В. Л. ГИРКО, студ.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПЕРМАНЕНТА СЛУЧАЙНОЙ МАТРИЦЫ

Изучение распределения некоторых функций от случайных матриц, таких как перманент, детерминант и др., является интересной теоретико-вероятностной задачей. Однако точное распределение этих функций, как правило, сложное. Поэтому представляют интерес различные предельные теоремы при увеличении порядка матрицы.

В данной статье рассматриваются предельные теоремы типа закона больших чисел для перманента случайной матрицы. Отметим, что второй и четвертый моменты перманента случайной матрицы при некоторых предположениях нашел Прекопа *).

Под перманентом матрицы

$$A_n = \left\| \begin{matrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \dots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} \end{matrix} \right\|$$

понимают выражение

$$\operatorname{per} A_n = \sum_{i_1 \dots i_n} \xi_{1i_1}\xi_{2i_2} \dots \xi_{ni_n},$$

где $i_1, i_2, \dots i_n$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, и сумма берется по всем таким перестановкам.

Теорема 1. Если случайные величины ξ_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots$ независимы и существуют такие постоянные $d > 0$ и $C > 0$, что $d \leqslant \xi_{ij} \leqslant C$ с вероятностью единица для всех $i, j = 1, 2, \dots$, то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} A_n}{M \operatorname{per} A_n}} - 1\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Пусть $a_{ij} = M\xi_{ij}$, $\sigma_{ij} = D\xi_{ij}$. Заметим, что $M \operatorname{per} A_n \neq 0$, и запишем $\operatorname{per} A_n$ в виде

$$\frac{\operatorname{per} A_n}{M \operatorname{per} A_n} = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i,$$

*) A. Prekopa. On random determinants. 1. — Studia Scientiarum, Mathematicarum, 2. Hungaria, 1967.

где

$$\gamma_i = \frac{\operatorname{per} T_i}{\operatorname{per} T_{i+1}},$$

$$T_i = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{i-11} & \ldots & a_{i-1n} \\ \xi_{i1} & \ldots & \xi_{in} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Далее,

$$\ln \sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} A_n}{M \operatorname{per} A_n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln \gamma_i}{n}.$$

Пусть B_{il} — перманент матрицы, полученной из матрицы T_i вычеркиванием i-й строчки и l-го столбика. Так как B_{ik} и B_{il}, $k \neq l$, $k, l = \overline{1, n}$ отличаются только одним столбиком, то

$$\frac{B_{ik}}{B_{il}} \geqslant \frac{d}{C}.$$

Используя это, а также неравенство Чебышева и условные математические ожидания, имеем

$$P\{|\gamma_i - 1| > \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} M \left[\frac{(\xi_{i1} - a_{i1}) B_{i1} + \cdots + (\xi_{in} - a_{in}) B_{in}}{a_{i1}B_{i1} + \cdots + a_{in}B_{in}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} M \frac{\sigma_{i1}B_{i1}^2 + \cdots + \sigma_{in}B_{in}^2}{(a_{i1}B_{i1} + \cdots + a_{in}B_{in})^2} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{l=1}^{n} \frac{\sigma_{il}}{\left(a_{i1} + a_{i2}\frac{B_{i2}}{B_{il}} + \cdots + a_{in}\frac{B_{in}}{B_{il}}\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{nC^2}{\varepsilon^2 \left(1 + (n-1)\frac{d}{C}\right)^2 d^2} \leqslant \frac{C^4}{\varepsilon^2 d^4 n}. \qquad (1)$$

Так как $\ln^2(1 \pm a) \leqslant \frac{a^2}{(1-a)^2}$, $0 < a < 1$, то

$$M \ln^2 \gamma_i \leqslant \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} P\{|\gamma_i - 1| < \varepsilon\} + (\ln^2 d + \ln^2 C) P\{|\gamma_i - 1| > \varepsilon\}.$$

Для любого $\delta > 0$ при достаточно больших n будет

$$M \ln^2 \gamma_i \leqslant \delta, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\gamma_i}{n}\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}M\ln^2\gamma_i}{n^2\varepsilon^2}+\frac{\sum\limits_{i\neq j}\sqrt{M\ln^2\gamma_i}\sqrt{M\ln^2\gamma_j}}{n^2\varepsilon^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{n\varepsilon^2}+\frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2. Если случайные величины ξ_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots$ независимы, одинаково распределены, существует $M\xi_{11} = a$ и для некоторого постоянного $c > 0$ с вероятностью единица $\xi_{ij} \geqslant c$, $i, j = 1, 2, \dots$, то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per}A_n}{n!}}-a\right|<\varepsilon\right\}=1. \qquad (2)$$

Доказательство. Введем два набора случайных величин, зависящих от ξ_{ij}, $i = j = 1, 2, \dots$ следующим образом:

$$\eta_{ij}^{(n)}=\xi_{ij},\ \ \zeta_{ij}^{(n)}=0,\ \text{если}\ \ \xi_{ij}\leqslant\sqrt[8]{n};$$

$$\eta_{ij}^{(n)}=c,\ \zeta_{ij}^{(n)}=\xi_{ij},\ \text{если}\ \ \xi_{ij}>\sqrt[8]{n}.$$

