В. М. ШУРЕНКОВ, студ.
Киевский университет

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЦЕПЬЮ МАРКОВА

Общеизвестно, что всякую случайную последовательность (ξ_n, $n \geqslant 1$) можно превратить в цепь Маркова (η_n, $n \geqslant 1$), если положить $\eta_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Но из такого представления и марковского свойства последовательности (η_n, $n \geqslant 1$) нельзя сделать никаких выводов о структуре зависимостных связей последовательности (ξ_n, $n \geqslant 1$). Такие выводы возможны, если (ξ_n, $n \geqslant 1$) превратить в цепь Маркова (η_n, $n \geqslant 1$), но таким образом, чтобы событие $\{\eta_n = x\}$ содержало в себе минимальную информацию о прошлом последовательности (ξ_n, $n \geqslant 1$), необходимую для прогнозирования будущего этой последовательности. Доказательству возможности такого представления случайной последовательности посвящена настоящая статья.

Во множестве всех последовательностей (η_n, $n \geqslant 1$), обладающих свойством достаточности для прогнозирования будущего последовательности (ξ_n, $n \geqslant 1$), вводится отношение порядка. Максимальный элемент этого частично упорядоченного множества есть тривиальная цепь Маркова (η_n, $n \geqslant 1$), $\eta_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а минимальный — искомое представление последовательности (ξ_n, $n \geqslant 1$). Особенно интересен случай, когда минимальная цепь Маркова однородна во времени. Тогда многие предельные теоремы, справедливые для однородных цепей Маркова, можно перенести на случай немарковской последовательности (ξ_n, $n \geqslant 1$).

Пусть (ξ_n, $n \geqslant 1$) — случайная последовательность, I_n — множество значений случайной величины, ξ_n — счетное множество. Можно считать, не ограничивая общности, что все значения из I_n ξ_n принимает с положительными вероятностями. Обозначим σ_n и σ^n σ-алгебры событий, порожденные случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ и $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$ соответственно.

Определение 1. Событие $X \in \sigma_{n-1}$ называется достаточным, если равенство

$$P(A \mid B, X, \xi_n = i) = P(A \mid X, \xi_n = i) \quad (1)$$

имеет место для всякого события $A \in \sigma^n$ и для тех событий $B \in \sigma_{n-1}$, для которых выражение, стоящее в левой части равенства, определено.

Пусть $(\eta_n,\ n \geqslant 1)$ — такая случайная последовательность, что для всякого $n \geqslant 1$ случайная величина η_n σ_n-измерима. Тогда E_n — множество значений случайной величины η_n — счетное множество, и можно считать, что все значения из E_n η_n принимает с положительными вероятностями.

Определение 2. Случайная последовательность $(\eta_n,\ n \geqslant 1)$ называется достаточной, если для всех $n \geqslant 1$ и для всех $x \in E_n$ $\{\eta_n = x\} = X \bigcap \{\xi_n = i\}$, где $X \in \sigma_{n-1}$ и X — достаточное событие. Состояние i в этом случае называется индексом события $\{\eta_n = x\}$.

Обозначим Ξ множество достаточных последовательностей. Множество Ξ не пусто, так как в него всегда входит $(\eta_n,\ n \geqslant 1)$, где $\eta_n = (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$.

Определим во множестве Ξ отношение эквивалентности «$\equiv$».

Определение 3. $(\eta_n',\ n \geqslant 1) \equiv (\eta_n'',\ n \geqslant 1)$, если для всякого $n \geqslant 1$

$$\eta_n' = f_n(\eta_n''),$$

де f_n — взаимно однозначное отображение из E_n'' в E_n'. (Обозначение очевидно).

Легко проверить, что так определенное отношение будет отношением эквивалентности.

Множество классов эквивалентных последовательностей обозначим Ξ_0. Класс, содержащий $(\eta_n,\ n \geqslant 1)$, будем обозначать $[\eta_n,\ n \geqslant 1]$.

Далее, определим во множестве Ξ_0 отношение порядка «$\leqslant$».

Определение 4. $[\eta_n',\ n \geqslant 1] \leqslant [\eta_n'',\ n \geqslant 1]$, если всякое событие $\{\eta_n'' = x\}$ можно погрузить в некоторое событие $\{\eta_n' = y\}$.

