В. А. ЕГОРОВ, *асп.*
Ленинградский университет

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЗАКОНА ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots \qquad (1)$$

последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями. Положим

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad B_n = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2, \quad \chi_n = \sqrt{\frac{B_n}{\ln \ln B_n}}.$$

Говорят, что последовательность (1) подчиняется закону повторного логарифма (з. п. л.), если

$$P\left(\limsup \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln \ln B_n}} = 1\right) = 1. \qquad (2)$$

А. Н. Колмогоров [1] доказал, что если $B_n \to \infty$ и $|X_n| \leqslant m_n = o(\chi_n)$, то для последовательности (1) справедлив з. п. л. Изучением достаточных условий для справедливости з. п. л. занимались А. Винтнер и П. Хартман [2], В. В. Петров [3] и др.

В настоящей работе получены новые условия типа Линдеберга, достаточные для справедливости з. п. л., и исследована оптимальность этих условий.

Положим $L_n(y) = \int\limits_{|x|>y} x^2 dV_n(x)$, где $V_n(x)$ — функция распределения случайной величины X_n, $\ln_2 x \doteq \ln\ln x$.

Теорема 1. Пусть для некоторого фиксированного $\delta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнены условия

$$\sum_n P(|X_n| > \varepsilon \sqrt{B_n \ln_2 B_n}) < \infty, \qquad (3)$$

$$\frac{(\ln B_n)^\delta}{B_n} \sum_{j=1}^{n} L_j(\varepsilon \chi_n) \to 0 \qquad (n \to \infty). \qquad (4)$$

Тогда для (1) справедлив з. п. л.

«Неулучшаемость» теоремы 1 показывает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)$ — возрастающая при $x > x_0$, медленно меняющаяся функция, представимая при всех целых n в виде $\varphi(n) = (\ln n)^{\delta_n}$, где δ_n — некоторая последовательность, стремящаяся к нулю, x_0, n_0 — некоторые числа. Тогда существует последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}$ такая, что

$$B_n \sim n^{*)}, \tag{5}$$

$$\frac{\varphi(B_n)}{B_n} \sum_{j=1}^{n} L_j(2) \to 0 \qquad (n \to \infty), \tag{6}$$

и закон повторного логарифма несправедлив.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Лемма 1. Пусть $A_n(\varepsilon) > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ ряд

$$\sum_n A_n(\varepsilon) < \infty. \tag{7}$$

Тогда найдется последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такая, что

$$\sum_n A_n(\varepsilon_n) < \infty. \tag{8}$$

Действительно, для $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ положим $\varepsilon_n = 2^{-k}$, где $\{n_k\}$ выбрано так, чтобы $\sum\limits_{n=n_k}^{\infty} A_n(2^{-k}) < 2^{-k}$. Тогда, если $n_{p-1} \leqslant N < n_p$, то

$$\sum_{n=N}^{\infty} A_n(\varepsilon_n) \leqslant \sum_{n=n_{p-1}}^{\infty} A_n(\varepsilon_n) = \sum_{k=p-1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} A_n(2^{-k}) \leqslant 2^{-p+2} \to 0.$$

Лемма 2. Пусть $a_n(\varepsilon) \geqslant 0$ и $a_n(\varepsilon) \to 0$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Тогда найдется последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такая, что

$$a_n(\varepsilon_n) \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{9}$$

Действительно, положим $c_n(\varepsilon) = \max\limits_{j \geqslant n} a_j(\varepsilon)$. Тогда $c_n(\varepsilon) \downarrow 0$. Пусть $c_n(2^{-k}) < 2^{-k}$ при $n \geqslant n_k$. Для $n_{k-1} \leqslant n < n_k$ положим $\varepsilon_n = 2^{-k+1}$. Тогда для $n_{k-1} \leqslant n < n_k$ имеем

$$c_n(\varepsilon_n) \leqslant c_{n_{k-1}}(\varepsilon_n) = c_{n_{k-1}}(2^{-k+1}) \leqslant 2^{-k+1} \to 0. \tag{10}$$

