_γ, порожденной гауссовским векторным процессом $\gamma(t)$, или, что то же, относительно меры $\mu_{\xi,\eta}$, порожденной парой гауссовских векторных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ и

$$\rho_a(\xi, \eta) = \frac{d\mu_{x,y}}{d\mu_{\xi,\eta}}[\xi, \eta] = \frac{d\mu_z}{d\mu_\gamma} =$$

$$= \exp\left\{-\int_0^a (G(t), dW(t)) - \frac{1}{2}\int_0^a \|G(t)\|^2 dt\right\}, \tag{159}$$

где векторная случайная функция $G(t)$ и векторный винеровский процесс $W(t)$ принимают свои значения в E_{m+k} и определяются по формулам

$$F(t, \gamma(t)) = \int_0^a \mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, G(u)\, du \tag{160}$$

и

$$\gamma'(t) = \int_0^a \mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, dW(u), \tag{161}$$

а $\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(t, u)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{R}(t) = \int_0^a \mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(t, u)\, \mathrm{R}^{\frac{1}{2}}(u, s)\, du. \tag{162}$$

Предположим теперь, что наблюдается $x(t)$ в промежутке $[0, T]$, т. е. одна компонента решения системы дифференциальных уравнений (156). Обозначим через $\mathfrak{F}_T^{(1)\,g}$ σ-алгебру событий, порожденную значениями $g(x(t))$. Оптимальная оценка $h(y(t))$, где $y(t)$ является другой компонентой решения системы (156), находится по формуле (154); $\rho(\cdot, \cdot)$ является плотностью (150), вычисленной для точки $a = T + \alpha$, а оптимальная оценка самого векторного процесса $y(t)$ вычисляется по формуле (155) с учетом формулы (159) в точке $a = T + \alpha$. Используя теперь формулы (135), (136), формулы (154) и (155) для данного случая перепишем в следующем виде:

$$\hat{h}(y(s)) =$$

$$= M\left[h(u(s) + \varepsilon(s)) \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\left[\int_0^{T+\alpha}\int_0^{T+\alpha} (F(t, \gamma(t)), \varphi_k(t)) \times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times (\gamma'(s), \varphi_k(s))\, dt\, ds + \frac{1}{2}\left(\int_0^{T+\alpha} (F(t, \gamma(t)), \varphi_k(t))\, dt\right)^2\right]\right\}\right] \times$$

$$\times \left(M\left[\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\left[\int_0^{T+\alpha}\int_0^{T+\alpha} (F(t, \gamma(t), \varphi_k(t))(\gamma'(s), \varphi_k(s))\, dt\, ds +\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+ \frac{1}{2}\left(\int_0^{T+\alpha} (F(t, \gamma(t)), \varphi_k(t))\, dt\right)^2\right]\right\}\right]\right)^{-1}\Bigg|_{\substack{\xi(\cdot) = x(\cdot)\\ u_1(\cdot) = \bar{\eta}'(\cdot)\\ u_2(\cdot) = \bar{\eta}(\cdot)\\ \xi'(\cdot) = x'(\cdot)}} . \tag{163}$$

Упростим выражение (163). Из (152) имеем

$$\gamma'(t) = \bar{\eta}'(t) + \varepsilon'(t). \tag{164}$$

Далее,

$$\begin{gathered} \gamma(t) = (\xi(t), \bar{\eta}(t) + \varepsilon(t)), \\ \gamma'(t) = (\xi'(t), \bar{\eta}'(t) + \varepsilon'(t)). \end{gathered} \tag{165}$$

Обозначим

$$C_1^{(k)}(\xi(\cdot), u_1(\cdot), \varepsilon(\cdot), T + \alpha) = \int_0^{T+\alpha} (F(t, (\xi(t), u_1(t) +$$

$$+ \varepsilon(t)), \varphi_k(t))\, dt, \tag{166}$$

$$C_2^{(k)}(\xi'(\cdot), u_2(\cdot), \varepsilon'(\cdot), T + \alpha) = \int_0^{T+\alpha} ((\xi'(t), u_2(t) +$$

$$+ \varepsilon(t)), \varphi_k(t))\, dt. \tag{167}$$

Тогда формула (163) примет вид

$$\hat{h}(y(s))M = \Bigg[h(\bar{\eta}(s) + \varepsilon(s)) \exp\Bigg\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} C_1^{(k)}(x(\cdot), \bar{\eta}(\cdot), \varepsilon(\cdot), T+\alpha) \times$$

$$\times \frac{C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)}{2} + C_2^{(k)}(x'(\cdot), \bar{\eta}(\cdot), \varepsilon'(\cdot), T+\alpha)\Bigg] \times$$

$$\times \Bigg(M \exp\Bigg\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)\Big(\frac{1}{2} C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha) +$$

$$+ C_2^{(k)}(x', \bar{\eta}', \varepsilon', T+\alpha)\Big)\Bigg\}\Bigg)^{-1}. \qquad (168)$$

При $h(y) \equiv y$ аналогично считается оптимальный фильтр по формуле (155).

