Ю. С. ДАВИДОВИЧ, ст. инж.
НИИ автоматизированных систем Госстроя УССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ДИСПЕРСИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СРЕДНИХ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения дисперсии интеграла (суммы) от однородного случайного поля $\xi(P)$, $P \in E^n$ — n-мерному евклидову пространству, взятого по непрерывной (дискретной) реализации поля. Некоторые аналогичные вопросы для случайных процессов рассматривались в работах [4, 5]. Эти задачи естественно возникают при исследовании асимптотических свойств оценок математического ожидания случайного поля. Изучение условий применимости центральной предельной теоремы для случайных полей также приводит к необходимости знать асимптотический рост дисперсий соответствующих сумм и интегралов.

Пусть $\xi(P)$ — однородное случайное поле $(P = \{x_1, \ldots, x_n\} \in E^n)$ с корреляционной функцией $R(u) = R(u_1, \ldots, u_n)$, $u \in E^n$. Без ограничения общности будем полагать математическое ожидание $M\xi(P) = 0$.

I. Рассмотрим сначала случай, когда параметр P пробегает дискретное множество значений $\{P_k\}$ и поле имеет вид $\xi(P_k) = \xi(k_1, \ldots, k_n)$, где k_i принимают целые неотрицательные значения. Ему соответствует спектральная функция $F_1(\lambda)$, $\lambda \in E^n$. Найдем дисперсию случайной величины

$$S_N = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{N_n-1} \xi(k_1, \ldots, k_n), \tag{1}$$

где $N = \{N_1, \ldots, N_n\}$ — n-мерный целочисленный вектор.

Воспользовавшись теоремой о спектральном разложении однородного случайного поля [1], (1) можно переписать в виде

$$S_N = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{i\lambda_j N_j} - 1}{e^{i\lambda_j} - 1} dZ_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{2}$$

где $Z_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — ортогональная стохастическая мера, подчиненная мере $F_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Из (2) непосредственно получаем

$$DS_N = MS_N\bar{S}_N = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{n} \frac{|e^{i\lambda_j N_j} - 1|^2}{|e^{i\lambda_j} - 1|^2} dF_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{\lambda_j N_j}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda_j}{2}} dF_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (3)$$

Обозначим через H_ξ замыкание в смысле сходимости в среднем квадратичном линейной оболочки, натянутой на случайные величины $\xi(k_1, \dots, k_n)$. Если для произвольных η и $\zeta \in H_\xi$ определить их скалярное произведение и норму, как $(\eta, \zeta) = M\eta\bar{\zeta}$ и $\|\eta\| = \sqrt{D\eta} < \infty$, то H_ξ будет гильбертовым пространством случайных величин. Определим на H_ξ изометрические операторы U_j, $j = 1, 2, \dots, n$, равенствами

$$U_j\xi(k_1, \dots, k_j, \dots, k_n) = \xi(k_1, \dots, k_j + 1, \dots, k_n).$$

Так введенные операторы U_j перестановочны и для всякого $l = 0, 1, 2, \dots$, $U_j^l\xi(P_k) \in H_\xi$, где U_j^l обозначает l-ю степень оператора U_j, в частности, $U_j^0 = E$, где E — единичный оператор.

Теорема 1. Если корреляционная функция $R(u)$ однородного случайного поля $\xi(P)$, $P \in E^n$ обладает тем свойством, что $\lim\limits_{\substack{\min u_i \\ i=1, \dots, n}} R(u) = 0$, то существует $\lim\limits_{\substack{\min N_i \\ i=1, \dots, n}} DS_N = b < \infty$, причем $b < \infty$ тогда и только тогда, когда существует такая случайная величина $\eta \in H_\xi$, что

$$\xi(0, \dots, 0) = \sum_{l_1=0}^{1} \dots \sum_{l_n=0}^{1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n} l_j + 1} \prod_{i=1}^{n} u_i^{l_i}\eta. \quad (4)$$

