П. И. ЮДИЦКАЯ, инж.
НИИ строительного производства

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО ПОЛЯ

В настоящей работе даны обобщения результатов Г. Крамера [2] и М. Г. Шура [3] на однородные изотропные нормальные случайные поля.

Рассмотрим $\xi(\bar{x})$ — гауссовское сепарабельное однородное и изотропное действительное случайное поле, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{x} \in R^n$, R^n — n-мерное эвклидово пространство. Пусть

$$R_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = R_2(r) = M\xi(\bar{x}_1)\xi(\bar{x}_2) = \int_0^\infty \gamma_n(\lambda r) F(d\lambda),$$

$$r^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)',$$

где $F(\lambda)$ — неубывающая функция ограниченной вариации,

$$\gamma_n(\lambda r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) I_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)(\lambda r)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$M\xi(\bar{x}) = 0, \quad D\xi(\bar{x}) = 1.$$

Рассмотрим в пространстве R^n измеримую односвязную замкнутую область E_1. Пусть $\nu(E_1) = 1$, где ν — мера Лебега в R^n. Сделаем подобное преобразование области E_1 с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия k. Получим некоторую область E_k, $\nu(E_k) = k^n$. В работе рассматривается асимптотическое поведение максимума $\xi(\bar{x})$ в E_k при $k \to \infty$.

Теорема 1. Пусть рассматриваемое случайное поле $\xi(\bar{x})$ удовлетворяет условиям:

1) с вероятностью единица $\xi(\bar{x})$ дважды непрерывно дифференцируемое случайное поле;

2) $\xi(\bar{x})$ det невырождено:

$$P\{\det L = 0/\xi = t\} = 0,$$

где L — матрица, составленная из вторых производных поля;

3) $$\left|\frac{\partial^4 R_1(x)}{\partial x_1^{\varepsilon_1}\ldots\partial x_n^{\varepsilon_n}}-\frac{\partial^4 R_1(\bar 0)}{\partial x_1^{\varepsilon_1}\ldots\partial x_n^{\varepsilon_n}}\right|<K\sum_{i=1}^{n}(x_i)^{\delta},$$

$$\varepsilon_i=0,\ 2,\ 4;\quad K=\mathrm{const};\quad \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=4;\quad \delta>0;$$

4) $$|R_2(r)|<\frac{M}{r^n}\quad (M=\mathrm{const}).$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{P}\left\{\left|\max_{\bar x\in E_k}\xi(\bar x)-\sqrt{2\ln\nu(E_k)}\right|\leqslant\frac{m\ln\ln\nu(E_k)}{\sqrt{2\ln\nu(E_k)}}\right\}=1, \tag{1}$$

где $m>1$ при $n=2$, $m>\frac{n-1}{2}$ при $n\geqslant 3$.

Теорема 2. Если $\bar 0\in E_k$, то при выполнении условий теоремы 1 для всякого $\varepsilon>0$ почти наверное найдется такое случайное $K_0(\varepsilon)$, что при $K>K_0(\varepsilon)$

$$\left|\max_{\bar x\in E_k}\xi(\bar x)-\sqrt{2\ln\nu(E_k)}\right|<\frac{m_1\ln\ln\nu(E_k)}{\sqrt{2\ln\nu(E_k)}}, \tag{2}$$

где $m_1=2+\varepsilon$ при $n=2$, $m_1=\frac{n+1}{2}+\varepsilon$ при $n\geqslant 3$.

Для доказательства теоремы 1 установим сначала справедливость некоторых лемм.

Рассмотрим поток локальных максимумов случайного поля $\xi(\bar x)$, превышающих уровень c *). Для изучаемого поля существует $\mu_c(\bar x)$ — функция интенсивности этого потока относительно меры Лебега в R^n и

$$\mu_c(\bar x)=\mu_c=\mathrm{const}.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\xi(\bar x)$ удовлетворяет условиям 1—3 теоремы 1, а $c\geqslant 1$. Тогда

$$\mu_c\leqslant e^{-\frac{c^2}{2}}c^{n-1}f(n), \tag{3}$$

где $f(n)$ не зависит от c и конечна для всякого n.

Доказательство. Пусть $\xi_{x_i}(\bar x)$, $\xi_{x_ix_j}(\bar x)$ означают соответственно $\frac{\partial\xi(\bar x)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2\xi(\bar x)}{\partial x_i\partial x_j}$; K_i — конечные величины, не зависящие от c. Как показал Беляев [1], μ_c можно вычислить по формуле

$$\mu_c=\int_c^{\infty}\varphi_1(v,\bar 0)\,p(v,\bar 0)\,dv, \tag{4}$$

*) См. дополнение [4].

