В. М. БОРОДИХИН, асп.
Новосибирский университет

УСЛОВИЯ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВ МЕР НА НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Введение

Пусть (Ω, F, P) — фиксированное вероятностное пространство. Обозначим $X_\Gamma = \{X_\gamma(t),\ t \in [0,1]\}_{\gamma\in\Gamma}$ — некоторое семейство случайных процессов. Ему соответствует семейство $\mathfrak{M}_\Gamma = (\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ вероятностных мер, индуцированных процессами $\{X_\gamma(t),\ t \in [0,1]\}$ в пространстве $R[0,1]$ всех вещественных функций с σ-алгеброй, порожденной всеми цилиндрическими множествами. При некоторых дополнительных условиях выборочные траектории процесса $\{X_\gamma(t),\ t \ni [0,1]\}$ принадлежат лишь некоторому подмножеству $S[0,1]$ пространства $R[0,1]$, и меры μ_γ оказываются заданными на δ-алгебре подмножеств $S[0,1]$, порожденной цилиндрическими множествами из $S[0,1]$. Будем говорить в этом случае, что процесс $\{X_\gamma(t), t \in [0,1]\}$ реализуется в $S[0,1]$. В дальнейшем всюду предполагается, что $S[0,1]$ наделено топологической структурой полного сепарабельного метрического пространства. Примерами могут служить пространства $C[0,1]$, $D[0,1]$ и др. Под компактностью семейств мер в том или ином пространстве $S[0,1] \subset R[0,1]$ мы будем понимать секвенциальную компактность в пространстве $\mathfrak{M}(S)$ всех конечных мер на σ-алгебре борелевских подмножеств S. Топология в $\mathfrak{M}(S)$ есть слабая топология, индуцированная в нем из $C^*(S)$, алгебраического сопряженного к пространству $C(S)$ всех непрерывных ограниченных функционалов на S. Так, в обозначениях, принятых в [10], топология в $\mathfrak{M}(S)$ есть индуцированная топология $\sigma(C^*(S), C(S))$. Когда $S[0,1]$ — сепарабельное метрическое пространство, секвенциальная компактность в $\mathfrak{M}(S)$ совпадает с компактностью в обычном смысле ([10], стр. 80).

Будем называть множество предкомпактным, если его замыкание компактно.

Компактность семейства $\mathfrak{M}_\Gamma$ эквивалентна компактности семейства

$$\{L(f[X_\gamma(t)])\}_{\gamma\in\Gamma}$$

при любом $f \in C(S)$, причем $L(\xi)$ — функция распределения случайной величины ξ, и компактность $\{L(f[X_\tau(t)])\}_{\tau\in\Gamma}$ понимается в смысле слабой компактности семейства распределений. А. Н. Колмогоров доказал, что условие

$$E(|X(t_1) - X(t_2)|^p) < C|t_1 - t_2|^{1+r} \tag{1}$$

($p > 0$, $r > 0$, C — константа, не зависящая от t) достаточно для реализации сепарабельного случайного процесса $\{X(t),\ t\in[0,1]\}$ в $C[0,1]$. Н. Н. Ченцову принадлежит аналогичное условие реализации процесса в $D[0,1]$:

$$E(|X(t_1) - X(t_2)|^p |X(t_2) - X(t_3)|^q) < C|t_1 - t_3|^{1+r}, \tag{2}$$

где $p > 0$; $q > 0$; $r > 0$; $t_1 < t_2 < t_3$; C — константа, независящая от t.

Дж. Ламперти [1] и М. Вудруф [2] показали, что условия (1) и (2) в действительности достаточны для реализации процесса в $\mathrm{Lip}_\beta[0,1]$ и $D_\beta[0,1]$ соответственно при некоторых $\beta > 0$. Здесь $\mathrm{Lip}_\beta[0,1]$ — пространство всех вещественных функций $x(t)$, определенных для $t\in[0,1]$ с $x(0) = 0$ и таких, что

$$\|x(t)\|_\beta = \sup\frac{|x(t+\Delta t) - x(t)|}{|\Delta t|^\beta} + \sup|x(t)| < \infty.$$

Пространства $D_\beta[0,1]$, являющиеся аналогами $L_i p_\beta[0,1]$ для пространства $D[0,1]$, были введены и изучены *М.* Вудруфом [2]. Определяются они следующим образом.

