517.8
Т.33

Помещены статьи, посвященные статистике случайных процессов и полей, теории марковских процессов, распределениям в функциональных пространствах, теории массового обслуживания, предельным теоремам для случайных процессов, вопросам экстраполяции случайных процессов, вопросам планирования регрессионных экспериментов.

Рассчитан на специалистов по теории вероятностей, научных работников, занимающихся приложениями статистических и теоретико-вероятностных методов, а также на студентов старших курсов, специализирующихся по теории вероятностей.

Адрес редакции: Киев-17, Университет, кафедра теории вероятностей.

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{97\text{—}70}$

В. В. АНИСИМОВ, асс.
Киевский университет

МНОГОМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим при каждом $t \in (0, \infty)$ непрерывный справа полумарковский процесс (ПМП) $\varkappa_t(s) \in \{1, 2, \ldots\}$. Процесс задается матрицей переходных вероятностей $\| F_t(i, j, s) \|$, $i, j = 1, 2, \ldots$, причем если $\theta_t(k)$ — момент k-го скачка, т. е.

$$\theta_t(k) = \inf\{s : s > \theta_t(k-1),\ \varkappa_t(s) \neq \varkappa_t(\theta_t(k-1))\}$$

при $k \geqslant 1$ и $\theta_t(0) = 0$, а

$$\tau_t(\varepsilon_k) = \theta_t(k+1) - \theta_t(k),$$

то

$$F_t(i, j, s) = P\{\varepsilon_{k+1} = j,\ \tau_t(\varepsilon_k) < s / \varepsilon_k = i\},$$

где $\varepsilon_k = \varkappa_t(\theta_t(k))$.

Рассмотрим некоторую конечную область $I = \{1, 2, \ldots, r\}$. Введем следующие функционалы:

$$\alpha_t(i, k) = \inf\{\theta_t(l) : \theta_t(l) > \alpha_t(i, k-1),\ \varepsilon_l = i\},\ k \geqslant 1$$

$$(\alpha_t(i, 0) = 0),$$

$$\nu(t) = \max\{k : \theta_t(k) < t\},$$

$$\nu_i(t) = \max\{k : \alpha_t(i, k) < t\},$$

$$\chi_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } \varkappa_t(s) = i, \\ 0 & \text{при } \varkappa_t(s) \neq i, \end{cases}$$

$$\Omega_i(t) = \int_0^t \chi_i(s)\, ds, \qquad i \in I.$$

Здесь $\alpha_t(i, k)$ — момент k-го попадания в $\{i\}$, $\nu(t)$ — полное число скачков, $\nu_i(t)$ — количество попаданий, а $\Omega_i(t)$ — полное время пребывания процесса в $\{i\}$ за время t.

Будем изучать совместное предельное распределение случайного вектора $\{\nu, \Omega\} = \{\nu_i(t), \Omega_i(t), i = \overline{1, r}\}$ при соответствующей нормировке компонент, когда $t \to \infty$.

Предположим, что у вложенной цепи Маркова, которая задается матрицей

$$P(t) = \| p_t(i, j) \|,$$

где $p_t(i, j) = F_t(i, j, \infty)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, существует стационарное распределение $q_t(i)$, $i = 1, 2, \ldots$ и

$$M\tau_t(i) = m_i(t) < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$A(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_t(i)\, m_i(t) < \infty,$$

т. е. процесс $\varkappa_t(s)$ — эргодический [2].

Зададим на состояниях функционал

$$f_t(\varepsilon_k) = \varphi_i + f_i x, \text{ если } \varepsilon_k = i, \ \tau_t(\varepsilon_k) = x,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, x \in (0, \infty),$$

где φ_i и f_i — произвольные константы при $i \in I$ и $\varphi_i = f_i = 0$ при $i \overline{\in} I$. Тогда [7] изучение совместных предельных распределений случайного вектора (с. п. р. сл. в.) $\{\nu, \Omega\}$ сводится к изучению предельных распределений аддитивного функционала

$$S_j(t) = \sum_{k=0}^{\nu(t)-1} f_t(\varepsilon_k), \text{ если } \varepsilon_0 = j.$$

Покажем, что эта задача сводится к изучению предельных распределений аддитивного функционала от некоторого ПМП с конечным числом состояний.

Рассмотрим вспомогательный ПМП $\varkappa_t^*(s)$ с конечным числом состояний $I^* = \{1^*, 2^*, \ldots, r^*\}$, который строится по данному процессу следующим образом: пусть

$$\theta_t^*(k) = \min\{\theta_t(l), \ \theta_t(l) > \theta_t^*(k-1), \ \varepsilon_l \in I\}, \quad k \geqslant 1$$

($\Theta_t^*(0) = 0$), т. е. $\theta_t^*(k)$ — последовательные моменты попаданий в состояния области I. Тогда

$$\varkappa_t^*(s) = i^*, \text{ если } \varepsilon_k^* = i, \ \theta_t^*(k) \leqslant s < \theta_t^*(k+1),$$
$$k = 0, 1, \ldots, i = \overline{1, r},$$

где $\varepsilon_k^* = \varkappa_t(\theta_t^*(k))$.