Предположим теперь, что система (156) содержит малую нелинейность, т. е.

$$\frac{dx(t)}{dt} + \omega f_1(t, x(t), y(t)) = \xi'(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega f_2(t, x(t), y(t)) = \eta'(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant a), \qquad (169)$$

$$x(0) = y(0) = \xi(0) = \eta(0) = 0$$

(где ω — малый параметр), сохраняя при этом в силе все предположения, приведенные выше для $f_1(t, x, y)$, $f_2(t, x, y)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$. Тогда плотность мер $\mu_{x,y}$ и $\mu_{\xi,\eta}$ в E_{m+k} будет выглядеть следующим образом:

$$\rho_a^{\omega}(\xi, \eta) = \frac{d\mu_{x,y}}{d\mu_{\xi,\eta}}[\xi, \eta] =$$

$$= \exp\left\{-\omega \int_0^a (G(t), dW(t)) - \frac{\omega^2}{2} \int_0^a \|G(t)\|^2 dt\right\}. \qquad (170)$$

При $a = T + \alpha$

$$\exp\left\{-\omega \int_0^{T+\alpha} (G(t), dW(t)) - \frac{\omega^2}{2} \int_0^{T+\alpha} \|G(t)\|^2 dt\right\} =$$

$$= 1 - \omega \int_0^{T+\alpha} (G(t), dW(t)) - \frac{\omega^2}{2} \int_0^{T+\alpha} \|G(t)\|^2 dt +$$

$$+ \frac{\omega^2}{2}\left(\int_0^{T+\alpha} (G(t), dW(t))^2 + o(\omega^2)\right). \qquad (171)$$

В терминах (166) и (167) (171) примет вид

$$\exp\left\{-\omega\int\limits_0^{T+\alpha}(G(t), dW(t))-\frac{\omega^2}{2}\int\limits_0^{T+\alpha}\|G(t)\|^2\,dt\right\}=$$

$$=1-\omega\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)\,C_2^{(k)}(x', \bar{\eta}', \varepsilon', T+\alpha)-$$

$$-\frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}[C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)]+$$

$$+\frac{\omega^2}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)\,C_2^{(k)}(x', \bar{\eta}', \varepsilon', T+\alpha)\right]^2+o(\omega^2). \tag{172}$$

Умножив выражение (172) на $h(\bar{\eta}(s)+\xi(s))$ и применив к результату операцию математического ожидания, получим (будем предполагать, что $Mo(\omega^2)=o(\omega^2)$):

$$M\left[h(\bar{\eta}(s)+\varepsilon(s))\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega}{\lambda_k}C_1^{(k)}(\cdot, \cdot\ \varepsilon, \cdot)\,C_2^{(k)}(\cdot, \cdot\ \varepsilon, \cdot)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{2}(C_1^{(k)}(\cdot, \cdot\ \varepsilon, \cdot))^2\right\}\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(\bar{\eta}(s)+z)\,p(z)\,dz-$$

$$-\omega\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}H_1^{(k)}(h, x, \bar{\eta}, x', \bar{\eta}', s, T+\alpha)-$$

$$-\frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}H_2^{(k)}(h, x, \bar{\eta}, s, T+\alpha)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{\lambda_i\lambda_j}H_3^{(i,j)}(h, x, \bar{\eta}, x', \bar{\eta}', s, T+\alpha)+o(\omega^2)=$$

$$=b_1-\omega b_2+\frac{\omega^2}{2}b_3+o(\omega^2), \tag{173}$$

где

$$H_1^{(k)}(h, x, \bar{\eta}, x', \bar{\eta}', s, T+\alpha)=$$

$$=M\left\{h(\bar{\eta}(s)+\varepsilon_1)\ C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon_2, T+\alpha)\,C_2^{(k)}(x', \bar{\eta}', \varepsilon_3, T+\alpha)\right\}, \tag{174}$$

$$H_2^{(k)}=M\left\{h(\bar{\eta}(s)+\varepsilon_1)\,C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon_2, T+\alpha)\,C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)\right\} \tag{175}$$