при этом

$$b = 2^n D\eta. \quad (5)$$

Доказательство (для случая $n = 2$). Условие (4) означает, что найдется такое однородное случайное поле $\eta(x, y)$ с дискретными параметрами, что для всех k_1 и k_2

$$\xi(k_1, k_2) = \eta(k_1 + 1, k_2) + \eta(k_1, k_2 + 1) - \eta(k_1 + 1, k_2 + 1) - \eta(k_1, k_2).$$

Итак, пусть $\|S_N\| = \sqrt{DS_N}$ не стремится к бесконечности, когда $\min\limits_{i=1, \dots, n} N_i \to \infty$. Тогда существует последовательность $\{N^j\}$ векторов с целочисленными координатами, такая, что все $N_i^j \to \infty$, $i = 1, 2$; и $\|S_{N^j}\| = \sqrt{DS_{N^j}} < c < \infty$ для всех j. Так как сфера в гильбертовом пространстве H_ξ слабо компактна [2], то из $\{N^l\}$ можно выделить подпоследовательность (обозначим ее $\{N^p\}$) такую, что S_{N^p} сходится к какому-то $-\eta \in H_\xi$, т. е. для всякого $L \ni H\xi$

$$\lim_{p\to\infty}(S_{N^p},h) = \lim MS_{N^p}h = -M\eta h = -(\eta,h).$$

Отсюда следует, что для всякого $h \in H_\xi$ и всех U_j, $j = 1, 2$

$$\lim_{p\to\infty}(U_jS_{N^p}, h) = (-U_j\eta, h). \quad (6)$$

Но всякий элемент $h \in H_\xi$ можно представить в виде

$$h = \text{l.i.m} \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} a_{k_1k_2}(N_1, N_2)\,\xi(k_1, k_2),$$

где $a_{k_1k_2}(N_1, N_2)$— неслучайные коэффициенты.

Поэтому из условия теоремы $\lim\limits_{\|U\|\to\infty} R(u) = 0$ следует, что для любого $h \in H_\xi$

$$\lim_{\|p\|\to\infty} M\xi(P)\,h = 0. \quad (7)$$

Воспользовавшись соотношениями (6) и (7), получим

$$(U_1\eta + U_2\eta - U_1U_2\eta - \eta, h) = \lim_{p\to\infty}(S_{N^p} + U_1U_2S_{N^p} - U_1S_{N^p} -$$

$$- U_2S_{N^p}, h) = \lim_{p\to\infty}(\xi(N_1^p, N_2^p), h) - \lim_{p\to\infty}(\xi(N_1^p, 0), h) -$$

$$- \lim_{p\to\infty}(\xi(0, N_2^p), h) + (\xi(0, 0), h) = (\xi(0, 0), h),$$

откуда

$$M(U_1\eta + U_2\eta - U_1U_2\eta - \eta - \xi(0, 0)\,h = 0.$$

Полагая здесь $h = U_1\eta + U_2\eta - U_1U_2\eta - \eta - \xi(0, 0)$, находим, что с вероятностью 1

$$\xi(0, 0) = U_1\eta + U_2\eta - U_1U_2\eta - \eta. \quad (4')$$

Если ввести в рассмотрение однородное случайное поле $\eta(x, y)$, такое, что $\eta(0, 0) = \eta$ и $U_1^{k_1}U_2^{k_2}\eta = \eta(k_1, k_2)$, то (5′) получается из (4′). И тогда для всех $N = \{N_1, N_2\}$

$$S_N = \eta(N_1, 0) + \eta(0, N_2) - \eta(N_1, N_2) - \eta(0, 0).$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}} DS_N = \lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}} M\{\eta(N_1, 0)\}^2 + \lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}} M\{\eta(0, N_2)\}^2 +$$

$$+ \lim_{\substack{N_1\to\infty\\N_2\to\infty}} M\{\eta(N_1, N_2)\}^2 + M\{\eta(0, 0)\}^2 = 4M\eta^2 = 4D\eta < \infty. \quad (5')$$

Обратно, если имеет место представление (4'), то

$$DS_N = M\{\eta(N_1, 0) + \eta(0, N_2) - \eta(N_1, N_2) - \eta(0, 0)\}^2 \leqslant 16M\eta^2 = \\ = 16D\eta < \infty.$$

В общем случае доказательство проводится аналогично и утверждение (5) следует из того, что если имеет место (4), то

$$S_N = \sum_{l_1=0}^{1} \cdots \sum_{l_n=0}^{1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n} l_j + 1} \prod_{i=1}^{n} U_i^{N_i l_i} \eta,$$

т. е. равняется алгебраической сумме значений однородного случайного поля $\eta(P_k)$ такого, что $\eta(0, \ldots, 0) = \eta \in H_\xi$, взятых в вершинах n-мерного параллелепипеда, имеющего 2^n вершин.