Для $0 < \sigma \leqslant 1$ и любой вещественной функции $x(t)$, определенной на $[0,1]$, положим

$$\tilde{\omega}_x(\delta) = \left[\bigvee_{\substack{0\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant 1\\ t''-t'\leqslant 2\delta}} (|x(t') - x(t)| \wedge |x(t) - x(t'')|)\right] \vee$$

$$\vee\left(\bigvee_{0\leqslant h\leqslant\delta}|x(0) - x(h)|\right) \vee \left(\bigvee_{0\leqslant h\leqslant\delta}|x(1-h) - x(1)|\right);$$

$$m_x(z) = \tilde{\omega}_x(e^z + 0) \text{ для } z \leqslant 0,$$

$$m_x(z) = m_x(0) \text{ для } z > 0.$$

Здесь и далее $\vee$ и $\wedge$ обозначают соответственно sup и inf. Для $\beta > 0$ мы определим $D_\beta[0,1]$ как множество таких $f\in D[0,1]$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_f(z) e^{-\beta z} dz < \infty,$$

и топологизируем $D_\beta[0,1]$ метрикой d_β, определенной таким образом:

$$d_\beta(f, g) = \rho(\Gamma_f, \Gamma_g) + L_\beta(m_f, m_g),$$

где $\rho(\Gamma_f, \Gamma_g)$ обозначает расстояние между графиками f и g [8,9];

$$L_\beta(m_f, m_g) = \int_{-\infty}^{\infty} |m_f(z) - m_g(z)| e^{-\beta z} dz.$$

В работах [1 и 2] доказано также, что условия типа Колмогорова и Ченцова обеспечивают компактность семейств мер в $\mathrm{Lip}_\beta [0,1]$ и $D_\beta [0,1]$ соответственно. Тем самым расширяется класс $C(S)$ непрерывных ограниченных функционалов, которые фигурируют в (3). В частности, в работе [1] уточняется результат Ю. В. Прохорова ([9], теорема 2.1).

Е. Б. Дынкин [3] и Дж. Кинн [4] дали достаточные условия реализации процесса в пространствах $C[0,1]$ и $D[0,1]$ несколько иного рода, а именно: не предполагается существование моментов приращений.

В настоящей работе показано, что некоторые модификации условий Дынкина и Кинн обеспечивают компактность семейств мер в пространствах $C[0,1]$, $D[0,1]$, $\mathrm{Lip}_\beta [0,1]$, $D_\beta [0,1]$. В тех же терминах даются условия реализации процесса в $\mathrm{Lip}_\beta [0,1]$ и $D_\beta [0,1]$.

2. Компактность семейств мер на $C[0,1]$ и $D[0,1]$

Введем некоторые обозначения. Пусть $\{X_\gamma(t) = X_\gamma(t, \omega), t \in [0,1], \omega \in \Omega\} \in X_\Gamma$. Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma \in \Gamma$ положим

$$\alpha_\gamma(\varepsilon, \delta) = \bigvee_{t' \in [0,1]} \bigwedge_{U_{t'}} \bigvee_{\omega \in U_{t'}} \bigvee_{\substack{t'' \in [0,1] \\ 0 \leqslant t'' - t' \leqslant \delta}} \boldsymbol{P}\{|X_\gamma(t', \omega) - X_\gamma(t'', \omega)| > \varepsilon / F_{t'}\}, \tag{4}$$

где $F_t = \sigma\{X_\gamma(\tau), \tau \leqslant t\}$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $X_\gamma(\tau)$, $\tau \leqslant t$; $U_{t'}$ — произвольное множество из $F_{t'}$ полной вероятности. Как замечено в [5], точная нижняя граница по U_t в (4) достигается.

Найдем для вещественной функции $x(t)$, определенной на отрезке $[0,1]$, следующую величину:

$$\omega_x(\delta) = \bigvee_{\substack{t', t'' \in [0,1] \\ |t' - t''| \leqslant \delta}} |x(t') - x(t'')|.$$

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{M}_\Gamma = (\mu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — семейство мер, индуцированных семейством $X_\Gamma = \{X_\gamma(t), t \in [0,1]\}$ $\gamma \in \Gamma$ сепарабельных случайных процессов, причем выполнено следующее условие: при каждом $\varepsilon > 0$

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma(\varepsilon, \delta) = O(\delta), \quad \delta \to 0. \tag{5}$$

Тогда достаточным условием предкомпактности множества $\mathfrak{M}_\Gamma$ в $\mathfrak{M}(C[0,1])$ является предкомпактность семейства одномерных распределений $\{X_\gamma(0)\}_{\gamma \in \Gamma}$.

Доказательство. Как следует из леммы 2.1 ([9], § 2.2), достаточно установить, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \mu_\gamma\{x : \omega_x(\delta) > \varepsilon\} \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Этот факт вытекает из неравенства

$$\mu_\gamma\{x: \omega_x(\delta) > \varepsilon\} < \frac{2\alpha_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{4}, 2\delta\right)}{\delta},$$

доказанного Дынкиным [3], и условий теоремы.

В доказательстве следующих лемм используется метод, применявшийся Дж. Кини [4], Е. Б. Дынкиным [3] и А. В. Скороходом [6] для процессов Маркова.

