М. И. ЮДИЦКИЙ, студ.
Киевский университет

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

В статье рассматриваются случайные блуждания частицы по прямой и по окружности, причем частица в некоторых точках может быть поглощена с вероятностью $r < 1$ (частично поглощающие экраны). Изучаются распределение расстояния от точки, из которой вышла частица, до точки ее поглощения; вероятности оседания частицы на интервалах; распределение времени блуждания частицы до поглощения. Далее, осуществляется переход к непрерывному блужданию, когда время между двумя последовательными шагами $\Delta t \to 0$. Рассмотрены также случайные блуждания с вероятностью поглощения на некоторое конечное время, после чего блуждание продолжается по тому же закону (временно частично поглощающие экраны).

Случайное блуждание с частично поглощающими экранами

Пусть на прямой по точкам с целочисленными координатами блуждает частица. В дискретные моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ она изменяет свое состояние. С вероятностью p (соответственно q) частица совершает шаг вправо (влево) в соседнюю целочисленную точку; с вероятностью r — остается в точке навсегда (поглощается), причем $p + q + r = 1$. В этом случае частично поглощающие экраны расположены во всех целочисленных точках.

Найдем вероятность A_k (B_k) того, что частица, выходящая из точки 0, поглотится в точке $k > 0$ ($k < 0$). Используя указанные в работе [1] формулы для вероятности первого достижения точки k частицей, вышедшей из 0, и вероятности возвращения, получаем

$$A_k = \frac{q}{\sqrt{1-4pq}} \left(\frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q} \right)^{|k|}, \qquad (1)$$

где $p + q = 1 - r < 1$.

В формуле для B_k p и q меняются местами.

Случайное блуждание по окружности. Рассмотрим блуждание частицы по окружности единичного радиуса. Пусть Δ — величина шага (длина дуги окружности, проходимой за один шаг). Будем считать 2π кратным Δ. Пусть p (или q) — вероятность шага против (или по) часовой стрелке, r — вероятность поглощения в точке, $p+q+r=1$. Частично поглощающие экраны расположены в точках окружности, расстояния которых от 0 равны $i\Delta$, где $i = 1, 2, \ldots, \frac{2\pi}{\Delta}$.

Обозначим через ξ расстояние от 0 до точки поглощения частицы, отсчитанное против часовой стрелки, и вычислим $\Phi(z)$ — функцию распределения ξ.

Пусть $r \to 0$, $\Delta \to 0$ таким образом, что $\frac{r}{\Delta} \to \lambda$ ($\lambda = \text{const}$) и $q = 0$. Тогда $A_k \sim rp^k$ и для любого $z \in [0, 2\pi]$

$$\Phi(z) = \boldsymbol{P}\{\xi < z\} = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ r\to 0}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\frac{z}{\Delta}} rp^{k+\frac{2\pi n}{\Delta}} = \frac{1-e^{-\lambda z}}{1-e^{-2\pi\lambda}}.$$

Если $\lambda = 0$, то случайная величина ξ распределена равномерно на $[0, 2\pi]$.

Пусть теперь $q \neq 0$. Предположим $p = \frac{1}{2} - x$, $q = \frac{1}{2} - y$, $x \downarrow 0$, $y \downarrow 0$, $\frac{x}{y} \to \nu$, $\frac{\sqrt{x+y}}{\Delta} \to \lambda$. В этом случае $r = x + y$.

Ясно, что блуждание частицы по окружности соответствует ее блужданию с теми же параметрами по прямой, причем вероятность для частицы осесть на дуге $(0, L)$ окружности равна вероятности осесть на одном из отрезков прямой вида:

$$(2\pi m,\ 2\pi m + L),\ \text{где}\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Действительно, для установления соответствия совмещаем точки 0 и 0_1, из которых начинает блуждать частица по прямой и окружности соответственно, и рассматриваем прямую как бы намотанной на окружность, причем положительная полуось наматывается против часовой стрелки, а отрицательная — по часовой стрелке. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}\{\xi < L\} = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ r\to 0}} \frac{r}{\sqrt{1-4pq}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\frac{L}{\Delta}} a^{k+\frac{2\pi n}{\Delta}} + \sum_{k=\frac{2\pi - L}{\Delta}}^{\frac{2\pi}{\Delta}} b^{k+\frac{2\pi n}{\Delta}} \right), \tag{2}$$

где

$$a = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q}, \quad b = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p},$$

a и b — вероятности первого попадания частицы из 0 в точку, отстоящую на Δ вправо и влево соответственно.

Итак, при $z \in [0, 2\pi]$

$$\Phi(z) = \boldsymbol{P}\{\xi < z\} = \frac{1 - e^{-2z\sqrt{2}} + e^{-\lambda(2\pi - z)\sqrt{2}} - e^{-2\pi\lambda\sqrt{2}}}{2(1 - e^{-2\pi\lambda\sqrt{2}})}. \quad (3)$$

Если $\lambda = 0$, то ξ распределена равномерно.