Замечание. Очевидно, если $\{\eta_n'' = x\} \subset \{\eta_n' = y\}$, то эти события имеют одинаковые индексы и такое же включение имеет место для соответствующих им достаточных событий.

Очевидно, что определенное отношение не зависит от выбора представителей классов и удовлетворяет всем свойствам отношения порядка.

Теорема. В частично упорядоченном множестве Ξ_0 существует минимальный элемент и каждый его представитель является цепью Маркова.

Доказательство.

Лемма 1. Пусть $[\eta_n',\ n \geqslant 1] \leqslant [\eta_n'',\ n \geqslant 1]$, тогда если мы сопоставим каждому x из E_n'' такое y из E_n', что $\{\eta_n'' = x\} \subset \{\eta_n' = y\}$, то переберем таким образом все множество E_n'.

Доказательство. Предположим противное. Пусть мы таким образом переберем не все множество E_n', а только его правильную часть Е. Тогда

$$\sum_{y \in \mathrm{E}} P\{\eta_n' = y\} < 1.$$

Но так как для всякого $x \in E_n'' \{\eta_n'' = x\} \subset \{\eta_n' = y\}$, $y \in \mathrm{E}$, то

$$\sum_{y \in \mathrm{E}} P\{\eta_n' = y\} \geqslant \sum_{x \in \mathrm{E}_n''} P\{\eta_n'' = x\} = 1.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Если $X \in \sigma_{n-1}$ — достаточные события и $B \in \sigma_{n-1}$, то BX — достаточное событие.

Доказательство. Проверим равенство (1). Пусть $A \in \sigma^n$ и $C \in \sigma_{n-1}$. Тогда в силу достаточности X и $CB \in \sigma_{n-1}$

$$P(A \mid CBX, \xi_n = i) = P(A \mid X, \xi_n = i),$$
$$P(A \mid BX, \xi_n = i) = P(A \mid X, \xi_n = i).$$

Сравнивая эти два равенства, видим, что

$$P(A \mid CBX, \xi_n = i) = P(A \mid BX, \xi_n = i),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Если X и Y — достаточные события из σ_{n-1} и $P(XY) > 0$, то $Z = X \cup Y$ — достаточное событие.

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу достаточности X и Y

$$P(A \mid Y, \xi_n = i) = P(A \mid XY, \xi_n = i) = P(A \mid X, \xi_n = i), \; A \in \sigma^n.$$

Пользуясь этими равенствами, прямыми вычислениями нетрудно показать, что

$$P(A \mid Z, \xi_n = i) = P(A \mid X, \xi_n = i). \tag{2}$$

Пусть $B \in \sigma_{n-1}$. Тогда в силу леммы 2 BX — достаточное событие. Значит, в силу равенства (2)

$$P(A \mid BZ, \xi_n = i) = P(A \mid BX, \xi_n = i),$$

но

$$P(A \mid BX, \xi_n = i) = P(A \mid X, \xi_n = i).$$

Применяя равенство (2) справа налево, получим требуемое равенство

$$P(A \mid BZ, \xi_n = i) = P(A \mid Z, \xi_n = i).$$

Следствие. Если X_k, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность достаточных событий из σ_{n-1} и $P(X_k X_{k+1}) > 0$, то $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ — достаточное событие.

Доказательство. Положим $Y_m = \bigcup_{k=1}^{m} X_k$. По индукции легко доказать, что Y_m — достаточное событие. Очевидно также, что

$$Y_m \subset Y_{m+1} \text{ и } Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m.$$

Пусть $A \in \sigma^n$ и $B \in \sigma_{n-1}$. Тогда

$$P(A \mid BY, \xi_n = i) = \lim_{m\to\infty} P(A \mid BY_m, \xi_n = i) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} P(A \mid Y_m, \xi_n = i) = P(A \mid Y, \xi_n = i).$$

Для доказательства существования минимального элемента покажем, что всякое линейно упорядоченное подмножество Ξ имеет нижнюю грань, и воспользуемся леммой Цорна.