Лемма 1. Пусть $\{X(t),\ t\in[0,1]\}$ — некоторый случайный процесс, $t_1 < t_2 < \ldots < t_l$ — семейство точек из $[0,1]$, причем $t_l - t_1 < \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Обозначим $X_1, X_2, \ldots, X_l$ соответствующие значения $X(t)$ в точках $t_1, t_2, \ldots, t_l$. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$

$$P\{\bigvee_{i<j}|X_i - X_j| > 4\varepsilon\} < \frac{2\alpha(\varepsilon, \delta)}{1-\alpha(\varepsilon, \delta)}, \tag{6}$$

где $\alpha(\varepsilon, \delta)$ определяется для $\{X(t),\ t\in[0,1]\}$ подобно (4).

Доказательство. Докажем сначала, что

$$P\{\bigvee_j |X_j - X_1| > 2\varepsilon\} < \frac{1}{1-\alpha(\varepsilon, \delta)} P\{|X_l - X_1| > \varepsilon\}. \tag{7}$$

Обозначим Λ_k следующее событие:

$$\Lambda_k = \{|X_1 - X_2| \leq 2\varepsilon, \ \ldots, \ |X_1 - X_{k-1}| \leq 2\varepsilon, \ |X_1 - X_k| > 2\varepsilon\}.$$

Имеем

$$P\{|X_1 - X_l| > \varepsilon\} > P\{|X_1 - X_l| > \varepsilon, \ \bigvee_j |X_j - X_1| > 2\varepsilon\} =$$

$$= \sum_{k=2}^{l} P\{|X_1 - X_l| \leq \varepsilon, \ \Lambda_k\} > \sum_{k=2}^{l} P\{|X_k - X_l| \leq \varepsilon \Lambda_k\} =$$

$$= \sum_{k=2}^{l} \int_{\Lambda_k} P\{|X_k - X_l| \leq \varepsilon / F_{t_k}\}\, dP > [1-\alpha(\varepsilon, \delta)] \times$$

$$\times \sum_{k=2}^{l} P\{\Lambda_k\} = [1-\alpha(\varepsilon, \delta)]\, P\{\bigvee_j |X_j - X_1| > 2\varepsilon\}.$$

Отсюда следует (7). Выражение (6) вытекает из (7) и таких соотношений

$$P\{\bigvee_{i<j}|X_i - X_j| > 4\varepsilon\} < P\{\bigvee_i |X_i - X_1| > 2\varepsilon\} +$$

$$+ P\{\bigvee_j |X_j - X_1| > 2\varepsilon\} < \frac{2}{1-\alpha(\varepsilon, \delta)}\, P\{|X_l - X_1| > \varepsilon\}.$$

Лемма 2. В условиях леммы 1

$$P\{\bigvee_{i<j<k}(|X_i - X_j| \wedge |X_j - X_k|) > 4\varepsilon\} < \left[\frac{\alpha(\varepsilon, \delta)}{1-\alpha(\varepsilon, \delta)}\right]^2.$$

Доказательство.

$$P\{\bigvee_{i<j<k}(|X_i-X_j|\wedge|X_j-X_k|)>4\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j<k}P\{|X_2-X_1|\leqslant 2\varepsilon,\ \ldots,\ |X_{j-1}-X_1|\leqslant 2\varepsilon,\ |X_j-X_1|>2\varepsilon,$$

$$|X_{j+1}-X_j|\leqslant 2\varepsilon,\ \ldots,\ |X_{k-1}-X_j|\leqslant 2\varepsilon,\ |X_k-X_j|>2\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_j E(P\{|X_2-X_1|\leqslant 2\varepsilon,\ \ldots,\ |X_{j-1}-X_1|\leqslant 2\varepsilon, |X_j-X_1|>2\varepsilon\}\times$$

$$\times P\{\bigvee_{k=j+1,\ldots,l}|X_k-X_j|>2\varepsilon/F_{t_j}\})\leqslant\frac{\alpha(\varepsilon,\delta)}{1-\alpha(\varepsilon,\delta)}\times$$

$$\times P\{\bigvee_j|X_j-X_1|>2\varepsilon\}\leqslant\left[\frac{\alpha(\varepsilon,\delta)}{1-\alpha(\varepsilon,\delta)}\right]^2.$$