Докажем, что процесс $\varkappa_t^*(s)$ однозначно строится по $\varkappa_t(s)$. Для этого достаточно показать, что матрица переходных вероятностей $\|F_t^*(i, j, s)\|$, $i, j \in I$ однозначно определяется матрицей $\|F_t(i, j, s)\|_{i, j=1, 2, \ldots}$, где

$$F_t^*(i, j, s) = \boldsymbol{P}\{\varepsilon_{k+1}^* = j, \ \tau_t^*(\varepsilon_k^*) < s/\varepsilon_k^* = i\}$$

$$(\tau_t^*(\varepsilon_k^*) = \theta_t^*(k+1) - \theta_t^*(k)).$$

Обозначим

$$\widehat{F}_t(k, j, s) = \boldsymbol{P}\{\widehat{\tau}_t(k) < s, \qquad \varkappa_t(\widehat{\tau}_t(k)) = j\},$$

где

$$\widehat{\tau}_t(k) = \inf\{u: \varkappa_t(u) \in I, \ \varkappa_t(0) = k\}, \quad j \in I, \quad k \bar{\in} I.$$

Заметим, что попасть из $\{i^*\}$ в $\{j^*\}$ за время, меньшее s, процесс $\varkappa_t(s)$ может двумя способами: либо перейти за это время из $\{i\}$ в $\{j\}$ за один скачок, либо, перейдя в состояние $\{k\}$, $k \bar{\in} I$ в момент u, $u < s$, попасть затем из $\{k\}$в $\{j\}$ за время, меньшее $s - u$. Отсюда для величин $F_t^*(i, j, s)$ и $\widehat{F}_t(k, j, s)$ можно получить следующие интегральные соотношения

$$F_t^*(i, j, s) = F_t(i, j, s) + \sum_{k \bar{\in} I} \int_0^s \widehat{F}_t(k, j, s-u)\, dF_t(i, k, u), \tag{2}$$

$$i, j \in I$$

$$\widehat{F}_t(k, j, s) = F_t(k, j, s) + \sum_{l \bar{\in} I} \int_0^s \widehat{F}_t(l, j, s-u)\, dF_t(k, l, u), \tag{3}$$

$$k \bar{\in} I, \quad j \in I.$$

Обозначим

$$\widehat{\varphi}_t(k, j, p) = \int_0^\infty e^{-ps}\widehat{F}_t(k, j, s)\, ds,$$

$$b_t(k, j, p) = \int_0^\infty e^{-ps}F_t(k, j, s)\, ds, \quad a_t(k, l, p) = \int_0^\infty e^{-ps}dF_t(k, l, s).$$

Тогда из (3) имеем

$$\widehat{\varphi}_t(k, j, p) = b_t(k, j, p) + \sum_{l \bar{\in} I} \varphi_t(l, j, p)\, a_t(k, l, p), \tag{4}$$

$$k \bar{\in} I.$$

Заметим, что

$$|a_t(k, l, p)| \leqslant \int_0^\infty dF_t(k, l, s) = p_t(k, l),$$

$$|b_t(k, j, p)| \leqslant \int_0^\infty e^{-ps}p_t(k, j)\, ds = p_t(k, j)$$

и система (4) является регулярной (см. [3], гл. 1, § 2), а мажорантная система для нее имеет вид

$$\hat{X}_k(j) = p_t(k, j) + \sum_{l \in I} \hat{X}_l(l)\, p_t(k, l), \tag{5}$$

$$k \bar{\in} I.$$

Из существования стационарного распределения следует, что (5) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 \leqslant \leqslant \hat{X}_k(j) \leqslant 1$. Отсюда следует, что система (3) имеет единственное ограниченное решение $\hat{F}_t(k, j, s) \leqslant \hat{X}_k(j)$, которое можно найти методом последовательных приближений, исходя из произвольной конечной системы начальных значений. Тем самым из (2) однозначно определяются $F_t^*(i, j, s)$.