Следствие 1. Если $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} R(u) = 0$, то предел DS_N, когда $\min\limits_{i=1,\ldots,N} N_i \to \infty$, может быть вычислен по следующей формуле:

$$b = 2^n \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dF_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} |e^{i\lambda_j} - 1|^2} = \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dF_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \sin^2 \frac{\lambda_j}{2}}. \quad (8)$$

Действительно, пусть $\lim\limits_{\substack{\min N_i \to\infty \\ i=1,\ldots,n}} DS_N < \infty$. Тогда, воспользовавшись теоремой о спектральном представлении однородного случайного поля, найдем из (4), что спектральные функции полей $\xi(P)$ и $\eta(P)$ связаны соотношением

$$dF_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{j=1}^{n} |e^{i\lambda_j} - 1|^2 \, dF_\eta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad (9)$$

откуда

$$dF_\eta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{dF_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} |e^{i\lambda_j} - 1|^2} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{dF_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \sin^2 \frac{\lambda_j}{2}}.$$

И в силу (5) получаем

$$\lim_{\substack{\min N_i \to\infty \\ i=1,\ldots,n}} DS_N = 2^n D\eta =$$

$$= 2^n \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} dF_\eta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{2^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dF_\xi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \sin^2 \frac{\lambda_j}{2}}.$$

Обратно, пусть

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dF_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\sin^2\frac{\lambda_j}{2}}<\infty,$$

тогда в силу (3) получим

$$DS_N\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dF_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\sin^2\frac{\lambda_j}{2}}<\infty$$

для всех $N=\{N_1,\ldots,N_n\}$, а значит, $\lim\limits_{\substack{\min N_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}}DS_N<\infty$ и снова приходим к (8).

Замечание 1. Если спектральная функция $F_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ абсолютно непрерывна, то поле $\xi(k_1,\ldots,k_n)$ имеет спектральную плотность $f_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ и по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{\substack{\min u_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}}R(u_1,\ldots,u_n)=$$

$$=\lim_{\substack{\min u_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}u_j\lambda_j}f_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n=0,$$

т. е. тогда условие теоремы выполнено.

Замечание 2. Если не предполагать, что $\lim\limits_{\|u\|\to\infty}R(u)=0$, то справедливо лишь следующее:

$$\lim_{\substack{\min m_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}}\frac{1}{m_1\cdot\ldots\cdot m_n}\sum_{N_1=0}^{m_1-1}\cdots\sum_{N_n=0}^{m_n-1}DS_N=$$

$$=\frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dF_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\sin^2\frac{\lambda_j}{2}}. \qquad (10)$$

Действительно, если интеграл в правой части (10) сходится, то используя (3), получаем

$$\lim_{\substack{\min m_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}} \frac{1}{m_1\cdot\ldots\cdot m_n}\sum_{N_1=0}^{m_1-1}\ldots\sum_{N_n=0}^{m_n-1} DS_N =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\sin^2\frac{\lambda_j}{2}}\left[\lim_{\substack{\min m_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}}\frac{1}{m_1\cdot\ldots\cdot m_n}\sum_{N_1=0}^{m_1-1}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\sum_{N_n=0}^{m_n-1}\prod_{j=1}^{n}|e^{i\lambda_j N_j}-1|\right]\cdot dF_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dF_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}{\prod_{j=1}^{n}\sin^2\frac{\lambda_j}{2}}.$$

Последнее равенство следует из того, что $\lim\limits_{m_j\to\infty}\frac{1}{m_j}\sum\limits_{N_j=0}^{m_j-1}|e^{i\lambda_j N_j}-1|^2 =$ $= 2$, для всех $\lambda_j\in[-\pi,\pi]$. В случае расходимости интеграла (10) доказательство достаточно дополнить ссылкой на лемму Фату [1].