Из (10) следует соотношение (9). В силу лемм 1 и 2 условия (3) и (4) можно заменить условиями

$$\sum_n P\left(|X_n| > \varepsilon_n \sqrt{B_n \ln_2 B_n}\right) < \infty, \tag{11}$$

$$\frac{(\ln B_n)^{\delta}}{B_n} \sum_{j=1}^{n} L_j(\varepsilon_n \chi_n) \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{12}$$

для некоторой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$.

---

*) Соотношение $B_n \sim n$ означает, что $B_n/n \to 1$ $(n \to \infty)$.

Далее, имеем в силу (12)

$$EX_n^2 = o(B_n) \text{ и } B_n \to \infty \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Пусть $\{n_k\}$— последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям $B_{n_k-1} < 2^k \leqslant B_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда в силу (13) получим

$$1 \leqslant \sim \frac{B_{n_k}}{2^k} \sim \frac{B_{n_k-1}}{2^k} < 1. \tag{14}$$

Из соотношений (14) следует

$$B_{n_k} \sim 2^k. \tag{15}$$

Пусть $n_{p-1} < n \leqslant n_p$. Тогда имеем в силу (12) и (15)

$$\sum_{j=1}^{n} L_j(4\varepsilon_j \chi_j) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=n_{k-1}+1} L_j(4\varepsilon_{n_k}\chi_{n_{k-1}}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} L_j(\varepsilon_{n_k}\chi_{n_k}) \leqslant C \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{n_k}}{(\ln B_{n_k})^\delta} \leqslant C \sum_{k=1}^{p} k^{-\delta} 2^k. \tag{16}$$

Здесь и ниже буквой C мы обозначаем положительные постоянные.

Из (13) и (16) следует, что

$$\frac{(\ln B_n)^\delta}{B_n} \sum_{j=1}^{n} L_j(4\varepsilon_j \chi_j) < C. \tag{17}$$

Действительно, имеем

$$p^\delta 2^{-p} \sum_{k=1}^{p} k^{-\delta} 2^k \leqslant 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots < C.$$

Положим $\overline{X}_n = X_n$, если $|X_n| < 4\varepsilon_n \chi_n$ и $\overline{X}_n = 0$, если $|X_n| \geqslant 4\varepsilon_n \chi_n$. Далее, положим $\underline{X}_n = X_n - \overline{X}_n$, $\overline{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \overline{X}_j$, $\underline{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \underline{X}_j$.

В силу (17) и (13) имеем

$$D\overline{S}_n = \sum_{j=1}^{n} E\overline{X}_j^2 - (E\underline{X}_j)^2 \sim B_n. \tag{18}$$

В силу соотношения (18) к последовательности $\{\overline{X}_n - E\overline{X}_n\}$ применима теорема А. Н. Колмогорова [1], из которой следует, что

$$P\left(\limsup \frac{\overline{S}_n - E\overline{S}_n}{\sqrt{2B_n \ln_2 B_n}} = 1\right) = 1. \tag{19}$$

Покажем, что из (17) вытекает соотношение

$$|E\bar{S}_n| = |E\underline{S}_n| = o(\sqrt{B_n \ln_2 B_n}). \tag{20}$$

Имеем для $n_{p-1} < n \leqslant n_p$, учитывая соотношение (17):

$$\left|\sum_{j=1}^{n} E\underline{X}_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} E|\underline{X}_j| \leqslant C \sum_{j=1}^{n_p} \frac{\sqrt{\ln_2 B_j}}{\varepsilon_j \sqrt{B_j}} L_j(4\varepsilon_j \chi_j) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{\sqrt{\ln_2 B_{n_k}}}{\varepsilon_{n_k} \sqrt{B_{n_k}}} L_j(4\varepsilon_j \chi_j) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{p} \frac{\sqrt{B_{n_k}}}{\varepsilon_{n_k} (\ln B_{n_k})^{\frac{\delta}{2}}} \leqslant C \sum_{k=1}^{p} \frac{2^{\frac{k}{2}}}{\varepsilon_{n_k} k^{\frac{\delta}{2}}}. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что, если ε_n стремится к нулю достаточно медленно, правая часть соотношения (21) есть $o\left(2^{\frac{p}{2}}\right) = o(\sqrt{B_n})$. Соотношение (20) доказано.