Функционал f^* на $\varkappa_t^*(s)$, соответствующий функционалу f на $\varkappa_t(s)$, будет задан следующим образом:

$$f_t^*(\varepsilon_k^*) = \varphi_i + f_i x, \text{ если } \varepsilon_k^* = i, \ \tau_t(\varepsilon_k^*) = x, \tag{6}$$

$$k = 0, 1, \ldots, i \in I, \quad x \in (0, \infty).$$

Пусть

$$S_j^*(t) = \sum_{k=0}^{\nu^*(t)-1} f_t^*(\varepsilon_k^*), \text{ если } \varepsilon_0 = j$$

$$(\nu^*(t) = \max\{n : \theta_t^*(n) < t\}).$$

Обозначим $\tau_t(i) = \tau_t(\varepsilon_0)$, если $\varepsilon_0 = i$. Пусть

$$\tilde{\tau}_t(i) = \inf\{s : s > \tau_t(i), \ \varkappa_t(s) \in I\} - \tau_t(i).$$

Предположим, что для каждого $j \in I$ существуют $b_j(t)$ и $B_j(t)$ такие, что при $t \to \infty$

$$\left(\frac{1}{b_j(t)} \sum_{k=1}^{V(j)} (\tau_t^{(k)}(j) - m_j(t)), \ \frac{1}{B_j(t)} \sum_{k=1}^{V(j)} (\tilde{\tau}_t^{(k)}(j) - \tilde{m}_j(t))\right) \overset{\text{сл}^{*)}}{\Rightarrow} (\xi_j, \tilde{\xi}_j) \tag{7}$$

и

$$\frac{D(t)}{t} \to 0, \quad \frac{A(t)}{D(t)} \to 0.$$

---

*) В смысле слабой сходимости функций распределения. Здесь и в дальнейшем λ^κ, $\kappa = 1, 2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных с λ величин.

Здесь

$$D(t) = \max\left\{\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\, m(t),\ b_j(t),\ B_j(t),\ j \in I\right\},$$

$$m(t) = \max\{m_j(t),\ j \in I\}, \quad \tilde{m}_j(t) = \boldsymbol{M}\tilde{\tau}_t(j),$$

$$V(j) = \left[\frac{t}{A(t)}\, q_t^*(j)\right]$$

($[a]$ — целая часть a), $q_t^*(j)$, $j = \overline{1, r}$ — стационарное распределение для цепи с матрицей

$$\mathrm{P}^*(t) = \|p_t^*(i, j)\|, \ i, \ j \in I,$$

где $p_t^*(i, j) = F_t^*(i, j, \infty)$.

Пусть матрице $\overline{\mathrm{P}}^* = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}^*(t)$ соответствует один существенный класс. Тогда аналогично теореме 1 [7] можно показать, что если независимо от j, $j = \overline{1, r}$ при $t \to \infty$ *)

$$\boldsymbol{P}\left\{\frac{1}{b(t)}(S_j^*(t) - ta(t)) < z\right\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \Phi(z),$$

то и

$$\boldsymbol{P}\left\{\frac{1}{b(t)}(S_j(t) - ta(t)) < z\right\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \Phi(z),$$

и наоборот. Тем самым задача изучения с. п. р. сл. в. $\{\nu, \Omega\}$ сводится к изучению аддитивного функционала $S^*(t)$ от ПМП $\overset{*}{\varkappa}_t(s)$ с конечным числом состояний, что делалось в работах [7, 8].

Пусть

$$\psi_j(\lambda_1, \lambda_2) = \boldsymbol{M} \exp\{i(\lambda_1\xi_j + \lambda_2\tilde{\xi}_j)\}.$$

В частности, если величины $p_t(i, j)$ отличны от 0 лишь для конечного числа индексов j при $i \in I$, то

$$\psi_j(\lambda_1, \lambda_2) = \psi_j^{(1)}(\lambda_1)\,\psi_j^{(2)}(\lambda_2) \exp\{c_j\lambda_1\lambda_2\},$$

где c_j — некоторая константа, а $\psi_j^{(1)}(\lambda)$ $(\psi_j^{(2)}(\lambda))$ соответственно характеристические функции (х. ф.) величин ξ_j и $\tilde{\xi}_j$.

Если же $F_t(i, j, s) = p_t(i, j) F_t(i, s)$, $i \in I$, то величины $\tilde{\xi}_j$ и ξ_j независимы, т. е.

$$\psi_j(\lambda_1, \lambda_2) = \psi_j^{(1)}(\lambda_1)\,\psi_j^{(2)}(\lambda_2).$$

---

*) В дальнейшем все пределы берутся по t при $t \to \infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1) и (7) и матрице $\bar{P}^*$ соответствует один существенный класс и, кроме того, $\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\frac{m(t)}{b(t)} \to 0$. Тогда с. р. сл. в.

$$\left\{\frac{m(t)}{b(t)}\left(\nu_1(t) - \frac{tq_t(i)}{A(t)}\right),\ \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1}\left(\nu_1(t) - \frac{q_t(1)}{q_t(i)}\nu_i(t)\right),\right.$$

$$\left. i = \overline{2, r},\ b(t)^{-1} g_k(t)\left(\Omega_k(t) - \frac{tq_t(k)\,m_k(t)}{A(t)}\right),\ k = \overline{1, r}\right\}$$

слабо сходится к распределению с. х. ф. вида **)

$$\psi(\varphi_i, f_i, i = \overline{1, r}) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2(\varphi)}{2}\right\}\prod_{j=1}^{r}\psi_j(\rho_j f_j - \tilde{\rho}_j a(f),\ \alpha_j a(f)), \tag{8}$$