Пусть $[\eta_n^1, n \geqslant 1] \geqslant [\eta_n^2, n \geqslant 1] \geqslant \cdots \geqslant [\eta_n^k, n \geqslant 1] \geqslant \cdots$. Это значит, что перебирая всевозможные элементы x_1 из E_n^1, мы получим последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ такие, что $x_k \in E_n^k$ и

$$\{\eta_n^1 = x_1\} \subset \{\eta_n^2 = x_2\} \subset \cdots \subset \{\eta_n^k = x_k\} \subset \cdots .$$

Назовем последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ возрастающей.

Из леммы 1 следует, что любой элемент x_k из E_n^k встретится на k-м месте в некоторой возрастающей последовательности.

Возрастающую последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ обозначим x^*. Положим

$$Z(x^*) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\eta_n^k = x_k\}.$$

Так как все события $\{\eta_n^k = x_k\}$ имеют один и тот же индекс i, то

$$Z(x^*) = Y \cap \{\xi_n = i\},$$

где

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad X_k \in \sigma_{n-1},$$

$$\{\eta_n^k = x_k\} = X_k \cap \{\xi_n = i\},$$
$$X_k \subset X_{k+1}.$$

Применяя метод, использованный в доказательстве следствия леммы 1, легко убедиться, что Y — достаточное событие.

Определим на множестве возрастающих последовательностей отношение эквивалентности «$\sim$».

Определение 5. $x^* \sim y^*$, если существует такая цепочка последовательностей $x^* = \overset{*}{x}_0, \overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_n = y^*$, что

$$P(Z(\overset{*}{x}_k), Z(\overset{*}{x}_{k+1})) > 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Так определенное отношение, очевидно, будет отношением эквивалентности. Класс эквивалентных последовательностей, содержащий x^*, обозначим $[x^*]$.

Непосредственно из определения следует, что последовательности $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_{n-1}$ также входят в $[x^*]$. Следовательно, все элементы класса $[x^*]$ можно расположить в последовательность $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots$ $\ldots, \overset{*}{x}_k, \ldots$ так, что

$$P(Z(\overset{*}{x}_k),\ Z(\overset{*}{x}_{k+1})) > 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Обозначим

$$Z[x^*] = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z(\overset{*}{x}_k).$$

Нетрудно убедиться в том, что все события $Z(\overset{*}{x}_k)$ имеют один и тот же индекс i и, следовательно,

$$Z[x^*] = Z \bigcap \{\xi_n = i\},$$

где

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \quad Z(\overset{*}{x}_k) = Y_k \bigcap \{\xi_n = i\}.$$

В силу следствия леммы 3 Z — достаточное событие.

Определим случайную величину $\overset{*}{\eta}_n$. В качестве множества значений возьмем множество классов эквивалентных последовательностей и положим

$$\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\} = Z[x^*] \bigcap \overline{\bigcup_{\substack{y^* \bar{\in} [x^*] \\ Z[x^*] \cap Z(y^*) \neq \varnothing}} Z(y^*)}$$

(под $\bar{X}$ будем понимать дополнение события X).

Учитывая, что участвующие в определении события $Z(y^*)$ имеют все один и тот же индекс, совпадающий с индексом i события $Z[x^*]$, нетрудно элементарными теоретико-множественными преобразованиями событие $\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\}$ привести к виду

$$\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\} = BZ \bigcap \{\xi_n = i\},$$

где $B \in \sigma_{n-1}$.

Очевидно также, что всякое событие $\{\overset{k}{\eta}_n = x_k\}$ содержится в некотором событии $\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\}$. Просто в качестве $[x^*]$ надо взять класс, содержащий последовательность, в которой на k-м месте стоит x_k. Отсюда

$$\sum_{[x^*]} P\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\} \geqslant \sum_{x_1 \in E_n^1} P\{\overset{1}{\eta}_n = x_1\} = 1,$$

следовательно,

$$\sum_{[x^*]} P\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что при различных $[x^*]$ и $[y^*]$ события $\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\}$ и $\{\overset{*}{\eta}_n = [y^*]\}$ не пересекаются, т. е. $\overset{*}{\eta}_n$ действительно будет случайной величиной. Кроме того,

$$\{\overset{*}{\eta}_n = [x^*]\} = BZ \cap \{\xi_n = i\},$$

где $Z \in \sigma_{n-1}$ — достаточное, а $B \in \sigma_{n-1}$.