Лемма 3. Пусть $T\subset[0,1]$ — произвольное конечное семейство. Тогда

$$P\{\bigvee_{\substack{0\leqslant t-\delta\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\delta\leqslant 1\\ t',t,t''\in T}}(|X(t')-X(t)|\wedge$$

$$\wedge|X(t)-X(t'')|)>4\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{2\delta}\left[\frac{\alpha(\varepsilon,2\delta)}{1-\alpha(\varepsilon,2\delta)}\right]^2.$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $t_0=0$, $t_1,\ldots,t_{n-1}$, $t_n=1$ так, чтобы $t_1-t_0=t_2-t_1=\ldots=t_{n-1}-t_{n-2}=2\delta$, $t_n-t_{n-1}\leqslant 2\delta$. Если $t'\leqslant t\leqslant t''$, $t''-t'\leqslant 2\delta$, то точки t', t, t'' содержатся в одном из отрезков $[t_{i-2},t_i]$, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда

$$P\{\bigvee_{\substack{0\leqslant t-\delta\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\delta\leqslant 1\\ t',t,t''\in T}}(|X(t')-X(t)|\wedge|X(t)-X(t'')|)>4\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=2}^{n}P\bigvee_{\substack{0\leqslant t-\delta\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+\delta\leqslant 1\\ t',t,t''\in[t_{i-2},t_i]\cap T}}(|X(t')-X(t)|\wedge$$

$$\wedge|X(t)-X(t'')|)>4\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{2\delta}\left[\frac{\alpha(\varepsilon,2\delta)}{1-\alpha(\varepsilon,2\delta)}\right]^2. \tag{9}$$

Лемма 4. а) Если в условиях леммы 1 $\{t_i\}$ — счетное семейство, для которого $\bigvee_{i,j}|t_i-t_j|\leqslant\delta$, то лемма 1 остается справедливой; б) Если в условиях леммы 3 T — счетное семейство, то лемма 3 также справедлива.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 [3].

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{M}_\Gamma=(\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство вероятностных мер, индуцированных семейством $X_\Gamma=\{X_\gamma(t),\ t\in[0,1]\}_{\gamma\in\Gamma}$ сепарабельных случайных процессов, причем выполнено следующее условие: при каждом $\varepsilon>0$

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}\alpha_\gamma(\varepsilon,\delta)=o(\sqrt{\delta}),\qquad\delta\to 0. \tag{10}$$

Тогда условием, достаточным для предкомпактности семейства $\mathfrak{M}_\Gamma$ в пространстве $\mathfrak{M}(D[0,1])$, является предкомпактность семейства конечномерных распределений, соответствующего X_Γ.

Доказательство. Достаточно ([8], стр. 253—254) установить справедливость следующего соотношения: при каждом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \bigvee_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma \{x : \bar{\omega}_x(\delta) > \varepsilon\} = 0, \tag{11}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\delta\to 0} \bigvee_{\gamma\in\Gamma} P\{\omega : \bar{\omega}_{X_\gamma(t,\omega)}(\delta) > \varepsilon\} = 0. \tag{11'}$$

В силу соотношения (7), леммы 4 и сепарабельности процессов имеем

$$P\{\bigvee_{0\leqslant t'\leqslant t''\leqslant\delta} |X_\gamma(t') - X_\gamma(t'')| > 2\varepsilon\} \leqslant \frac{\alpha_\gamma(\varepsilon,\delta)}{1-\alpha_\gamma(\varepsilon,\delta)} \tag{12}$$

для каждых $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in \Gamma$. Точно так же применение леммы 2.3 дает

$$P\{\bigvee_{\substack{0\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant 1\\ t''-t'\leqslant 2\delta}} (|X_\gamma(t') - X_\gamma(t)| \wedge$$

$$\wedge |X_\gamma(t) - X_\gamma(t'')|) > 4\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{2\delta}\left[\frac{\alpha_\gamma(\varepsilon,2\delta)}{1-\alpha_\gamma(\varepsilon,2\delta)}\right]. \tag{13}$$

Соотношение

$$P\{\bigvee_{1-\delta\leqslant t'\leqslant t''\leqslant 1} |X_\gamma(t') - X_\gamma(t'')| > 2\varepsilon\} \leqslant \frac{\alpha_\gamma(\varepsilon,\delta)}{1-\alpha_\gamma(\varepsilon,\delta)} \tag{14}$$

доказывается подобно (12).

Наконец, из (12), (13), (14) вытекает, что

$$P\{\bar{\omega}_{X_\gamma}(\delta) > \varepsilon\} \leqslant \frac{2\alpha_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{2},\delta\right)}{1-\alpha_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{2},\delta\right)} + \frac{1}{2\delta}\left[\frac{\alpha_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{4},2\delta\right)}{1-\alpha_\gamma\left(\frac{\varepsilon}{4},2\delta\right)}\right]^2$$

при каждых $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in \Gamma$, откуда и следует (11) в условиях теоремы.

3. Условия реализации процесса в $\mathrm{Lip}_\beta[0,1]$ и $D_\beta[0,1]$. Компактность семейств мер на $\mathrm{Lip}_\beta[0,1]$ и $D_\beta[0,1]$

Будем обозначать

$$\alpha_\gamma^{(\beta)}(\varepsilon,\delta) = \bigvee_{t'\in[0,1]} \bigwedge_{U_{t'}} \bigvee_{\omega\in U_{t'}} \bigvee_{t''\in[0,1]} P\{|X_\gamma(t',\omega) - X_\gamma(t'',\omega)| >$$

$$> \varepsilon\delta^\beta / F_{t'}\}, \tag{15}$$

где $\varepsilon, \delta > 0$; $\beta \geqslant 0$; $\gamma \in \Gamma$; $F_{t'}$, $U_{t'}$ — те же, что и в (4).