где параметры φ_i (f_i) соответствуют первым (последним) r компонентам вектора; $\sigma^2(\varphi)$ — невырожденная квадратичная форма переменных φ_i, $i = \overline{2, r}$, а

$$a(f) = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{r} c_i f_i.$$

Здесь

$$b(t) = \max\left\{b_i(t),\ B_i(t),\ \frac{m(t)}{A(t)},\ i = \overline{1, r}\right\};$$

$$g_k(t) = \min\left\{\frac{b(t)}{b_k(t)},\ \frac{m(t)}{m_k(t)}\right\};$$

$$\rho_i = \lim_{t\to\infty}\frac{b_i(t)}{b(t)} g_i(t);$$

$$\tilde{\rho}_i = \lim_{t\to\infty}\frac{b_i(t)\,m(t)}{b(t)\,A(t)};$$

$$c_i = \lim_{t\to\infty}\frac{m_i(t)}{m(t)};$$

$$\alpha_i = \lim_{t\to\infty}\frac{B_i(t)\,m(t)}{b(t)\,A(t)}.$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1, если $\rho_i = 0$, $i = \overline{1, r}$, то

$$P\left\{\frac{m(t)}{b(t)}\left(\nu_1(t) - \frac{tq_t(i)}{A(t)}\right) < x_1;\ \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1}\left(\nu_1(t) - \right.\right.$$

$$\left.- \frac{q_t(1)}{q_t(i)}\nu_i(t)\right) < x_i;\ i = \overline{2, r};\ b(t)^{-1} g_k(t)\left(\Omega_k(t) - \right.$$

**) Во всех теоремах предельное распределение не зависит от начального состояния j, $j = \overline{1, r}$.

$$- \frac{tq_t(k)\, m_k(t)}{A(t)} \Big) < y_k,\ k = \overline{1, r} \Big\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} G(x_2, \ldots, x_r)\,(1 -$$

$$- V(-\min(x_1,\ c_k^{-1} y_k,\ k = \overline{1, r}))), \tag{9}$$

где

$$V(x) = \boldsymbol{P}\left\{ \sum_{k=1}^{r} (\xi_k \tilde{\rho}_k + \tilde{\xi}_k \alpha_k) < x \right\}.$$

В этом случае можно уточнить вид распределения. Будем считать, что $m_1(t) = m(t)$.

Теорема 3. В условиях теорем 1 и 2, если $\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\,\frac{m(t)}{d(t)} \to 0$, с. р. сл. в.

$$\left\{ \frac{m(t)}{b(t)} \left(\nu_1(t) - \frac{tq_t(i)}{A(t)} \right);\ \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}} \right)^{-1} \left(\nu_1(t) - \frac{q_t(1)}{q_t(i)}\, \nu_i(t) \right); \right.$$

$$i = \overline{2, r};\ b(t)^{-1} g_1(t) \left(\Omega_1(t) - \frac{tq_t(1)\, m(t)}{A(t)} \right);$$

$$\left. \frac{q_t(k)\, m_k(t)}{q_t(1)\, m_1(t)\, d(t)} \left(\Omega_1(t) - \Omega_k(t)\, \frac{q_t(1)\, m_1(t)}{q_t(k)\, m_k(t)} \right),\ k = \overline{2, r} \right\}$$

слабо сходится к распределению с х. ф. вида

$$\exp\left\{ -\frac{\sigma^2(\varphi)}{2} \right\} \psi_1 \left(\sum_{i=2}^{r} f_i c_i \frac{\bar{q}_i}{\bar{q}_1} d_1,\ -\alpha_1 \bar{q}_1 (\varphi_1 + f_1) \right) \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{r} \psi_k(-f_k d_k,\ -\alpha_k \bar{q}_1 (\varphi_1 + f_1)), \tag{10}$$

где

$$d_i = \lim_{t \to \infty} \frac{b_i(t)}{d(t)},$$

$$d(t) = \max\{b_i(t),\ i = \overline{1, r}\},$$

$$\bar{q}_i = \lim_{t \to \infty} q_t(i).$$

Доказательство. Условия (7) и то, что матрице $\bar{P}^*$ соответствует один существенный класс, обеспечивают для процесса $\overset{*}{\varkappa}_t(s)$ при введении функционала, как в (6), выполнение условий теоремы 1 [7] и, значит, возможность приложения к данному процессу теорем 1—4 [8]. Тогда аналогично доказательству теорем 2—4 [8] показывается, что

$$\zeta(t) = \frac{1}{b(t)} (S^*(t) - ta(t)) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi(\varphi_2, \ldots, \varphi_r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} [(\rho_k f_k - \tilde{\rho}_k a(f))\, \xi_k + \alpha_k a(f)\, \tilde{\xi}_k].$$

Отсюда следует (8).