где

$$\varphi_1(v, \bar{0}) = \mathrm{M}(|\det \mathrm{L}|\, I(A)/\xi(\bar{x}) = v;\quad \xi_{x_i}(\bar{x}) = 0,\quad i = 1, \ldots, n)$$

($I(A)$ — индикаторная функция события A, заключающегося в том, что матрица L отрицательно определена), $p(v, \bar{u})$ — совместная плотность вероятностей событий

$$\xi(\bar{x}) = v,\ \xi_{x_i}(\bar{x}) = u_i\,(\bar{x} \in R^n,\ \bar{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in R^n).$$

В рассматриваемом случае формула (4) примет следующий вид:

$$\mu_c = \int_c^{\infty} \int \underset{A}{\cdots} \int |\det \mathrm{L}|\, \omega(v, 0, \ldots, 0, \xi_{x_1^2}, \xi_{x_1 x_2}, \ldots, \xi_{x_n^2})\, du,$$

где

$$du = dv d\xi_{x_1} \ldots d\xi_{x_n} d\xi_{x_1^2} d\xi_{x_1 x_2} \ldots d\xi_{x_{n-1} x_n} d\xi_{x_n^2},$$

$\omega(v, u_1, \ldots, u_n, z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn})$ — совместная плотность случайных величин $\xi(\bar{x}), \xi_{x_1}(\bar{x}), \ldots, \xi_{x_n}(\bar{x}) \ldots \xi_{x_n^2}(\bar{x})$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathrm{M}\xi_{x_i}\xi = \mathrm{M}\xi_{x_i}\xi_{x_j} = \mathrm{M}\xi_{x_i x_j}\xi_{x_k} = \mathrm{M}\xi\xi_{x_i x_j} = 0,$$
$$i \neq j,\ i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, получим такую оценку для μ_c:

$$\mu_c \leqslant K_1 \int_c^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_k \\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n \\ k = 1, \ldots n}} |\xi_{x_{i_1}^2} \ldots \xi_{x_{i_k}^2}|\, \omega_1(v, \xi_{x_1^2}, \ldots \xi_{x_n^2})\, du_1,$$
$$du_1 = dv d\xi_{x_1^2} \ldots d\xi_{x_n^2},$$

где ω_1 — совместная плотность $\xi, \xi_{x_1^2}, \xi_{x_2^2}, \ldots, \xi_{x_n^2}$.

Пусть B — корреляционная матрица, составленная для этих случайных величин. Можно показать, что

$$\mathrm{B} = \left\| \begin{matrix} 1 & -m_2 & \ldots & -m_2 \\ -m_2 & m_4 & \ldots & \frac{1}{3} m_4 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -m_2 & \frac{1}{3} m_4 & \ldots & m_4 \end{matrix} \right\|,$$

где

$$m_2 = \frac{1}{n} \int\limits_0 u^2 dF(u);$$

$$m_4 = \frac{3}{n(n+2)} \int\limits_0^\infty u^4 dF(u).$$

Итак, получаем

$$\mu_c \leqslant K_1 \int\limits_c^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \cdots \int\limits_{-\infty}^\infty \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ k=1,\ldots,n}} \psi_k (\xi_{x_1^2}, \ldots, \xi_{x_n^2}, v)\, d\sigma,$$

$$d\sigma = dv d\xi_{x_1^2} d\xi_{x_2^2} \ldots d\xi_{x_n^2}.$$

Здесь

$$\psi_k (\xi_{x_1^2}, \ldots, \xi_{x_n^2}, v) = |\xi_{x_{i_1}^2} \ldots \xi_{x_{i_k}^2}| \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta}\left[av^2 + 2b\sum_{i=1}^n \xi_{x_i^2} + d\sum_{i=1}^n (\xi_{x_i})^2 + h\left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^n \xi_{x_i^2}\xi_{x_j^2}\right)\right]\right\},$$

где

$$a = \frac{n+2}{3} m_4^n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}; \quad b = m_2\left(\frac{2}{3} m_4\right)^{n-1};$$

$$d = \frac{1}{3}\left[(n+1) m_4 - 3(n-1) m_2^2\right]\left(\frac{2}{3} m_4\right)^{n-2};$$

$$h = \left(m_2^2 - \frac{1}{3} m_4\right)\left(\frac{2}{3} m_4\right)^{n-2};$$

$$\Delta = \left(\frac{n+2}{3} m_4 - m_2^2 n\right)\left(\frac{2}{3} m_4\right)^{n-1}.$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$v = v; \quad y_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_{x_i^2};$$

$$y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\, \xi_{x_i^2},$$

$(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ — некоторый ортогональный базис пространства решений линейного однородного уравнения $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$.