Если у процесса, входящего в определение (15), индекс γ опущен, то соответственно γ опускается и у $\alpha_\gamma^{(\beta)}(\varepsilon, \delta)$.

Для произвольной вещественной функции $x(t)$, определенной на отрезке $[0,1]$, полагаем

$$\omega(M) = \bigvee_{t', t'' \in M} |x(t') - x(t'')|.$$

Здесь $M \subset [0,1]$; $\omega_M(\Delta) = \omega(M \cap \Delta)$, где Δ — некоторый интервал из $[0,1]$. Если $|\Delta|$ обозначает длину интервала Δ, то $\omega_M^\delta = \bigvee_{|\Delta| \leq \delta} \omega_M(\Delta)$.

Лемма 5. Для того чтобы функция $x(t)$, определенная и ограниченная на множестве M, принадлежала пространству $\mathrm{Lip}_\beta(M)$, $\beta > 0$, т. е. чтобы

$$\bigvee_{\substack{t', t'' \in M \\ t' \neq t''}} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^\beta} < \infty, \tag{16}$$

необходимо и достаточно следующее условие:

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\omega_M^\delta}{\delta^\beta} < \infty. \tag{17}$$

Доказательство. *Необходимость.* При каждом $\delta > 0$

$$\frac{\omega_M^\delta}{\delta^\beta} = \bigvee_{\substack{t', t'' \in M \\ |t' - t''| \leq \delta}} \frac{|x(t') - x(t'')|}{\delta^\beta} \leq \bigvee_{\substack{t', t'' \in M \\ t' \neq t''}} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^\beta} = c < \infty,$$

откуда следует (17).

Достаточность. Обозначим $c = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\omega_M^\delta}{\delta^\beta} < \infty$. Пусть $\delta_0 > 0$ таково, что $\bigvee_{\delta_0 > \delta > 0} \frac{\omega_M^\delta}{\delta^\beta} \leq 2c$. Тогда

$$\bigvee_{\substack{t', t'' \in M \\ t' \neq t''}} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^\beta} = \left(\bigvee_{\substack{t', t'' \in M \\ 0 < |t' - t''| \leq \delta_0}} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^\beta} \right) \vee$$

$$\vee \left(\bigvee_{\substack{t', t'' \in M \\ \delta_0 < |t' - t''|}} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^\beta} \right) \leq \left(\bigvee_{0 < |t' - t''| \leq \delta_0} \frac{\omega_M^{|t' - t''|}}{|t' - t''|^\beta} \right) \vee$$

$$\vee \frac{\omega(M)}{\delta_0^\beta} \leq 2c \vee \frac{\omega(M)}{\delta_0^\beta} < \infty.$$

Условие (16) и лемма доказаны.

Лемма 6. Пусть $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$ — случайный процесс. Тогда для любого конечного множества $T \subset [0,1]$

$$P\{\omega_T(\Delta) > |\Delta|^\beta \varepsilon\} \leq 2\alpha^{(\beta)}(\varepsilon/4,\ |\Delta|). \tag{18}$$

Доказательство. Занумеруем точки множества $T \cap \Delta$ в порядке возрастания: $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — соответствующие значения $X(t) = X(t, \omega)$, зависящие от $\omega \in \Omega$ (для простоты ω везде опускается).

Обозначим

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\};$$

$V_\varepsilon(z_0)$ — дополнение $U_\varepsilon(z_0)$. Пусть

$$\Lambda_k = \{X'_1, X'_2, \ldots, X'_{k-1} \in U_{\varepsilon/2}(X'_0);\ X'_k \in V_{\varepsilon/2}(X'_0)\},$$

где $X'_i = X_i/|\Delta|^\beta$, $i = 0, 1, \ldots, n$ и f — вероятность того, что $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n \in U_{\varepsilon/2}(X_0)$.

Тогда имеем

$$P\{|X'_n - X'_0| < \tfrac{\varepsilon}{4}\} < f + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Lambda_k} P\left\{|X'_n - X'_0| < \tfrac{\varepsilon}{4} / F_{t_k}\right\} dP <$$

$$< f + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Lambda_k} P\left\{|X'_n - X'_k| > \tfrac{\varepsilon}{4} / F_{t_k}\right\} dP < f + \alpha^{(\beta)}\left(\tfrac{\varepsilon}{4}, |\Delta|\right). \quad (19)$$

Так как

$$P\left\{|X'_n - X'_0| < \tfrac{\varepsilon}{4}\right\} > 1 - \alpha^{(\beta)}\left(\tfrac{\varepsilon}{4}, |\Delta|\right) \quad (20)$$

и

$$P\{\omega_T(\Delta) > \varepsilon|\Delta|^\beta\} < 1 - f, \quad (21)$$

то из (19), (20), (21) следует (18).