Здесь $\xi(\varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ соответствует закон $G(x_2, \ldots, x_r)$; величина $\xi(\varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ и пары величин $\{\xi_i, \xi_i\}$ независимы в совокупности;

а
$$a(t) = A(t)^{-1} \sum_{i=1}^{r} (\widehat{\varphi}_i + \widehat{f}_i m_i(t)),$$
$$\widehat{f}_i = g_i(t) f_i, \quad i = \overline{1, r},$$
$$\widehat{\varphi}_1 = m(t)\varphi_1 + b(t)\left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1} (\varphi_2 + \cdots + \varphi_r), \tag{11}$$
$$\widehat{\varphi}_k = -\frac{q_t(1)}{q_t(k)} b(t) \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1} \varphi_k, \quad k = \overline{2, r},$$

т. е. (11) указывает, как выбираются значения функционала с учетом нормирующих множителей.

Когда $\rho_i = 0$, $i = \overline{1, r}$,
$$\zeta(t) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} -a(f) \sum_{k=1}^{r} (\tilde{\rho}_k \xi_k + \alpha_k \tilde{\xi}_k),$$
откуда следует (9).

Теореме 3 соответствует следующее задание функционала:
$$f_t(1, x) = f_1 x + \frac{b(t)}{d(t)} \left(\sum_{k=2}^{r} f_k \frac{q_t(k)\, m_k(t)}{q_t(1)\, m_1(t)} \right) x +$$
$$+ m(t)\varphi_1 + b(t) \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1} (\varphi_2 + \cdots + \varphi_r);$$
$$f_t(i, x)^{*)} = -f_i \frac{b(t)}{d(t)} x - \frac{q_t(1)}{q_t(i)} b(t) \left(\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\right)^{-1} \varphi_i, \quad i = \overline{2, r}.$$

Аналогично, учитывая, что $\sqrt{\frac{t}{A(t)}} \frac{m(t)}{d(t)} \to 0$, можно показать, что
$$\zeta(t) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_1 d_1 \sum_{i=2}^{r} f_i c_i \frac{\bar{q}_i}{\bar{q}_1} - \tilde{\xi}_1 \alpha_1 \bar{q}_1 (\varphi_1 + f_1) - \sum_{i=2}^{r} (\xi_i f_i d_i +$$
$$+ \tilde{\xi}_i \alpha_i \bar{q}_1 (\varphi_1 + f_1)) + \xi(\varphi_2, \ldots, \varphi_r),$$
откуда следует (10). Доказательство теорем 1—3 закончено.

Исследуем теперь случаи, когда $\sqrt{\frac{t}{A(t)}} \frac{m(t)}{b(t)} \to c_1 \neq 0$ и $\sqrt{\frac{t}{A(t)}} \frac{m(t)}{d(t)} \to c_2 \neq 0$. Для этого введем пары состояний $\{i, j\}$, $i, j = \overline{1, r}$ и новый процесс $\varkappa_t^{**}(s)$, который строится по $\varkappa_t^{*}(s)$ следующим образом:

---

*) Здесь $f_t(i,x) = f_t(\varepsilon_k$ при $\varepsilon_k = i$, $\tau_t(\varepsilon_k) = x$.

$$\varkappa_t^{**}(s)=\{i,\ j\},\quad \text{если } \varepsilon_k^*=i,\ \varepsilon_{k+1}^*=j,\ \theta_t^*(k)\leqslant s<\theta_t^*(k+1),$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ i,\ j=\overline{1,\ r}.$$

Функционал f^{**} задается так:

$$f_t^{**}(\{i,\ j\})=f_t^*(i^*),\ i,\ j=\overline{1,\ r}.$$

Пусть $\tau_t^{**}(i,\ j)$ — случайная величина с функцией распределения

$$P\{\tau_t^{**}(i,\ j)<z\}=P\{\theta_t^*(k+1)-\theta_t^*(k)<z/\varepsilon_k^*=i,\ \varepsilon_{k+1}^*=j\}.$$

Представим $\tau_t^{**}(i,\ j)$ в виде

$$\tau_t^{**}(i,\ j)=\tau_t(i,\ j)+\tilde{\tau}_t(i,\ j),$$

где $\tau_t(i,\ j)$ — время, проведенное $\varkappa_t(s)$ непосредственно в состоянии $\{i\}$ (для функций распределения величин $\tau_t(i,\ j)$ и $\tilde{\tau}_t(i,\ j)$ можно также записать соответствующие интегральные соотношения, откуда они однозначно определяются).