Значит, $(\overset{*}{\eta}_n,\ n \geqslant 1)$ — достаточная последовательность, а $[\overset{*}{\eta}_n,\ n \geqslant 1]$ есть искомая нижняя грань. Отсюда и из леммы Цорна следует, что в Ξ_0 существует минимальный элемент.

Перейдем к заключительной части доказательства.

Лемма 4. Если $(\eta_n,\ n \geqslant 1)$ — достаточная последовательность, то событие $\{\eta_n = x\} \in \sigma_n$ — достаточное.

Доказательство. Прежде всего перепишем равенство (1) в терминах достаточных последовательностей. Пусть $A \in \sigma^n$, $B \in \sigma_{n-1}$. Тогда

$$P(A \mid B,\ \eta_n = x) = P(A \mid \eta_n = x). \tag{3}$$

Положим $A = \{\xi_{n+1} = j\} \cap A_1$. Тогда

$$P\{\xi_{n+1} = j,\ A_1 \mid B,\ \eta_n = x\} = P(\xi_{n+1} = j,\ A_1 \mid \eta_n = x),$$
$$P\{\xi_{n+1} = j \mid B,\ \eta_n = x\} = P(\xi_{n+1} = j \mid \eta_n = x).$$

Если мы почленно разделим верхнее равенство на нижнее, то получим

$$P(A_1 \mid B,\ \eta_n = x,\ \xi_{n+1} = j) = P(A_1 \mid \eta_n = x,\ \xi_{n+1} = j).$$

Здесь $B \in \sigma_{n-1}$, а нам нужно выполнение этого равенства при $B \in \sigma_n$.

Пусть $B \in \sigma_n$. Тогда

$$B \cap \{\eta_n = x\} = B \cap \{\xi_n = i\} \cap X.$$

Но событие $B \cap \{\xi_n = i\}$ можно представить в виде

$$B \cap \{\xi_n = i\} = B_1 \cap \{\xi_n = i\},$$

где $B_1 \in \sigma_{n-1}$, что и доказывает лемму.

Следующая лемма является ключевой в доказательстве теоремы.

Лемма 5. Если $[\eta_n,\ n \geqslant 1]$ — минимальный элемент в Ξ_0 и $P\{\eta_n = x,\ \eta_{n+1} = y\} > 0$, $\{\eta_{n+1} = y\} = X \cap \{\xi_{n+1} = i\}$, то $\{\eta_n = x\} \subset X$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{\eta_n = x\} \cup X \neq X$. Обозначим $Z = \{\eta_n = x\} \cup X$. Так как X и $\{\eta_n = x\}$ — достаточные события и $P\{\eta_n = x,\ X\} > 0$, то Z — достаточное событие.

Обозначим Е множество элементов z из E_{n+1} таких, что $\{\eta_{n+1} = z\}$ имеет индекс i и $Z \cap \{\eta_{n+1} = z\} \neq \varnothing$. Выберем из Е множество E_1 таких элементов z_1, что $P\{Z,\ \eta_{n+1} = z_1\} > 0$. Определим случайную величину $\overset{*}{\eta}_{n+1}$:

$$\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = y\} = [(Z \cap \{\xi_{n+1} = i\}) \cup \bigcup_{z_1 \in \mathrm{E}_1} \{\eta_{n+1} = z_1\}] \cap \overline{\bigcup_{z \in \mathrm{E}/\mathrm{E}_1} \{\eta_{n+1} = z\}},$$

и если $u \overline{\in} \mathrm{E}$, то положим $\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = u\} = \{\eta_{n+1} = u\}$.

Несложными теоретико-множественными преобразованиями приведем событие $\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = y\}$ к виду $\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = y\} = BY \cap \{\xi_{n+1} = i\}$, где $B \in \sigma_n$, а Y — достаточное событие из σ_n. Нетрудно проверить, что всякое событие $\{\eta_{n+1} = v\}$ содержится в некотором событии $\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = u\}$. Отсюда следует, что

$$P\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = y\} + \sum_{u \in \bar{\mathrm{E}}} P\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = u\} = 1.$$

Тривиально проверяется, что при различных u и v события $\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = u\}$ и $\{\overset{*}{\eta}_{n+1} = v\}$ не пересекаются.