Лемма 7. В условиях леммы 6

$$P\{\omega_T^\beta > \varepsilon\delta^\beta\} < \frac{2}{\delta}\,\alpha^{(\beta)}\left(\frac{\varepsilon}{2^{\beta+2}}, 2\delta\right).$$

Доказывается, как и лемма 3, с использованием результата леммы 6.

Не представляет труда доказать и следующее утверждение, аналогичное лемме 4.

Лемма 8. Для любого счетного множества Λ

$$P\{\omega_\Lambda^\beta > \varepsilon\delta^\beta\} < \frac{2}{\delta}\,\alpha^{(\beta)}\left(\frac{\varepsilon}{2^{\beta+2}}, 2\delta\right). \quad (22)$$

Теорема 3. Если $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$ — сепарабельный случайный процесс, для которого выполнено условие: при каждом

$$\varepsilon > 0, \quad \alpha^{(\beta)}(\varepsilon, \delta) = o(\delta), \quad \delta \to 0 \quad (23)$$

для некоторого $\beta > 0$, то с вероятностью 1 выборочные траектории процесса принадлежат пространству $\mathrm{Lip}_\beta\,[0,1]$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что условия теоремы обеспечивают непрерывность выборочных траекторий процесса с вероятностью 1 (условие Кинн — Дынкина). Следовательно, можем воспользоваться критерием, доказанным в лемме 5. Обозначим

$B_k = \left\{ \overline{\lim} \frac{\omega_M^\delta}{\delta^\beta} > k \right\}$, где $k \geqslant 1$, целое; $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Здесь M — множество сепарабельности процесса $\{X(t),\ t \in [0,1]\}$.

Очевидно, $P\{B\} = \lim_{k \to \infty} P\{B_k\}$. Пусть $\{\delta_m > 0\}_{m=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность, сходящаяся к 0 и зависящая от k, выбор которой мы уточним позже. При каждом $k \geqslant 1$ имеем

$$P\{B_k\} \leqslant P\left\{ \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\omega_M^{\delta_m}}{\delta_m^\beta} > k \right\} = P\left\{ \limsup_{m \to \infty} \left(\frac{\omega_M^{\delta_m}}{\delta_m^\beta} > k \right) \right\}. \quad (24)$$

Для применения леммы Бореля — Кантелли необходимо сделать оценку ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left\{ \frac{\omega_M^{\delta_m}}{\delta_m^{(\beta)}} > k \right\}.$$

Для этого используем выражение (15):

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left\{ \frac{\omega_M^{\delta_m}}{\delta_m^\beta} > k \right\} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\delta_m} \alpha^{(\beta)} \left(\frac{k}{2^{\beta+2}},\ 2\delta_m \right). \quad (25)$$

В силу условия (23) при каждом целом $k \geqslant 1$ последовательность $\{\delta_m\}$ можно выбрать таким образом, чтобы ряд в правой части неравенства (25) сходился. Тогда из леммы Бореля — Кантелли и соотношения (24) вытекает, что при каждом $k \geqslant 1$ $P\{B_k\} = 0$. Следовательно, $P\{B\} = 0$, и утверждение теоремы следует из сепарабельности процесса.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{M}_\Gamma = (\mu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — семейство вероятностных мер, индуцированных семейством $X_\Gamma = \{X_\gamma(t),\ t \in [0,1]\}_{\gamma \in \Gamma}$ сепарабельных случайных процессов, причем выполнено следующее условие: для некоторого $\beta > 0$ при любом $\varepsilon > 0$

$$\bigvee_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma^{(\beta)}(\varepsilon,\ \delta) = o(\delta), \quad \delta \to 0. \quad (26)$$

Тогда для того, чтобы семейство $\mathfrak{M}_\Gamma$ было предкомпактно в пространстве $\mathfrak{M}(\mathrm{Lip}_\beta[0,1])$ при любом β': $0 < \beta' < \beta$, достаточно, чтобы семейство конечномерных распределений, соответствующее X_Γ, было предкомпактно.