и

$$H_3^{(i,j)}(h; x, \bar{\eta}, x', \bar{\eta}'\ s, T+\alpha)=$$

$$=M\left\{C_1^{(i)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon, T+\alpha)\,C_1^{(j)}(x, \bar{\eta}, \varepsilon_2, T+\alpha)\times\right.$$

$$\left.\times\, C_2^{(i)}(x', \bar{\eta}', \varepsilon, T+\alpha)\ C_2^{(j)}(x', \bar{\eta}', \varepsilon, T+\alpha)\,h(\bar{\eta}(s))\right\}. \tag{176}$$

Величины H_i^k ($i = 1, 2, 3$) вычисляются через совместные плотности величин $\xi_T(\cdot)$. Например,

$$H_2^{(k)} = \int_0^{T+\alpha}\int_0^{T+\alpha}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int h(\bar{\eta}(s) + z_1) F(t, \xi(t_1), \bar{\eta}(t_1) + z_2)\varphi_k(t_1)))\times$$

$$\times (F(t_2, \xi(t), \bar{\eta}(t_2) + z_3) p_3(z_1, z_2, z_3, t_1, t_2, T +$$

$$+ \alpha)\, dt_1 dt_2 dz_1 dz_2 dz_3. \qquad (177)$$

Аналогично получим

$$M\left\{\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega}{\lambda_k}C_1^{(k)}(\cdot, \cdot, \varepsilon, \cdot)\; C_2^{(k)}(\cdot, \cdot, \varepsilon, \cdot) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(C_1^{(k)}(\cdot, \cdot, \varepsilon, \cdot))^2\right\}\right\} = 1 - \omega\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}L_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, x', \bar{\eta}', T + \alpha) -$$

$$- \frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}L_2^{(k)}(x, \bar{\eta}, T + \alpha) +$$

$$+ \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}L_3^{(i,j)}(x, \bar{\eta}, x', \bar{\eta}', T + \alpha) + o(\omega^2) =$$

$$= 1 - \omega a_2 + \frac{\omega^2}{2}a_3 + o(\omega^2), \qquad (178)$$

где

$$L_1^{(k)}(\cdots) = MC_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, z_1, T + \alpha)\, C_2^{(k)}(x', \bar{\eta}', z_2, T + \alpha), \qquad (179)$$

$$L_2^{(k)}(\cdots) = MC_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, z, T + \alpha)\, C_1^{(k)}(x, \bar{\eta}, z_2, T + \alpha) \times \qquad (180)$$

$$\times C_2^{(i)}(x', \bar{\eta}', z_3, T + \alpha)\, C_2^{(j)}(x', \bar{\eta}', z_4, T + \alpha). \qquad (181)$$

Если теперь разложения (173) и (177) внесем в (108), получим

$$\hat{h}(y(s)) = \frac{b_1 - \omega b_2 + \frac{\omega^3}{2}b_3 + o(\omega^2)}{1 - \omega a_2 + \frac{\omega^2}{2}a_3 + o(\omega^2)} = C_1 + \omega C_2 + \frac{\omega^2}{2}C_3 + o(\omega^2). \qquad (182)$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3, входящие в (182), находятся из линейной алгебраической системы. Легко проверить, что

$$C_1 = b_1,$$

$$C_2 = b_2 = a_2 b_1,$$

$$C_3 = b_3 - 2a_2(b_2 - a_2 b_1) - a_3 b_1. \qquad (183)$$

Подставив эти значения в (182), окончательно получим разложение оптимального фильтра $\hat{h}(y(s))$ по малому параметру ω. Если же

$h(y(s)) \equiv y(s)$, то формула (182) даст разложение оптимального фильтра $\hat{y}(s)$ компоненты $y(s)$, только везде в вычислениях коэффициентов нужно положить $h(\eta(s)) = \bar{\eta}(s) + \varepsilon(s)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. В. Скороходу за постановку задач, рассматриваемых в настоящей статье, и за постоянное внимание в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаташвили А. Д. Оптимальная экстраполяция и фильтрация для одного класса случайных процессов. I.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 2, 1970.

2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

A. D. Shatashvily

OPTIMAL EXTRAPOLATION AND FILTRATION FOR SOME CLASS OF RANDOM PROCESSES. II

Summary

The problems of extrapolation and filtration for the functionals of solutions of stochastic differential equations are solved. The expressions for the optimal prediction and filtration are written in obvious form.

Поступила в редколлегию 22.4. 1969.