Замечание 3. Легко проверить, что (3) можно переписать в виде

$$\xi(0,\ldots,0) = (-1)^{n+1}\prod_{j=1}^{n}(U_j - E)\,\eta. \tag{11}$$

II. Рассмотрим теперь однородное случайное поле $\xi(P)$ с непрерывно меняющимся параметром $P\in E^n$, корреляционной функцией $R(u)$ и спектральной функцией $F(\lambda)$, где $u,\lambda\in E^n$. Пусть $M\xi(P)=0$.

Так же, как и в п. I, рассмотрим гильбертово пространство случайных величин H_ξ, порожденное этим полем, и зададим на нем унитарные операторы U_i^t ($i=1,\ldots,n$; $0\leqslant t<\infty$) равенствами

$$U_i^t\xi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = \xi(x_1,\ldots,x_i+t,\ldots,x_n).$$

Аналогично тому, как это делалось в п. I, воспользовавшись спектральным разложением [1] однородного случайного поля $\xi(P)$, найдем дисперсию случайной величины

$$S_T = \int_0^{T_1}\ldots\int_0^{T_n}\xi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \tag{12}$$

$$DS_T = 4^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{T_j \lambda_j}{2}}{\lambda_j^2} dF(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{13}$$

Теорема 2. Если $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} R(u) = 0$, то существует предел $\lim\limits_{\substack{\min T_i \to \infty \\ i=1, \ldots, n}} DS_T = b$, причем $b < \infty$ тогда и только тогда, когда существует такое однородное случайное поле $\eta(x_1, \ldots, x_n) = U_1^{x_1} \ldots U_n^{x_n} \eta$, где $\eta \in H_\xi$, что

$$\xi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n \eta(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}, \tag{14}$$

при этом

$$b = 2^n D\eta. \tag{15}$$

Доказательство для $n = 2$ (в общем случае оно аналогично). При $n = 2$ $\xi(P) = \xi(x, y)$ и условие (14) принимает вид

$$\xi(x, y) = \frac{\partial^2 \eta(x, y)}{\partial x \partial y} =$$

$$= \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\text{l.i.m.}} \frac{\eta(x + \Delta x, y + \Delta y) - \eta(x, y + \Delta y) - \eta(x + \Delta x, y) + \eta(x, y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Итак, пусть DS_T не стремится к бесконечности при $\| T \| \to \infty$. Тогда (см. доказательство теоремы 1) существует последовательность векторов $T^p = \{T_1^p, T_2^p\}$, такая, что при $p \to \infty$ $T_1^p \to \infty$ и $T_2^p \to \infty$ и S_{T^p} слабо сходится к некоторому $\eta \in H_\xi$, т. е. для любого $h \in H_\xi$

$$\lim_{p \to \infty} (S_{T^p}, h) = (\eta, h), \tag{16}$$

откуда

$$\lim_{p \to \infty} (U_i^t S_{T^p}, h) = (U_i^t \eta, h). \tag{17}$$

Докажем теперь для поля $\eta(x, y) = U_1^{x_1} U_2^{x_2} \eta$ существование (в среднем квадратичном) смешанной производной и равенство (14).

Из (17) следует, что для любого $h \in H_\xi$

$$\left(\frac{(U_1^{\Delta x} - E)(U_2^{\Delta y} - E)\eta}{\Delta x \Delta y}, h \right) = \left(\frac{U_1^{\Delta x} U_2^{\Delta y} \eta - U_1^{\Delta x} \eta - U_2^{\Delta y} \eta + \eta}{\Delta x \Delta y}, h \right) =$$

$$= \lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int\limits_{T_1^p}^{T_1^p + \Delta x} \int\limits_{T_2^p}^{T_p^2 + \Delta y} \xi(x, y)\, dx dy, h \right) -$$

$$-\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{\Delta x\Delta y}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_{T_2^p}^{T_2^p+\Delta y}\xi(x,\,y)\,dxdy,\,h\right)-$$

$$-\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{\Delta x\Delta y}\int\limits_{T_1^p}^{T_1^p+\Delta x}\int\limits_0^{\Delta y}\xi(x,\,y)\,dxdy,\,h\right)+\left(\frac{1}{\Delta x\Delta y}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta y}\xi(x,\,y)\,dxdy,\,h\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\Delta x\Delta y}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta y}\xi(x,\,y)\,dxdy,\,h\right),$$