Преобразуем $\operatorname{per} A_n$:

$$\frac{\operatorname{per}A_n}{n!\,a^n}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{per}T_i}{\operatorname{per}T_{i+1}},$$

где

$$T_i=\begin{Vmatrix} a & \dots & a\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ a & \dots & a\\ \xi_{i1} & \dots & \xi_{in}\\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn}\end{Vmatrix}.$$

Используя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим n положительных чисел, получаем

$$\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per}A_n}{n!}}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{(n)}}{n}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{(n)}}{n},$$

где

$$x_i^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\eta_{ij}^{(n)}A_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n}A_{ik}};$$

$$y_i^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\zeta_{il}^{(n)} A_{il}}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}};$$

A_{il} — перманент матрицы, полученной из матрицы T_i вычеркиванием i-й строчки и l-го столбика.

Используя условные математические ожидания, легко проверить, что

$$Mx_i^{(n)} = M\eta_{11}^{(n)}, \quad M(x_i^{(n)})^2 \leqslant \sqrt[4]{n},$$

$$R(x_i, x_j) = 0, \quad My_i^{(n)} = M\zeta_{11}^{(n)}, \quad i \neq j, \ i, j = \overline{1, n},$$

где $R(x_i, x_j)$ — корреляционная функция случайных величин $x_i^{(n)}$ и $x_j^{(n)}$.

Поэтому

$$P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(n)}}{n} - M\eta_{11}^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{4\sum\limits_{i=1}^{n} M(x_i^{(n)})^2}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{4\sqrt[4]{n}}{\varepsilon^2 n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} M\eta_{11}^{(n)} = a$, то для любого $\frac{\varepsilon}{2}$ для достаточно больших n

$$|M\eta_{11}^{(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда

$$P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(n)}}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \leqslant P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(n)}}{n} - M\eta_{11}^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|M\eta_{11}^{(n)} - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{4\sqrt[4]{n}}{n\varepsilon^2}.$$

Далее, используя неравенство Чебышева, получаем

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(n)}}{n} > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{2M\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(n)}}{n\varepsilon} = \frac{2M\zeta_{11}^{(n)}}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} M\zeta_{11}^{(n)} = 0$, то при достаточно больших n

$$M\zeta_{11}^{(n)} \leqslant \varepsilon^2.$$

Поэтому

$$P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(n)} + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(n)}}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} \leqslant P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{(n)}}{n} - a\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(n)}}{n} > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{4\sqrt[4]{n}}{n\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} A_n}{n!}} \leqslant a+\varepsilon\right\}=1. \tag{3}$$

Теперь обозначим

$$a^{(n)}=M\eta_{11}^{(n)}, \quad \sigma^{(n)}=D\eta_{11}^{(n)},$$

$$B_n=\begin{Vmatrix} \eta_{11}^{(n)} & \dots & \eta_{1n}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{1n}^{(n)} & \dots & \eta_{nn}^{(n)} \end{Vmatrix},$$

$$P_i=\begin{Vmatrix} a^{(n)} & \dots & a^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{(n)} & \dots & a^{(n)} \\ \eta_{i1}^{(n)} & \dots & \eta_{in}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n1}^{(n)} & \dots & \eta_{nn}^{(n)} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{per} A_n \geqslant \operatorname{per} B_n$. Преобразуем $\operatorname{per} B_n$:

$$\ln \sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} B_n}{P_{n+1}}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln \gamma_i}{n},$$

где

$$\frac{\operatorname{per} P_i}{\operatorname{per} P_{i+1}}=\gamma_i.$$

Используя (1), получаем

$$P\{|\gamma_i-1|>\varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 c^4 \sqrt{n}};$$

$$M \ln^2 \gamma_i \leqslant \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}+\left(\ln^2 c+\frac{\ln^2 n}{64}\right) \frac{1}{\varepsilon^2 c^4 \sqrt{n}}.$$

Поэтому для любого $\delta>0$ при достаточно больших n

$$M \ln^2 \gamma_i \leqslant \delta, \quad i=\overline{1, n}.$$

Отсюда

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} \ln \gamma_i}{n}\right|>\varepsilon\right\} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} M \ln^2 \gamma_i}{n^2 \varepsilon^2}+\frac{\sum_{i \neq j} \sqrt{M \ln^2 \gamma_i} \sqrt{M \ln^2 \gamma_j}}{n^2 \varepsilon^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{n \varepsilon^2}+\frac{\delta}{\varepsilon^2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{(n)} = a$, то для любого $\frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших n

$$|a^{(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} B_n}{n!}} - a\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} B_n}{n!}} - a^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \lim_{n\to\infty} P\left\{|a^{(n)} - a| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt[n]{\frac{\operatorname{per} A_n}{n!}} \geqslant a - \varepsilon\right\} = 1. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2). Теорема доказана.

V. L. Girko

LIMIT THEOREMS FOR RANDOM MATRIX PERMANENT

Summary

Some limit theorems, similiar to the law of large numbers for the permanent of random matrices with independent random element are proved under certain assumption.

Поступила в редколлегию 14.VI.1969.