Доказательство. В силу леммы 2 [1] достаточно доказать, что

$$\lim_{B \to \infty} \bigvee_{\gamma \in \Gamma} P\{\omega : \|X_\gamma(t,\ \omega)\|_\beta > B\} = 0. \quad (27)$$

Справедливы такие неравенства

$$P\{\|X_\gamma(t)\|_\beta > B\} \leqslant P\left\{ \bigvee_{\substack{t,\, t+\Delta t \in [0,1] \\ \Delta t > 0}} \frac{|X_\gamma(t+\Delta t) - X_\gamma(t)|}{(\Delta t)^\beta} > \frac{B}{2} \right\} +$$

$$+P\left\{\bigvee_{t\in[0,1]}|X_\gamma(t)|>\frac{B}{2}\right\}\leqslant P\left\{\bigvee_{1>\delta>0}\frac{\omega^\delta_{[0,1]}}{\delta^\beta}>\frac{B}{2}\right\}+$$
$$+P\left\{\bigvee_{t\in[0,1]}|X_\gamma(t)|>\frac{B}{2}\right\}. \tag{28}$$

Здесь $\omega^\delta_{[0,1]}$ определяется для функции $X_\gamma(t)$.

Из доказательства теоремы 3 и условия (26) следует, что

$$\lim_{\delta_0\to 0}\bigvee_{\gamma\in\Gamma}P\left\{\bigvee_{0<\delta\leqslant\delta_0}\frac{\omega^\delta_{[0,1]}}{\delta^\beta}>\frac{B}{2}\right\}=0 \tag{29}$$

для любого $0<B<\infty$.

Кроме того, используя предкомпактность $\mathfrak{M}_\Gamma$ в $\mathfrak{M}(C[0,1])$, которая в условиях нашей теоремы имеет место (см. теорему 1), получаем

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}P\left\{\bigvee_{t\in[0,1]}|X_\gamma(t)|>\frac{B}{2}\right\}\underset{B\to\infty}{\to}0; \tag{30}$$

для фиксированного $\delta_0>0$:

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}P\left\{\bigvee_{\delta_0<\delta\leqslant 1}\omega^\delta_{[0,1]}>\frac{B}{2}\,\delta_0^\beta\right\}\underset{B\to\infty}{\to}0. \tag{31}$$

Из соотношений (28) — (31) получаем (27). Теорема доказана.

Теперь сформулируем аналоги теорем 3 и 4 для пространств $D_\beta[0,1]$.

Теорема 5. Если $\{X(t),\ t\in[0,1]\}$ — сепарабельный случайный процесс, для которого выполнено условие: для некоторого $\beta'>0$ при каждом $\varepsilon>0$

$$\alpha^{(\beta')}(\varepsilon,\ \delta)=o(\sqrt{\delta}),\quad \delta\to 0, \tag{32}$$

то с вероятностью 1 выборочные траектории процесса принадлежат пространству $D_\beta[0,1]$ для $0<\beta<\beta'$.

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{M}_\Gamma=(\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство вероятностных мер, индуцированных семейством $X_\Gamma(X_\gamma(t),\ t\in[0,1])_{\gamma\in\Gamma}$, сепарабельных случайных процессов, причем выполнено следующее условие: для некоторого $\beta'>0$ при любом $\varepsilon>0$

$$\bigvee_{\gamma\in\Gamma}\alpha^{(\beta')}_\gamma(\varepsilon,\ \delta)=o(\delta),\quad \delta\to 0. \tag{33}$$

Тогда для предкомпактности семейства $\mathfrak{M}_\Gamma$ в пространстве $\mathfrak{M}(D_\beta[0,1])$, где $0<\beta<\beta'$, достаточно предкомпактности семейства конечномерных распределений.

Доказательство теоремы 6. Достаточно показать, что

$$P\left\{\int_{-\infty}^{\infty}m_X(z)e^{-\beta z}dz<\infty\right\}=1.$$

Обозначим

$$A=\left\{\omega:\int_{-\infty}^{\infty} m_X(z)\,e^{-\beta z}dz<\infty\right\},$$

$$B_a=\left\{\omega:\int_{-\infty}^{a} m_X(z)\,e^{-\beta z}dz<\infty\right\},$$

где $\infty<a<\infty$.

Легко понять, что $A=B_a$ при любом a, $-\infty<a<\infty$. Оценим вероятность $P\{B_a\}$.

Аналогично тому, как было сделано при доказательстве теоремы 2, можно установить следующее соотношение: при любом $\varepsilon>0$

$$P\{\bar{\omega}_X(\delta)>\varepsilon\delta^{\beta'}\}<\frac{2\alpha^{(\beta')}(\varepsilon/2,\,\delta)}{1-\alpha^{(\beta')}(\varepsilon/2,\,\delta)}+\frac{1}{2\delta}\left[\frac{\alpha^{(\beta')}(\varepsilon/4,\,2\delta)}{1-\alpha^{(\beta')}(\varepsilon/4,\,2\delta)}\right]^{p}.$$

Условие (32) позволяет при малых δ опустить первое слагаемое в правой части этого неравенства, удвоив, например, второе. Учитывая это, имеем: при любом $\varepsilon>0$ и достаточно малых e^{z}

$$1-\frac{1}{e^{z}}[\alpha^{(\beta')}(\varepsilon/4,\;2e^{z})]^{k}<P\{m_X(z)\,e^{-\beta z}<\varepsilon e^{(\beta'-\beta)z}\},$$