поскольку, если выполнено условие теоремы 2, то для любых ζ и $h\in H_\xi$ $\lim\limits_{t\to\infty}(U_i^t\zeta,\,h)=0$ при всех $i=1,\,\ldots,\,n$; и из теоремы Фубини вытекает, что все слагаемые, зависящие от p, равномерно стремятся к нулю при $p\to\infty$.

Отсюда ввиду произвольности $h\in H_\xi$ получаем

$$\frac{\eta(\Delta x,\,\Delta y)-\eta(\Delta x,\,0)-\eta(0,\,\Delta y)+\eta(0,\,0)}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta y}\xi(x,\,y)\,dxdy.\quad(18)$$

Но так как корреляционная функция $R(u,\,v)$ непрерывна в нуле по обеим переменным, то

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\mathrm{M}\left|\frac{1}{\Delta x\Delta y}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta y}\xi(x,\,y)\,dxdy-\xi(0,\,0)\right|^2=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{1}{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta x}\int\limits_0^{\Delta y}\int\limits_0^{\Delta y}[R(x-x',\,y-y')-R(x,\,y)-R(x',\,y')+$$

$$+R(0,\,0)]\,dxdx'dydy'=0.$$

Это означает, что существует

$$\underset{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{\eta(\Delta x,\,\Delta y)-\eta(0,\,\Delta y)-\eta(\Delta x,\,0)+\eta(0,\,0)}{\Delta x\Delta y}=\left.\frac{\partial^2\eta(x,\,y)}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}=\xi(0,\,0).$$

Следовательно, и при всех x и y существует $\frac{\partial^2\eta(x,\,y)}{\partial x\partial y}$ и имеет место (14). Тогда

$$S_T=\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2}\frac{\partial^2\eta(x,\,y)}{\partial x\partial y}\,dxdy=\eta(T_1,\,T_2)-\eta(0,\,T_2)-\eta(T_1,\,0)+\eta(0,\,0),\quad(19)$$

и в силу условия теоремы, как и в п. I, получаем

$$\lim_{\substack{T_1\to\infty\\ T_2\to\infty}} DS_T = 4M\eta^2 - 4D\eta < \infty.$$

Обратно, если имеет место (14), то $DS_T \leqslant 16M\eta^2 = 16D\eta < \infty$ для любого $T = \{T_1, T_2\}$, значит, $\lim\limits_{\substack{T_1\to\infty\\ T_2\to\infty}} DS_T < \infty$. В общем случае (18) и (19) принимают соответственно вид

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(U_i^{\Delta x_i} - E)}{\Delta x_i}\,\eta = \frac{1}{\Delta x_1 \ldots \Delta x_n}\int_0^{\Delta x_1} \cdots \int_0^{\Delta x_n} \xi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{18'}$$

$$S_T = \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} \frac{\partial^n \eta(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (U_i^{T_i} - E)\,\eta(0, \ldots, 0). \tag{19'}$$

Так как правая часть (19′) содержит 2^n различных слагаемых, то в силу условия теоремы получим (15).