Предположим, что для каждого $i,\ i=\overline{1,\ r}$ существует $\tilde{b}_i(t)$ и $\tilde{B}_i(t)$ такие, что

$$\left(\frac{1}{\tilde{b}_i(t)}\sum_{k=1}^{V(i,j)}(\tau_t^{(k)}(i,\ j)-m_{ij}(t)),\ \frac{1}{B_i(t)}\sum_{k=1}^{V(i,j)}(\tilde{\tau}_t^{(k)}(i,\ j)-\tilde{m}_{ij}(t))\right)\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}$$
$$\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}(\xi(i,\ j),\ \tilde{\xi}(i,\ j));\tag{12}$$
$$\frac{D(t)}{t}\to 0;\quad \frac{A(t)}{D(t)}\to 0,\tag{13}$$

где

$$D(t)=\max\{\tilde{b}_i(t),\ \tilde{B}_i(t),\ p_t^*(i,\ j)(m_{ij}^2(t)+\tilde{m}_{ij}^2(t)),\ i,\ j=\overline{1,\ r}\},$$

$$V(i,\ j)=\begin{cases}\left[\dfrac{t}{A(t)}q_t^*(i)\,p_t^*(i,\ j)\right] & \text{при } \dfrac{t}{A(t)}p_t^*(i,\ j)\to\infty,\\ 1 & \text{при } \dfrac{t}{A(t)}p_t^*(i,\ j)\to\mu_{ij},\ 0<\mu_{ij}<\infty,\end{cases}$$

а $m_{ij}(t)=M\tau_t(i,\ j)$ при $V(i,\ j)\to\infty$ и $m_{ij}(t)=0$ при $V(i,\ j)=1$ (то же для $\tilde{m}_{ij}(t)$).

При $\dfrac{t}{A(t)}p_t^*(i,\ j)\to 0$ будем считать правую часть равенства (12) равной нулю.

Пусть

$$\psi_{kj}(\lambda_1,\ \lambda_2)=M\exp\{i(\lambda_1\xi(k,\ j)+\lambda_2\tilde{\xi}(k,\ j))\}.$$

Положим

$$\tilde{\psi}_{kj}(\lambda_1,\ \lambda_2)=\psi_{kj}(\lambda_1,\ \lambda_2),$$

если $V(k, j) \to \infty$, и

$$\tilde{\psi}_{kj}(\lambda_1, \lambda_2) = \exp\{\mu_{kj}\vec{q}_k^*(\psi_{kj}(\lambda_1, \lambda_2) - 1)\},$$

если $V(i, j) = 1$. Тогда имеют место теоремы.

Теорема 4. В условиях теоремы 1 и (12), (13), если $\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\frac{m(t)}{d(t)} \to c \neq 0$, то с. р. сл. в., указанного в теореме 3, слабо сходится к распределению с х. ф.

$$\exp\left\{-\frac{\sigma^2(\varphi, f)}{2}\right\}\prod_{i=2}^{r}\prod_{j=1}^{r}\tilde{\psi}_{ij}(-f_i, \ -\alpha_i\vec{q}_1^*(\varphi_1+f_1)) \times$$
$$\times\prod_{j=1}^{r}\tilde{\psi}_{1j}\left(\sum_{k=2}^{r}f_kc_k\frac{\vec{q}_k}{\vec{q}_1}, -\bar{\alpha}_1q_1^*(\varphi_1+f_1)\right),$$

где величины α_i, c_i определяются, как и в теореме 1, но для величин $\tilde{b}_i(t)$, $\tilde{B}_i(t)$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (1), (12), (13), матрице $\bar{P}^*$ соответствует один существенный класс и $\sqrt{\frac{t}{A(t)}}\frac{m(t)}{b(t)} \to 0$. Тогда с. р. сл. в., указанного в теореме 1, слабо сходится к распределению с х. ф. вида

$$\exp\left\{-\frac{\sigma^2(\varphi, f)}{2}\right\}\prod_{i,j=1}^{r}\tilde{\psi}_{ij}\left(\rho_if_i - \tilde{\rho}_ia(f), \ \alpha_ia(f)\right).$$

Здесь $\sigma^2(\varphi, f)$ — невырожденная квадратичная форма переменных φ_i, f_i, $i = \overline{2, r}$.

Доказательство. Как легко понять, вложенная цепь для процесса $\varkappa_t^{**}(s)$ представляет один существенный класс с несущественными состояниями $\{i, j\}$, для которых $p_t^*(i, j) \to 0$ (если таковые имеются), причем из каждого такого $\{i, j\}$ с вероятностью, стремящейся к единице, процесс может перейти за один шаг в класс (по построению $\varkappa_t^{**}(s)$). В нашем случае для $\varkappa_t^{**}(s)$ справедлива лемма 1 [7] и для тех $\nu_{ij}(t)$, для которых $\frac{t}{A(t)}p_t^*(i, j) \to \infty$ (обозначим их множество через Λ) выполняется закон больших чисел, т. е.

$$\frac{\nu_{ij}(t)}{t}A(t) \xrightarrow{P} \bar{q}_i^*\bar{p}^*(i, j), \quad \frac{\nu^*(t)}{t}A(t) \xrightarrow{P} 1.$$

($\nu_{ij}(t)$ — количество попаданий в состояние $\{i, j\}$ за время t для процесса $\varkappa_t^{**}(s)$).