После замены переменных и соответствующих преобразований получим

$$\mu_c < K_2 \int\limits_c^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} |y_1|^r \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta}\left(av^2 + \lambda y_1^2 + 2bvy_1\sqrt{n}\right)\right\} dv dy_1 <$$

$$< K_3 \int\limits_c^{\infty} |v|^n \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta}\left(a - \frac{b^2 n}{\lambda}\right)v^2\right\} dv,$$

где

$$\lambda = \frac{d + h(n-1)}{\Delta}.$$

Подставив значения a, b, λ, после преобразований получим

$$\mu_c \leqslant f(n)\, c^{n-1} e^{-\frac{c^2}{2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. В условиях леммы 1 и при $k > 1$, $c > 1$

$$P\{\max_{\bar{x}\in E_k} \xi(\bar{x}) > c\} \leqslant N_1 \nu(E_k)\, c^{n-1} e^{-\frac{c^2}{2}}, \qquad (5)$$

где N_1 не зависит от k.

Доказательство. Докажем неравенство (5) для параллелепипеда $D = (\bar{x} : 0 \leqslant x_i \leqslant X_i,\ \ i = 1, \ldots, n)$; $X_i > 1,\ \ i = 1, \ldots, n$.

Обозначим $U_c(D)$ — общее число локальных максимумов, находящихся внутри области D и превышающих уровень c. Пусть $D_{n-1}^{(i)}$ $i = 1, \ldots, 2n$ — грани параллелепипеда D. Тогда

$$P_n = P\{\max_{\bar{x}\in D} \xi(\bar{x}) > c\} \leqslant P\{U_c(D) > 0\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2n} P\{\max_{\bar{x}\in D_{n-1}^{(k)}} \xi(\bar{x}) > c\} = q_1 + \sum_{i=1}^{2n} P_{n-1}^{(i)}.$$

Очевидно, что

$$q_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} jP\{U_c(D) = j\} = MU_c(D) = \mu_c \nu(D) \leqslant f(n)\, c^{n-1} e^{-\frac{c^2}{2}} \nu(D).$$

Если $n - 1 = 1$, то, используя результаты статьи [2], имеем

$$P_{n-1}^{(i)} \leqslant e^{-\frac{c^2}{2}} \prod_{j=1}^{n} X_j N_3.$$

Если $n - 1 \geqslant 2$, то для $D_{n-1}^{(i)}$ проводим те же рассуждения, что и для D, и учитывая, что $X_i \geqslant 1$, получаем

$$P_{n-1}^{(i)} \leqslant e^{-\frac{c^2}{2}} c^{n-2} f(n-1) \prod_{j=1}^{n} X_i + \sum_{k=1}^{2n-2} P_{n-2}^{(ik)}.$$

Продолжая этот процесс, приходим к следующему:

$$P\{\max_{\bar{x}\in D}\xi(\bar{x})>c\}\leqslant N_2\prod_{i=1}^{n}X_i c^{n-1}e^{-\frac{c^2}{2}}.$$

Чтобы доказать (5) для произвольной области E_k, опишем около E_1 параллелепипед D_1; пусть $\nu(D_1)=\alpha\nu(E_1)$ и параллелепипед D_k получен из D_1 преобразованием подобия с коэффициентом подобия k и центром подобия в начале координат. Тогда, учитывая, что поле $\xi(\bar{x})$ однородно и изотропно, имеем

$$P\{\max_{\bar{x}\in E_k}\xi(\bar{x})>c\}\leqslant P\{\max_{\bar{x}\in D_k}\xi(\bar{x})>c\}<N_2\alpha c^{n-1}e^{-\frac{c^2}{2}}\nu(E_k),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Пусть для случайного поля $\xi(\bar{x})$ выполняется условие 4 теоремы 1, а k — достаточно большое. Тогда

$$P\{\max_{\bar{x}\in E_k}\xi(\bar{x})<c\}\leqslant\frac{M_1c^2(e^{\frac{c^2}{2}}+e^{\frac{c^2}{3}}\ln\nu(E_k))}{\nu(E_k)},\tag{6}$$

где M_1 не зависит от c, k.

Доказательство. Так как в область E_1 всегда можно вписать параллелепипед, а рассматриваемое случайное поле $\xi(\bar{x})$ однородно и изотропно, то достаточно доказать неравенство (5) для параллелепипеда D.