Таким образом, для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что с вероятностью единица

$$|\underline{S}_n| = o(\sqrt{B_n \ln_2 B_n}). \tag{22}$$

Пусть A — произвольное целое положительное число. Имеем в силу соотношения (17)

$$\sum_k \left[\sum_{j=n_{k-1}}^{n_k-1} P(\underline{X}_j \neq 0)\right]^A \leqslant \sum_k \left[\sum_{j=n_{k-1}}^{n_k-1} \frac{E\underline{X}_j^2}{4\varepsilon_j^2 \chi_j^2}\right]^A \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \left[\frac{C}{\varepsilon_{n_k}^2 \chi_{n_k}^2} \sum_{j=1}^{n_k} E\underline{X}_j^2\right]^A \leqslant \sum_k \left[\frac{CB_{n_k} \ln_2 B_{n_k}}{B_{n_k} (\ln B_{n_k})^{\delta} \varepsilon_{n_k}^2}\right]^A \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_k (\ln B_{n_k})^{-\frac{A\delta}{2}} \leqslant C \sum_k k^{-\frac{A\delta}{2}}. \tag{23}$$

Последний ряд соотношения (23) сходится, если $A\delta > 2$. Далее, имеем

$$n_{k+1} - n_k \to \infty \qquad (k \to \infty). \tag{24}$$

Действительно, предположим противное. Тогда можно найти последовательность k_p такую, что $n_{k_p+1} - n_{k_p} \leqslant C$. В силу (13) имеем, что $B_{n_{k_p+1}}/B_{n_k} \to 1$ $(p \to \infty)$. Последнее соотношение противоречит выражению (15). Пусть D_k — событие, состоящее в том, что какие-нибудь A из случайных величин $\underline{X}_j$ $(j = n_{k-1}, \ldots, n_k - 1)$

отличны от нуля. Учтя (24), получим, что ряд $\sum\limits_k P(D_k)$ не превосходит левой части неравенства (23) и потому сходится. Применив лемму Бореля — Кантелли, получим, что с вероятностью единица для достаточно больших k найдется не более, чем $A - 1$ случайных величин $\underline{X}_n$ $(n_{k-1} \leqslant n < n_k)$, отличных от нуля.

В силу соотношения (11) и леммы Бореля — Кантелли с вероятностью единица $\underline{X}_n = o\left(\sqrt{B_n \ln_2 B_n}\right)$. Следовательно, с вероятностью единица

$$\sum_{j=n_{k-1}}^{n_k-1} \underline{X}_j = o\left(\sqrt{B_{n_k} \ln_2 B_{n_k}}\right). \tag{25}$$

Пусть $n_{k-1} \leqslant n < n_k$. Тогда имеем с вероятностью 1

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \underline{X}_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n_k} |\underline{X}_j| \leqslant \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=n_{p-1}}^{n_p-1} |\underline{X}_j| = \sum_{p=1}^{k} o\left(\sqrt{B_{n_p} \ln_2 B_{n_p}}\right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{k} o\left(\sqrt{2^p \ln_2 2^p}\right) = o\left(\sqrt{2^k \ln_2 2^k}\right) = o\left(\sqrt{B_n \ln_2 B_n}\right).$$

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Пусть для $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ случайная величина X_n принимает значения $\pm\alpha(2^k)\sqrt{2^k \ln_2 2^k}$ с вероятностями, равными $p_k = [2^k \varphi^2(2^k)]^{-1}$, значение ± 2 с вероятностями по $\frac{1}{4}$ и значение 0 с вероятностью $\frac{1}{2} - 2p_k$.