Следствие 2. В условиях теоремы 2

$$\lim_{\substack{\min T_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}} DS_T = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^2}. \tag{20}$$

Замечание 4. Если не предполагать, что $R(u) \to 0$ при $\| u \| \to \infty$, то справедливо лишь следующее:

$$\lim_{\substack{\min t_i\to\infty\\ i=1,\ldots,n}} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} t_j} \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_n} DS_T dT_1 \ldots dT_n =$$

$$= 2^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^2}. \tag{21}$$

Замечание 5. Условие теоремы 2 будет выполнено, в частности, если спектральная функция $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ абсолютно непрерывна, так как тогда поле $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ имеет спектральную плотность $f(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n)$, интегрируемую на E^n и, следовательно, по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{\|u\|\to\infty} R(u) = \lim_{\|u\|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = 0.$$

III. Изучим асимптотическое поведение DS_T и DS_N с ростом T_i и N_i соответственно.

Теорема 3. Если однородное случайное поле $\xi(P)$, $P \in \mathrm{E}^n$, имеет ограниченную спектральную плотность $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant c < \infty$ (или $f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, когда параметр P меняется дискретно), непрерывную в точке $\lambda_0 = (0, \ldots, 0)$, то при $\min\limits_{i=1,\ldots,n} T_i \to \infty$ $(\min\limits_{i=1,\ldots,n} N_i \to \infty)$ имеет место асимптотическая формула

$$DS_T = (2\pi)^n f(0, \ldots, 0) \prod_{i=1}^{n} T_i + o\left(\prod_{i=1}^{n} T_i\right), \tag{22}$$

а в дискретном случае

$$DS_N = (2\pi)^n f_1(0, \ldots, 0) \prod_{i=1}^{n} N_i + o\left(\prod_{i=1}^{n} N_i\right). \tag{23}$$

Докажем (22), (23) доказывается аналогично. Обозначим

$$A_T = \left\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{E}^n : |\lambda_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{T_1}}, \ldots, |\lambda_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{T_n}}\right\},$$

$$B_T = \left\{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n : |u_1| \leqslant \frac{\sqrt{T_1}}{2}, \ldots, |u_n| \leqslant \frac{\sqrt{T_n}}{2}\right\}.$$

Так как $4\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} = 2\pi T$, то из (13) и условий теоремы получим оценку

$$\left| DS_T - (2\pi)^n f(0, \ldots, 0) \prod_{i=1}^{n} T_i \right| =$$

$$= 4^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{T_i\lambda_i}{2}}{\lambda_i^2} \, |f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - f(0, \ldots, 0)|\, d\lambda_1, \ldots d\lambda_n \leqslant$$

$$\leqslant 4^n \max_{\lambda \in A_T} |f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - f(0, \ldots, 0)/ \int \ldots \int_{A_T} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{T_i\lambda_i}{2}}{\lambda_i} d\lambda_1 \ldots$$

$$\ldots d\lambda_n + 4^n \cdot 2c \int_{E^n \setminus A_T} \ldots \int \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{T_i\lambda_i}{2}}{\lambda_i^2} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = I.$$

Заменив интеграл в первом слагаемом интегралом по всему пространству E^n, а во втором, сделав замену переменных: $u_i = \frac{T_i\lambda_i}{2}$, получим оценку для I

$$I \leqslant (2\pi)^n \max_{\lambda \in A_T} |f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - f(0, \ldots, 0)| +$$

$$+ 2^{n+1} c \prod_{i=1}^{n} T_i \int_{E^n \setminus B_T} \ldots \int \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin^2 \frac{T_i\lambda_i}{2}}{\lambda_i^2} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = o\left(\prod_{i=1}^{n} T_i\right).$$

Здесь вывод о порядке роста первого слагаемого делается из непрерывности $f(\lambda)$ в точке λ_0, а второго — из существования интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \pi$. Теорема доказана.

Следствие 3. Асимптотические формулы (22) и (23) имеют место, в частности, если корреляционная функция $R(u)$ однородного случайного поля $\xi(P)$ абсолютно интегрируема в E^n, т. е. если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |R(t_1, \ldots, t_n)| dt_1 \ldots dt_n < \infty, \tag{24}$$

а в дискретном случае

$$\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{t_n=-\infty}^{\infty} |R(t_1, \ldots, t_n)| < \infty, \tag{25}$$

так как тогда спектральная функция поля абсолютно непрерывна и существует спектральная плотность $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (или $f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в дискретном случае), непрерывная в точке $\lambda_0 = (0, \ldots, 0)$. Теорема 3 позволяет получить также асимптотические формулы для DS_T (DS_N) в случае, если не все T_i (N_i), а только часть из них неограниченно возрастает.