Значит, $\overset{*}{\eta}_{n+1}$ действительно является случайной величиной, и последовательность $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \overset{*}{\eta}_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots)$ — достаточная. Очевидно также, что $[\eta_1, \ldots, \eta_n, \overset{*}{\eta}_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots] \leqslant [\eta_n, n \geqslant 1]$. Но так как $[\eta_n, n \geqslant 1]$ — минимальный элемент в Ξ_0, то $(\eta_1, \ldots, \eta_n, \overset{*}{\eta}_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots) \equiv (\eta_n, n \geqslant 1)$. Учитывая построение случайной величины $\overset{*}{\eta}_{n+1}$, убеждаемся, что $\overset{*}{\eta}_{n+1} = \eta_{n+1}$, т. е.

$$X \cup \{\eta_n = x\} = X.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь уже нетрудно проверить марковское свойство для $(\eta_n, n \geqslant 1)$, если $[\eta_n, n \geqslant 1]$ — минимальный элемент в Ξ_0.

Случай 1. $P\{\eta_n = x_n, \eta_{n+1} = x_{n+1}\} = 0$. Марковское свойство выполняется тривиальным образом

$$P\{\eta_{n+1} = x_{n+1} \mid \eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n\} = 0 = P\{\eta_{n+1} = x_{n+1} \mid \eta_n = x_n\}.$$

Случай 2. $P\{\eta_n = x_n, \eta_{n+1} = x_{n+1}\} > 0$. Здесь

$$P\{\eta_{n+1} = x_{n+1} \mid \eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n\} =$$
$$= P\{X, \xi_{n+1} = i \mid \eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n\} =$$
$$= P\{\xi_{n+1} = i \mid \eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n\} = P\{\xi_{n+1} = i \mid \eta_n = x_n\},$$

так как

$$P\{X \mid \eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n\} = 1$$

в силу того, что $\{\eta_n = x_n\} \subset X$, и равенства (3). С другой стороны,

$$P\{\eta_{n+1} = x_{n+1} \mid \eta_n = x_n\} = P\{X, \xi_{n+1} = i \mid \eta_n = x_n\} =$$
$$= P\{\xi_{n+1} = i \mid \eta_n = x_n\}$$

по тем же соображениям. Следовательно,

$$P\{\eta_{n+1} = x_{n+1} \mid \eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n\} = P\{\xi_{n+1} = i \mid \eta_n = x_n\} =$$
$$= P\{\eta_{n+1} = x_{n+1} \mid \eta_n = x_n\},$$

что и требовалось доказать. Марковость остальных представителей класса $[\eta_n, n \geqslant 1]$ очевидна.

Хотя изложенный метод нахождения минимальной марковской последовательности не является конструктивным, все же он позволяет получить некоторые интересные следствия.

Например, пусть $(\xi_n, n \geqslant 1)$ — такая последовательность, что минимальная цепь Маркова $(\eta_n, n \geqslant 1)$ однородна и образует один возвратный класс с периодом 1. Обозначим $\pi(x)$ предельное распределение цепи $(\eta_n, n \geqslant 1)$

$$\pi(x) = \lim P\{\eta_n = x\}.$$

Положим $P_i(x) = P\{\xi_n = i \mid \eta_{n-1} = x\}$. Тогда последовательность $(\xi_n, n \geqslant 1)$ также имеет предельное распределение, которое выражается через $\pi(x)$ и $P_i(x)$. Действительно,

$$\lim P\{\xi_n = i\} = \lim \sum_x P\{\eta_{n-1} = x\} \; P_i(x) = \sum_x \pi(x) P_i(x).$$

V. M. Shurenkov

REPRESENTATION OF ARBITRARY RANDOM SERIES BY MARKOV CHAIN

Summary

Let $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ be an arbitrary random series, F_n — algebra generated by variables $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. The possibility of the construction of the Markov chain $\{\eta_n, n \geqslant 1\}$ that η_n are F_n-measured for every n is proved.

Поступила в редколлегию 15.V. 1969.