Здесь $\alpha(x)$ — медленно меняющаяся функция, причем $\alpha(n)$ стремится к нулю достаточно медленно. Не умаляя общности, можно считать, что $\ln_2 n = o(\varphi(n))$. Поэтому имеем

$$EX_n^2 = 1 + \alpha^2(2^k) \ln_2 2^k / \varphi^2(2^k) \sim 1.$$

Следовательно, $B_n \sim n$. При $2^{p-1} \leqslant n < 2^p$ имеем

$$\frac{\varphi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n} L_j(2) \leqslant \frac{C\varphi(2^p)}{2^p} \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha^2(2^k) \ln_2 2^k \cdot 2^k}{\varphi^2(2^k)} =$$

$$= C\,\frac{\varphi(2^p)}{2^p} \sum_{k=1}^{p} \beta_k 2^k. \tag{26}$$

Так как $\beta_{k+1}/\beta_k \to 1$, то правая часть (26) не превосходит выражения

$$C\,\frac{\varphi(2^p)\,\beta_p 2^p}{2^p} = \frac{\varphi(2^p)\,\alpha^2(2^p)\ln_2 2^p}{\varphi^2(2^p)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Остается показать, что построенная последовательность случайных величин не удовлетворяет з. п. л. Точно так же, как было получено соотношение (19), можно найти, что

$$P\left(\limsup \frac{|\overline{S}_n|}{\sqrt{2n \ln_2 n}} = 1\right) = 1.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что с вероятностью единица

$$\limsup \frac{\underline{S}_n}{\sqrt{n \ln_2 n}} = \infty.$$

Для этого, в свою очередь, в силу леммы Бореля — Кантелли достаточно установить, что

$$\sum_k P\left(\underline{S}_{2^k} - \underline{S}_{2^{k-1}} \geqslant \eta_k \sqrt{2^k \ln_2 2^k}\right) = \infty \tag{27}$$

для некоторой последовательности $\eta_k \uparrow \infty$.

Пусть $\xi_j = \operatorname{sign} \underline{X}_j$, тогда

$$P\left(\underline{S}_{2^k} - \underline{S}_{2^{k-1}} \geqslant \eta_k \sqrt{2^k \ln_2 2^k}\right) = P\left(\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} \xi_j \geqslant \alpha^{-1}(2^k)\,\eta_k\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_I \prod_{j\in I} P(\xi_j = 1) \prod_{j\in \overline{I}} P(\xi_j = 0). \tag{28}$$

В правой части (28) суммирование ведется по всевозможным наборам индексов I из $(2^{k-1}, 2^k)$ таких, что в I количество элементов больше, чем $\alpha^{-1}(2^k)\,\eta_k$; $\overline{I}$ есть совокупность индексов из $(2^{k-1}, 2^k]$, не попавших в I.

Не умаляя общности, можно считать, что $m_k = \alpha^{-1}(2^k)\,\eta_k$ — целочисленная последовательность, достаточно медленно стремящаяся к бесконечности.

Правая часть (28) может быть оценена выражением

$$p_k^{m_k}(1-2p_k)^{2^{k-1}-m_k} C_{2^{k-1}}^{m_k} \geqslant$$

$$\geqslant m_k^{-m_k}(2^{k-1}-m_k)^{m_k}\,[2^k \varphi^2(2^k)]^{-m_k} \cdot 2^{-1}(1-2p_k)^{2^{k-1}}. \tag{29}$$