IV. Теорема 4. Пусть $\xi(P)$ — однородное случайное поле, $P \in E^n$ и принимает непрерывное (или дискретное) множество значений. Если $|R(u)|$ убывает при $\|u\| \to \infty$ настолько быстро, что имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |R(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} u_i| du_1 \ldots du_n < \infty \tag{26}$$

или для дискретного случая

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} |R(k_1, \ldots, k_n) \prod_{i=1}^{n} k_i| < \infty, \tag{27}$$

то при $\min\limits_{i=1,\ldots,n} T_i \to \infty$ $(\min\limits_{i=1,\ldots,n} N_i \to \infty)$ имеет место асимптотическая формула

$$DS_T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} (T_i - |u_i|)\, du_1 \ldots du_n + o(1) \quad (28)$$

или для дискретного случая

$$DS_N = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} R(k_1, \ldots, k_n) \prod_{i=1}^{n} (N_i - |k_i|) + o(1). \quad (29)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что дисперсию S_T можно представить в виде

$$DS_T = MS_T\bar{S}_T = \int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_1} \cdots \int\limits_0^{T_n}\int\limits_0^{T_n} R(x_1 - x_1', \ldots, x_n - x_n')\, dx_1 dx_1' \ldots$$

$$\ldots dx_n dx_n' = \int\limits_{-T_1}^{T_1} \cdots \int\limits_{-T_n}^{T_n} R(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} (T_i - |u_i|)\, du_1 \ldots du_n. \quad (30)$$

Обозначим здесь область интегрирования через C_T:

$$C_T = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n : |u_1| \leqslant T_1, \ldots, |u_n| \leqslant T_n\}.$$

Тогда из (30) и условия (26) получим оценку

$$\left| DS_T - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} (T_i - |u_i|)\, du_1 \ldots du_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int \cdots \int\limits_{\mathrm{E}^n \setminus C_T} \left| R(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} (T_i - |u_i|) \right| du_1 \ldots du_n =$$

$$= 2 \int \cdots \int\limits_{\mathrm{E}^n \setminus C_T} \left| R(u_1, \ldots, u_n) \prod_{i=1}^{n} u_i \right| du_1 \ldots du_n = o(1).$$

Этим формула (28) доказана, (29) доказывается аналогично, если воспользоваться для DS_N следующим представлением:

$$DS_N = MS_N\bar{S}_N = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_1'=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{N_n-1} \sum_{i_n'=0}^{N_n-1} R(i_1 - i_1', \ldots, i_n - i_n') =$$

$$= \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \dots \sum_{k_n=-N_n}^{N_n} R(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^{k} (N_i - |k_i|). \qquad (31)$$

Очевидно, при условии (26) (или (27)) спектральная плотность $f(\lambda)$ (или $f_1(\lambda)$) существует и непрерывна, поэтому (28) и (29) можно переписать в терминах $f(\lambda)$ и $f_1(\lambda)$ соответственно.

Асимптотические формулы (28) и (29), когда они имеют место, действительно несколько лучше отражают поведение DS_T и DS_N, чем (22) и (23). Например, для стационарного случайного процесса формулы (22) и (28) примут вид

$$DS_T = 2\pi T f(0) + o(T), \qquad (22')$$

$$DS_T = \int_{-\infty}^{\infty} (T - |u|) R(u)\, du + o(1) =$$

$$= 2\pi T f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) + f(-\lambda) - 2f(0)}{\lambda^2} d\lambda + o(1). \qquad (28')$$

V. Полученные результаты можно, в частности, применить при выборе оценки $\check{m}$ среднего значения $M\xi(P)$ однородного случайного поля $\xi(P)$, $P \in E^n$. Например, положив $T_i = N_i$, $i = 1, \dots, n$, получим для дисперсий $\sigma^2_{\check{m}_T}$ и $\sigma^2_{\check{m}_N}$ среднеинтегральной оценки

$$\check{m}_T = \frac{1}{T_1 \dots T_n} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} \xi(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \qquad (32)$$

и среднеарифметической оценки

$$\check{m}_N = \frac{1}{N_1 \dots N_n} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n-1} \xi(k_1, \dots, k_n), \qquad (33)$$