Аналогично [2] можно показать, что

$$P\{\max_{\bar{x}\in D}\xi(\bar{x})\leqslant c\}\leqslant\frac{M_2c^2e^{c^2}I}{\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^2},\tag{7}$$

где

$$I=\int_0^{X_1}\int_0^{X_2}\dots\int_0^{X_n}(X_1-z_1)\dots$$

$$\dots(X_n-z_n)\,|R_2(r)|\exp\left\{-\frac{c^2}{1+R(r)}\right\}dz_1\dots dz_n,$$

$$r^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2,\quad \bar{z}=(z_1,\dots,z_n).$$

Представим этот интеграл в виде $I=I_1+I_2$. В I_1 интегрирование будем вести в области $r^n<2M$, а в I_1 — по области $(\bar{z}\in D,\ r^n\geqslant 2M)$. В I_1 подынтегральное выражение не превосходит $e^{-\frac{c^2}{2}}\prod_{i=1}^{n}X_i$, следовательно,

$$I_1\leqslant M_4e^{-\frac{c^2}{2}}\prod_{i=1}^{n}X_i\quad(M_4=\mathrm{const}).$$

Учитывая условия леммы, запишем

$$I_2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} X_i e^{-\frac{2c^2}{3}} M_5 \int\limits_{(\bar{z}\in D,\, r^n \geqslant 2M)} \cdots \int \frac{1}{r^n}\, dz_1 \ldots dz_n < M_5 \prod_{i=1}^{n} X_i e^{-\frac{2c^2}{3}} \ln \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Следовательно, при достаточно больших $X_1, \ldots, X_n$

$$I_2 < M_6 \prod_{i=1}^{n} X_i e^{-\frac{2c^2}{3}} \ln \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Подставляя в (7) оценки для I_1 и I_2, получаем (6).

Доказательство теоремы 1. Подставляя в (5)

$$c = \sqrt{2 \ln \nu (E_k)} + \frac{m \ln \ln \nu (E_k)}{\sqrt{2 \ln \nu (E_k)}},$$

а в (6)

$$c = \sqrt{2 \ln \nu (E_k)} - \frac{m \ln \ln \nu (E_k)}{\sqrt{2 \ln \nu (E_k)}},$$

получаем соответственно

$$P_1 = P \left\{ \max_{\bar{x}\in E_k} \xi (\bar{x}) - \sqrt{2 \ln \nu (E_k)} > \frac{m \ln \ln \nu (E_k)}{\sqrt{2 \ln \nu (E_k)}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T_1}{[\ln \nu (E_k)]^{m - \frac{n-1}{2}}}; \quad T_1 = \text{const};$$

$$P_2 = P \left\{ \max_{\bar{x}\in E_k} \xi (\bar{x}) - \sqrt{2 \ln \nu (E_k)} < - \frac{m \ln \ln \nu (E_k)}{\sqrt{2 \ln \nu (E_k)}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T_2}{[\ln \nu (E_k)]^{m-1}}; \quad T_2 = \text{const}.$$

Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} P_1 = \lim_{k\to\infty} P_2 = 0,$$

следовательно, справедливо утверждение (1).

Доказательство теоремы 2. Ввведем обозначения:

$$P_1 (k, \varepsilon) = P \left\{ \max_{\bar{x}\in E_k} \xi (\bar{x}) > \sqrt{2 \ln \nu (E_k)} + \frac{(m + 1 + \varepsilon) \ln \ln \nu E_k)}{\sqrt{2 \ln \nu (E_k)}} \right\};$$

$$P_2 (k, \varepsilon) = P \left\{ \max_{\bar{x}\in E_k} \xi (\bar{x}) < \sqrt{2 \ln \nu (E_k)} - \frac{(m + 1 + \varepsilon) \ln \ln \nu (E_k)}{\sqrt{2 \ln \nu (E_k)}} \right\}.$$

Аналогично [3] можно доказать, что для выполнения (2) достаточно, чтобы сходились следующие ряды:

$$\sum_{q=1}^{\infty} P_1 (e^q, \varepsilon) < \infty; \quad \sum_{q=1}^{\infty} P_2 (e^q, \varepsilon) < \infty. \tag{8}$$

Так как

$$P_1(e^q, \varepsilon) < \frac{T_1}{(qn)^{m+1+\varepsilon-\frac{n-1}{2}}};$$

$$P_2(e^q, \varepsilon) < \frac{T_2}{(qn)^{m+\varepsilon}},$$

и, кроме того, для всякого $n = 2, 3, \ldots$

$$m > \max\left(1, \frac{n-1}{2}\right),$$

то выполняется соотношение (8) и имеет место теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Ю. К. О всплесках и бликах случайных полей— ДАН СССР, **176**, 3, 1967.
2. H. Cramer. On the maximum of a normal stochastic process.— Bull. Amer. Math. Soc., **68**, 1962, 512—515.
3. Шур М. Г. О максимуме гауссовского стационарного процесса.— Теория вероят. и ее примен., **10**, 2, 1965.
4. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. «Мир», М., 1969.

P. I. Yuditskaya

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE GAUSSIAN FIELD MAXIMUM

Summary

Some theorems about the asymptotic behaviour of the maximum of the Gaussian homogeneous isotropic random fields are proved.

Поступила в редколлегию 16.IX. 1969.