Далее, имеем

$$(1-2p_k)^{2^{k-1}} \sim e^{-p_k 2^k} = e^{-\frac{1}{\varphi^2(2^k)}} \sim 1.$$

Поэтому выражение (29) может быть оценено так:

$$(Cm_k)^{-m_k}\varphi^{-2m_k}(2^k), \tag{30}$$

$\varphi(n)$ может быть представлена в виде $(\ln n)^{\delta_n}$, где $\delta_n \to 0\ (n \to \infty)$. Отсюда выражение (30) имеет вид

$$(Cm_k)^{-m_k} k^{-\delta_k m_k}. \tag{31}$$

Если m_k стремится к бесконечности настолько медленно, что $\delta_{n_k} m_k \to$ $\to 0$ и $m_k^{m_k} = o\,(\ln k)$, то ряд, составленный из выражений (31), а следовательно, и ряд (27), расходится.

Автор искренне благодарит научного руководителя Валентина Владимировича Петрова за внимание к работе и полезные замечания к ней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Ueber das Gezetz des iterierten Logarithmus,— Math. Annalen, 1929, 101, 126—135.

2. Hartman P., Wintner A. On the low of the iterated logarithm.— Amer. J. Math., 3, 1941, 169—176.

3. Петров В. В. О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма.— Теор. вероятн. и ее примен., 1966, 2, 454—458.

V. A. Egorov

SOME SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE ITERATED LOGARITHM LAW

Summary

Some new conditions of Lindeberg type, sufficient for the law of the iterated logarithm, are received. The optimum of this conditions is investigated.

Поступила в редколлегию 13.V. 1969.

Л. П. КОНОНЧУК, ст. инж.
НИИАСС

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРА ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В этой статье рассматриваются некоторые оценки корреляционной функции и спектральной плотности однородного в широком смысле случайного поля. Полученные результаты вытекают из обобщения идей Парзена [1, 2], касающихся статистического спектрального анализа стационарных процессов, на случай однородных полей. Некоторые оценки спектральной плотности для однородного гауссовского поля с дискретным двумерным параметром были даны У. Гренандером и М. Розенблаттом [3], а для однородного и изотропного гауссовского поля П. С. Кноповым [4, 5].

Пусть $\xi\,(t,\,x)$, $-\infty < t,\ x < +\infty$ — однородное в широком смысле поле с $M\xi\,(t,\,x) = m_\xi = \text{const}$ и непрерывной корреляционной функцией $M\,[\xi\,(t,\,x) - m_\xi]\,[\xi\,(t+u,\,x+v) - m_\xi] = R_\xi\,(u,v)$, которая абсолютно интегрируема:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |R_\xi\,(u,\,v)|\,dudv < \infty. \tag{1}$$

Для случайного поля $\xi\,(t,\,x)$ будем предполагать выполненными следующие уравнения:

1) моменты четвертого порядка

$$M\,[\xi\,(t,\,x) - m_\xi]\,[\xi\,(t+u_1,\,x+v_1) - m_\xi]\,[\xi\,(t+u_2,\,x+v_2) - m_\xi]\,[\xi\,(t+u_3,\,x+v_3) - m_\xi] = P_\xi\,(u_1,\,v_1,\,u_2,\,v_2,\,u_3,\,v_3)$$

не зависят от $t,\ x$;

2) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |Q_\xi\,(u_1,\,v_1,\,u_2,\,v_2,\,u_3,\,v_3)|\,du_1dv_1du_2dv_2du_3dv_3 < \infty, \tag{2}$$

где

$$Q_\xi\,(u_1,\,v_1,\,u_2,\,v_2,\,u_3,\,v_3) = P_\xi\,(u_1,\,v_1,\,u_2,\,v_2,\,u_3,\,v_3) - R_\xi\,(u_1,\,v_1)\,P_\xi\,(u_3-u_2,\,v_3-v_2) - R_\xi\,(u_2,\,v_2)\,R_\xi\,(u_3-u_1,\,v_3-v_1) - R_\xi\,(u_3,\,v_3)\,R_\xi\,(u_2-u_1,\,v_2-v_1)$$

и непрерывна по совокупности переменных.