построенной по равномерной прямоугольной сети точек в E^n, следующее асимптотическое соотношение

$$\lim_{\substack{T_i=N_i\to\infty \\ i=1,\dots,n}} \frac{\sigma^2_{\check{m}_N}}{\sigma^2_{\check{m}_T}} = \lim_{\substack{T_i=N_i\to\infty \\ i=1,\dots,n}} \frac{DS_N}{DS_T} = \frac{f_1(0, \dots, 0)}{f(0, \dots, 0)} \geqslant 1, \qquad (34)$$

что находится в соответствии с фактом асимптотической эффективности [3] оценки (32) в классе линейных оценок. Для доказательства неравенства (34) выразим $f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ через $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Из спектрального представления корреляционной функции однородного случайного поля (см. [1]) найдем

$$R(k_1h_1, \ldots, k_nh_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j k_j h_j\right\} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots$$

$$\ldots d\lambda_n = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{(2l_1-1)\frac{\pi}{h_1}}^{(2l_1+1)\frac{\pi}{h_1}} \cdots \int\limits_{(2l_n-1)\frac{\pi}{h_n}}^{(2l_n+1)\frac{\pi}{h_n}} \times \exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j k_j h_j\right\} \times$$

$$\times f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = \frac{1}{h_1 \ldots h_n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cdots \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{i\sum_{j=1}^{n} k_j u_j\right\} \times$$

$$\times \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u_1+2\pi l_1}{h_1}, \ldots, \frac{u_n+2\pi l_n}{h_n}\right) du_1 \ldots du_n. \tag{35}$$

Здесь мы сделаем замену переменных $\lambda_j = \frac{u_j + 2\pi l_j}{h_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ и поменяем местами суммирование и интегрирование. Рассмотрим однородное случайное поле $\eta(k_1, \ldots, k_n) = \xi(k_1h_1, \ldots, k_nh_n)$ с дискретно меняющимися параметрами и корреляционной функцией $R_h(k_1, \ldots, k_n) = R(k_1h_1, \ldots, k_nh_n)$, для которой имеет место спектральное представление с плотностью $f_h(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Из (35) получим соотношение

$$f_h(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} h_j} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\lambda_1 + 2\pi l_1}{h_1}, \ldots, \frac{\lambda_n + 2\pi l_n}{h_n}\right). \tag{36}$$

В частности, если $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 1$, то

$$f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} h_j} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\lambda_1 + 2\pi l_1}{h_1}, \ldots, \frac{\lambda_n + 2\pi l_n}{h_n}\right),$$

откуда следует, что для любого $\lambda \in E^n$ $\frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)} \geqslant 1$, в частности, и при $\lambda = \lambda_0\,(0, \ldots, 0)$, что доказывает (34).

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность М. И. Ядренко за руководство и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965.

2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966.

3. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. ИЛ, М., 1961.

4. Леонов В. П. О дисперсии временных средних стационарного случайного процесса.— Теория вероятностей и ее применение, 6, № 1, 1961.

5. Forter R.— Trabajos de Estadística, 10, 3, Madrid, 1959, 209—232

Yu. S. Davidovich

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE VARIANCES OF SPACE MEANS OF A HOMOGENEOUS RANDOM FIELD

Summary

Let $\xi(p)$ be a homogeneous random field with the continuous (discrete) changing parameter $P = \{x_1, \ldots, x_n\} \in E^n$ (E^n — the Euclidean n-space) and let

$$S_T = \int_0^{T_1} \cdots \int_0^{T_n} \xi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \left(S_N = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{N_n-1} \xi(k_1, \ldots, k_n) \right).$$

This paper deals with the asymptotic behaviour of variances DS_T (DS_N), when $\min\limits_{i=1,\ldots,n} T_i \to \infty$ ($\min\limits_{i=1,\ldots,n} N_i \to \infty$) and asymptotic formulas for DS_T and DS_N. The choosl of the estimate of the mean of a homogeneous random field $\xi(p)$ is investigated.

Поступила в редколлегию 4.IV. 1969.