откуда при достаточно малых e^{a}

$$1-\sum_{z\leq a}\left(\frac{1}{e^{z}}[\alpha^{(\beta')}(\varepsilon/4,\,2e^{z})]^{k}<P\left\{\int_{-\infty}^{a} m_X(z)\,e^{-\beta z}dz<\right.\right.$$

$$\left.<\varepsilon\int_{-\infty}^{a} e^{(\beta'-\beta)z}\,dz\right\}<P\,\{B_a\}.$$

В силу условия (32)

$$P\,\{B_a\}>1-\varepsilon_a,$$

где $\varepsilon_a\to 0$ при $a\to-\infty$.

Следовательно, $P\{A\}=1$; теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6 (с использованием теоремы 2.1 [2]) не вызывает затруднений.

Заметим, что если в теоремах 1, 2, 4, 6 условие компактности семейства конечномерных распределений заменить условием сходимости последовательности конечномерных распределений, то будет иметь место сходимость последовательности мер в соответствующих пространствах.

Рассмотрим пример. Пусть $\{X_n(t)\,t\in[0,1]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность случайных ломаных, построенных по суммам $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ зависимых случайных величин, удовлетворяющих условиям, несколько усиленным по сравнению с теоремой Бернштейна ([7], § 10, теорема в). А именно:

$$1)\;\; E(S_n^2)=B_n>Cn^{\lambda},\ \text{где}\ \lambda>1;$$

2) для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ $E(|x_i|^{\lambda}/F_k) < L$, где $i > k$, L не зависит от n, ω;

3) $E(|S_{k+g} - S_k|^{\lambda}/F_k) < Ng^{\lambda}$, где N не зависит от g, ω;

4) для $i - k > n^{\rho}$, где $0 < \rho < \frac{\lambda}{2}$ — фиксировано,

$$\bigvee_{\omega\in\Omega} |E(x_i/F_k)| < \frac{1}{n^{\mu}}, \text{ где } \mu > 1 - \frac{\lambda}{2}, \text{ и для } j - k > n^{\rho}$$

$$\bigvee_{\omega\in\Omega} |E(x_i x_j/F_k)| < \frac{1}{n^{2-\lambda}}.$$

Здесь всюду $F_k = \sigma(x_r, r < k)$; $\Omega = \{\omega\}$ — пространство элементарных исходов.

Несколько модифицируя доказательство леммы § 9 [7], можно получить сходимость конечномерных распределений процессов $\{X_n(t), t \in [0,1]\}$ к конечномерным распределениям винеровского процесса. Условие 3 позволяет доказать соотношение

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(\beta)}(\varepsilon, \delta) = o(\delta), \quad \delta \to 0$$

для $\beta < \frac{\lambda - 1}{2}$, что означает сходимость последовательности индуцированных мер в $\mathrm{Lip}_{\beta}[0,1]$ к винеровской.

В заключение мне приятно выразить благодарность Б. А. Рогозину, под чьим руководством выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lampeti T. On convergence of stochastic processes. — TAMS 1962, 104; N 3.
2. Woodroofe M. On the weak convergence of stochastic processes without discontinuities of the second kind. — Z. W. und verb. Geb. 1968, 11, N 4.
3. Дынкин Е. Б. Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, 563—572.
4. Kinney T. — Continuity properties of sample function of Marcov processes. — TAMS, 1953, 74, 280—302.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. 1965, М., «Наука».
6. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Изд-во Киевского университета, 1961.
7. Bernstein S. N. Sur L'extension du the orème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes. — Math. Ann., 97, 1926. (Русск. пер.: Бернштейн С. Н. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на сумму зависимых величин. — УМН, 1944, 10, 65—144).
8. Parthasarathy K. R. Probability Measures on Metric Spaces. New York — London, 1967.
9. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, 2.
10. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. «Мир», М., 1967.

V. M. Borodikhin

CONDITIONS FOR THE COMPACTNESS OF SUBSETS OF MEASURES ON SOME METRIC SPACES

Summary

Let $(\{x_\gamma(t),\ t \in [0, 1]\})_{\gamma\in\Gamma}$ be a family of the separable stochastic processes, $(\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — a family of the probability measures, corresponding to the stochastic processes $\{x_\gamma(t),\ t \in [0, 1]\}$.

The sufficient conditions for the realization of stochastic processes in $\mathrm{Lip}_\beta\,[0, 1]$, $D_\beta\,[0, 1]$ and for the compactness of $(\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ on $C\,[0, 1]$, $D\,[0, 1]$, $\mathrm{Lip}_\beta\,[0, 1]$, $D_\beta\,[0, 1]$ in a form of Kinney — Dynkin conditions are given.

Поступила в редколлегию 15.VII. 1969.