Если $\frac{t}{A(t)}p_t^*(i, j) \to \mu_{ij}$, $0 < \mu_{ij} < \infty$, то предельным для

$\nu_{ij}(t)$ будет пуассоновское распределение с параметром $\mu_{ij}\overset{\to *}{q_i}$. Если же $\mu_{ij}=0$, то можно сразу положить $p_t^*(i,j)=0$. Это следует из теоремы 1 [7], если для $\varkappa_t^{**}(s)$ ввести функционал

$$f_t^{**}(\{k,l\})=\begin{cases}1 \text{ при } \{k,l\}=\{i,j\},\\ 0 \text{ при } \{k,l\}\neq\{i,j\}.\end{cases}$$

Тогда легко видно, что $S(t)=\nu_{ij}(t)$ слабо сходится к пуассоновскому закону, поскольку величины $Y_t(k)$, введенные в [7], имеют вид

$$Y_t(k)=\begin{cases}1 \quad \text{с вероятностью } \mu_{ij}\overset{\to *}{q_i}\left(\dfrac{t}{A(t)}\right)^{-1}\\ 0 \quad \text{с вероятностью } 1-\mu_{ij}\overset{\to *}{q_i}\left(\dfrac{t}{A(t)}\right)^{-1}\end{cases}$$

с точностью до величин порядка $O\left(\dfrac{A(t)}{t}\right)$.

Представим $\zeta(t)=b(t)^{-1}(S^{**}(t)-ta(t))$ в следующем виде:

$$\zeta(t)=\sum_{\{i,j\}\in\Lambda}\zeta_t(i,j)+\sum_{\{i,j\}\overline{\in}\Lambda}\eta_t(i,j)+\gamma(t)+\delta(t).$$

Здесь

$$\zeta_t(i,j)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{A(t)}q_t^*(i)p_t^*(i,j)\right]}(Y_t^{(k)}(i,j)-M_t(i,j));$$

$$\eta_t(i,j)=\sum_{k=0}^{\nu_{ij}(t)}Y_t^{(k)}(i,j);$$

$$\gamma(t)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{A(t)}\right]}M_t(\varepsilon_k^*,\varepsilon_{k+1}^*),$$

$$\delta(t)\xrightarrow{p}0,$$

где $M_t(i,j)=MY_t(i,j)$, а

$$Y_t(i,j)=(\varphi_i+f_i\tau_t(i,j))-a(t)(\tau_t(i,j)+\tilde{\tau}_t(i,j)).$$

Величины $Y_t^{(k)}(i,j), i,j=\overline{1,r}, k=0,\dots$ независимы и не зависят от переходов во вложенной цепи. Величины $\nu_{ij}(t)$ $(\{i,j\}\overline{\in}\Lambda)$ конечны с вероятностью единица и асимптотически не зависят от $\xi_t(i,j)$ и $\gamma(t)$. Поэтому

$$\zeta(t)\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}\sum_{\{i,j\}\in\Lambda}(\xi(i,j)d_{ij}+\tilde{\xi}(i,j)\tilde{d}_{ij})+\xi(\varphi_i,f_i,i=\overline{2,r})+$$
$$+\sum_{\{i,j\}\overline{\in}\Lambda}\sum_{k=0}^{\omega(i,j)}(\xi^{(k)}(i,j)d_{ij}+\tilde{\xi}^{(k)}(i,j)\tilde{d}_{ij}),$$

где пары величин $\{\xi(i,j),\tilde{\xi}(i,j)\}$ $\xi(\varphi_i,f_i,i=\overline{2,r})$ независимы в совокупности, $\xi(\varphi_i,f_i,i=\overline{2,r})$ — нормально распределенная величина, d_{ij} и $\tilde{d}_{ij}$ — константы, зависящие от введения функционала, $\omega(i, j)$ — пуассоновские величины с параметрами $\mu_{ij} \cdot q_i$.

Вводя соответствующим образом функционал, легко получим теоремы 4 и 5.

Наши результаты позволяют, к примеру, для ПМП, у которого

$$F_i(i, j, s) = p(i, j) F(i, s), \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

в предположениях (1), (7), получить соответствующие результаты Кестена [5].

Примеры. 1. Рассмотрим цепь Маркова со счетным множеством состояний $\{1, 2, \ldots\}$, заданную матрицей переходных вероятностей $P = \| p_{ij} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Предположим, что цепь имеет стационарное распределение q_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть $I = \{1, 2, \ldots, r\}$. Обозначим

$$\tau_1 = \min\{k : \varepsilon_k = 1/\varepsilon_0 = 1\},$$

где ε_k — состояние цепи на k-м шаге (т. е. τ_1 — число шагов между двумя последовательными попаданиями в $\{1\}$).