Непрерывное случайное блуждание по прямой. Рассмотрим случайное блуждание частицы по прямой с параметрами p, q и r, величиной шага $\Delta\varphi$ и промежутком времени между двумя последовательными шагами Δt. Экраны расположены в точках с координатами $i\Delta\varphi$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. За время t частица (если она не будет поглощена) совершит $\frac{t}{\Delta t}$ шагов. Для того чтобы получить модель непрерывного во времени блуждания с поглощением, нельзя устремлять $\Delta\varphi$ и Δt к нулю произвольным образом.

Чтобы среднее значение и дисперсия суммарного перемещения частицы

$$\boldsymbol{M}s = \frac{t}{\Delta t}\Delta\varphi(p - q),$$

$$\boldsymbol{D}s = \frac{t}{\Delta t}(\Delta\varphi)^2[p + q - (p - q)^2]$$

оставались конечными при всех t, будем аналогично [1] требовать ограниченность величины $\frac{(\Delta\varphi)^2}{\Delta t}$ и однопорядковость величин $(p - q)$ и $\Delta\varphi$. Поэтому положим

$$\frac{(\Delta\varphi)^2}{\Delta t} = m, \quad p = \frac{1}{2} - \frac{c}{m}\Delta\varphi, \quad q = \frac{1}{2} - \frac{d}{m}\Delta\varphi,$$

где m, c, d — положительные константы,

$$\frac{c + d}{m}\Delta\varphi = 1 - (p + q) = r,$$

т. е. r одного порядка с $\Delta\varphi$. Итак, $p - q = \frac{d - c}{m}\Delta\varphi$.

При $d = c$ случайное блуждание симметрично. При фиксированном $\Delta\varphi$ суммарное перемещение равно сумме конечного числа независимых случайных величин, причем

$$\boldsymbol{M}s = t(d - c), \quad \boldsymbol{D}s = mt + o(mt),$$

где $o(mt)$ — величина более высокого порядка малости, чем mt.

Обозначим через η_i величину смещения за i-й шаг. Пусть $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta t \to 0$ и выполнены указанные выше условия.

К последовательности независимых величин η_i применима центральная предельная теорема. Следовательно, вероятность того, что в момент t частица находится между точками φ_0 и φ_1 ($\varphi_0 < \varphi_1$), стремится к

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\varphi_0 - t(d-c)}{\sqrt{mt}}}^{\frac{\varphi_1 - t(d-c)}{\sqrt{mt}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{4}$$

Пусть ζ — время блуждания частицы до поглощения. Частица будет блуждать в момент t с вероятностью $(1-r)^{\frac{t}{\Delta t}}$. Тогда при $r \to 0$, $\Delta t \to 0$.

$$\boldsymbol{P}\{\zeta > t\} \sim (e^{-t})^{\frac{r}{\Delta t}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \frac{r}{\Delta t} \to \infty, \\ 1 & \text{при} \quad \frac{r}{\Delta t} \to 0, \\ e^{-\lambda t} & \text{при} \quad \frac{r}{\Delta t} \to \lambda. \end{cases} \tag{5}$$

Полученные выражения имеют место для любого $t \geqslant 0$. При наложенных выше на p, q, r, Δt, $\Delta\varphi$ условиях $\frac{r}{\Delta t} \to \infty$.

Экраны с переменной длительностью поглощения

Рассмотрим случайное блуждание частицы на прямой по точкам с целочисленными координатами, когда в дискретные моменты времени частица с вероятностью p (или q) совершает шаг вправо (или влево) в соседнюю целочисленную точку, r остается в данной точке, причем с вероятностью $r\rho_i$ на i единиц времени. Здесь $i = 1, 2, \ldots$; $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i = 1$; $p + q + r = 1$.

Введем случайную величину τ_0^k — количество шагов, за которое вышедшая из 0 частица впервые попадает в точку $k > 0$. Очевидно, что

$$\tau_0^k = \tau_0^1 + \tau_1^2 + \cdots + \tau_{k-1}^k,$$

где все τ_{i-1}^i — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Введем производящие функции $\Phi_k(s) = \boldsymbol{M} s^{\tau_0^k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\Phi_k(s) = [\Phi_1(s)]^k. \tag{6}$$

Стохастическое уравнение для τ_0^1 будет иметь вид

$$\tau_0^1 = 1 + \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p, \\ \tau_0^2 & \text{с вероятностью } q, \\ (i-1) + \tau_0^1 & \text{с вероятностью } r\rho_i, \qquad i = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $\rho(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i s^i$. Перейдем в (7) к производящим функциям. Тогда

$$\Phi_1(s) = \frac{1 - r\rho(s) - \sqrt{[1 - r\rho(s)]^2 - 4pqs^2}}{2qs}. \tag{8}$$

При $r = 0$ из (8) получим выведенную в работе [1] формулу. Зная $\Phi_1(s)$, можем найти различные характеристики рассматриваемого блуждания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. «Мир», М., 1964.

M. I. Yuditsky

THE RANDOM WALKS WITH ABSORPTION

Summary

Some characteristics of the random walks with absorption of a particle along both a straight line and circumference are studied.

Поступила в редколлегию 4.IV. 1969.