Пусть $\nu_i(n)$ — количество попаданий в $\{i\}$ за n шагов. Тогда:

а) если $D\tau_1 < \infty$, то с. р. сл. в.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}(\nu_i(n) - nq_i),\ i = \overline{1, r}\right\}$$

слабо сходится к многомерному нормальному закону;

б) если $D\tau_1 = \infty$ и существует $b(n)$ такое, что

$$\frac{1}{b(n)} \sum_{k=1}^{[nq_1]} \left(\tau_1^{(k)} - \frac{1}{q_1}\right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_1,$$

то

$$P\left\{\frac{1}{b(n)}(\nu_1(n) - nq_1) < x_1;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\nu_1(n) - \frac{q_1}{q_i}\nu_i(n)\right) < x_i;\right.$$

$$\left. i = \overline{2, r}\right\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \left(1 - V\left(-\frac{x_1}{q_1}\right)\right) G(x_2, \ldots, x_r),$$

где $V(x) = P\{\xi_1 < x\}$, $G(x_2, \ldots, x_r)$ — многомерный нормальный закон.

Замечание. Утверждение а) обобщает одномерный результат Т. А. Сарымсакова [4], а б) согласуется с результатами В. А. Волконского [1].

2. Рассмотрим цепь с непрерывным временем, заданную матрицей плотностей переходов $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Пусть выполнено условие

$$\lambda_i < \infty,\ i = 1, 2, \ldots,\ A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_i}{\lambda_i} < \infty,$$

где $\lambda_i = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{ik}$, а q_i, $i = 1, 2, \ldots$ — стационарное распределение для цепи с матрицей $\| \lambda_{ij}\lambda_i^{-1} \|$, $i, j = 1, 2, \ldots$ (что эквивалентно (1)). Обозначим μ_1 — время между двумя последовательными попаданиями в $\{1\}$. Тогда:

а) если $D\mu_1 < \infty$, то с. р. сл. в.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\nu_i(t) - \frac{tq_i}{A} \right), \; \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\Omega_i(t) - \frac{tq_i}{A\lambda_i} \right), \; i = \overline{1, r} \right\}$$

слабо сходится к многомерному нормальному закону;

б) если $D\mu_1 = \infty$ и существует $b(t)$ такое, что

$$\frac{1}{b(t)} \sum_{k=1}^{\left[\frac{tq_1}{A}\right]} \left(\mu_1^{(k)} - \frac{A}{q_1} \right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_1,$$

то

$$P\left\{ \frac{1}{b(t)} \left(\nu_1(t) - \frac{tq_1}{A} \right) < x_1; \; \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\nu_1(t) - \frac{q_1}{q_i} \nu_i(t) \right) < x_i; \; i = \overline{2, r}; \right.$$

$$\frac{1}{b(t)} \left(\Omega_1(t) - \frac{tq_1}{A\lambda_1} \right) < y_1; \; \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\Omega_1(t) - \frac{q_1\lambda_k}{q_k\lambda_1} \Omega_k(t) \right) < y_k;$$

$$\left. k = \overline{2, r} \right\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} G(x_2, \ldots, x_r, y_2, \ldots, y_r) \times$$

$$\times \left(1 - V\left(-\frac{A}{q_1} \min(x_1, y_1\lambda_1) \right) \right).$$

Здесь $V(x) = P\{\xi_1 < x\}$, а $G(x_2, \ldots, x_r, y_2, \ldots, y_r)$ — многомерный нормальный закон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волконский В. А. Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний.— Теор. вероят. и ее прим., 2, в. 2, 1957.

2. Єжов І. І., Призва Г. Й. Про одне узагальнення ланцюгів Маркова з неперервним параметром.— Вісник КДУ, сер. матем., № 8, 1966.

3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М., 1962.

4. Сарымсаков Т. А. Матричный метод исследования цепей Маркова со счетным множеством состояний. Изд. САГУ, Ташкент, 1953.

5. Kesten H. Occupation times for Markov and semi-Markov chains.— Trans. Amer. Math. Soc., 103, 1, 1962.

6. Pyke R., Schaufele R. Limit theorems for Markov reneval processes.— Ann. Math. Stat., 35, 4, 1964.

7. Анисимов В. В. Предельные теоремы для полумарковских процессов. 1.— Теор. вероят. и матем. статистика, вып. 2, 1970.

8. Анисимов В. В. Предельные теоремы для полумарковских процессов. 2.— Теор. вероят. и матем. статистика, вып. 2, 1970.

V. V. Anisimov

MULTYDIMENSIONAL LIMIT THEOREMS FOR SEMI-MARKOV PROCESSES WITH COUNTABLE SET OF STATES

Summary

Limit multydimensional distributions for numder of hitting times and occupations times in some finite region for semi-Markov process with countable set of states in the scheme of series are investigated.

Поступила в редколлегию 15.IX. 1969.