УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОДНОСТОРОННЕГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Рассмотрим задачу минимаксного оценивания преобразования $A\xi = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a(j)\xi(j)$ стационарной случайной последовательности $\xi(k)$ по наблюдениям последовательности $\xi(k)+\eta(k)$ в точках $k = -1, -2, \ldots$.

Покажем, что максимальное значение оптимальной среднеквадратической ошибки оценки преобразования $A\xi$ в классе случайных последовательностей $\xi(k)$, удовлетворяющих условиям $M\xi(k) = 0$, $M|\xi(k)|^2 \leqslant R^2$, задается максимальным собственным значением вполне непрерывного оператора K в пространстве l_2, который определяется последовательностью $a(j)$, $j = 0, 1, \ldots$. Это максимальное значение ошибки задается процессом одностороннего скользящего среднего $\xi(k) = \sum\limits_{m=-\infty}^{k} g(k-m)\varphi(m)$, где последовательность $g(m)$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} |g(m)|^2 = R^2$ задается собственным вектором оператора K, отвечающим наибольшему собственному значению. Такая задача для наблюдений без шума рассматривалась автором статьи [1].

Будем предполагать, что последовательность $a(j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ такая, что выполняются условия:

$$(A)\quad \sum_{j=0}^{\infty} |a(j)| < \infty;$$

$$(B)\quad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)|a(j)|^2 < \infty.$$

(Из условия (A) следует, в частности, что $M|A\xi|^2 < \infty$.) Будем предполагать также, что $\eta(k)$ — стационарная случайная последовательность с нулевым средним, абсолютно непрерывной спектральной мерой, и последовательности $\xi(k)$ и $\eta(k)$ некоррелированы.

Чтобы найти минимаксное значение среднеквадратической ошибки линейной оценки преобразования $A\xi$, вычислим минимаксное значение среднеквадратической ошибки линейной оценки преобразования $A_N\xi = \sum\limits_{j=0}^{N} a(j)\xi(j)$ по наблюдениям последовательности $\xi(k)+\eta(k)$ в точках $k = -1, -2, \ldots$, а затем перейдем к пределу при $N \to \infty$.

Так как

$$M\,|\,A\xi - A_N\xi\,|^2 = M\left|\sum_{j=N+1}^{\infty} a(j)\,\xi(j)\right|^2 \leqslant R^2\left|\sum_{j=N+1}^{\infty} a(j)\right|^2$$

и выполняется условие (A), то $M\,|\,A\xi - A_N\,\xi\,|^2 \to 0$ при $N \to \infty$ и указанный переход от минимаксного значения ошибки оценки преобразования $A_N\,\xi$ к минимаксному значению ошибки оценки преобразования $A\xi$ возможен. Рассмотрим линейные оценки преобразования $A_N\,\xi$, которые имеют вид

$$\widehat{A}_N\xi = \sum_{k=-\infty}^{1} c(k)\,(\xi(k) + \eta(k)). \tag{1}$$

Среднеквадратическая ошибка такой оценки зависит от коэффициентов $c(k)$, $k = -1, -2, \ldots$, спектральных мер $F(d\lambda)$, $G(d\lambda)$ случайных последовательностей $\xi(k)$, $\eta(k)$ и определяется формулой

$$\sigma^2(A_N, C, F, G) = M\,|\,A_N\xi - \widehat{A}_N\xi\,|^2 = M\left|\sum_{j=0}^{N} a(j)\,\xi(j) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=-\infty}^{1} c(k)\,(\xi(k) + \eta(k))\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\,A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})\,|^2\,F(d\lambda) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |\,C(e^{i\lambda})\,|^2\,G(d\lambda), \tag{2}$$

где

$$A_N(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{N} a(j)\,e^{ij\lambda}, \qquad C(e^{i\lambda}) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c(k)\,e^{ik\lambda}.$$

При фиксированных коэффициентах $c(k)$, $k = -1, -2, \ldots$ нужно найти максимум среднеквадратической ошибки в классе стационарных последовательностей $\xi(k)$, удовлетворяющих условиям $M\xi(k) = 0$, $M\,|\,\xi(k)\,|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} F(d\lambda) \leqslant R^2$. В классе последовательностей с абсолютно непрерывными спектральными мерами можно указать последовательность спектральных плотностей $f_n(e^{i\lambda})$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(e^{i\lambda})\,d\lambda = R^2$, для которых последовательность $\sigma^2(A_N, C, f_n, G)$ сходится при $n \to \infty$ к максимальному значению ошибки.

Перед тем как минимизировать по всем линейным оценкам вида (1) максимальное значение ошибки, найдем формулу для вычисления минимальной среднеквадратической ошибки оценки преобразования $A_N\xi$, которая, в отличие от формулы (2), не зависит от спектральных характеристик помехи $\eta(k)$. Для этого предположим, что спектральные меры $F(d\lambda)$, $G(d\lambda)$ абсолютно непрерывны с плотностями $f(e^{i\lambda})$,

$g(e^{i\lambda})$ соответственно. Предположим, что коэффициенты $c(k)$, $k = -1, -2, \ldots$ подобраны так, чтобы минимизировать величину ошибки для заданных плотностей $f(e^{i\lambda})$, $g(e^{i\lambda})$. Функция $C(z) = C(re^{i\lambda})$ в этом случае будет аналитической в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и $\lim_{r\to 1} C(re^{i\lambda}) = C(e^{i\lambda})$. Кроме того, функция $C(z)$ не имеет нулей в круге $\bar{D}$. Представим функцию $C(e^{i\lambda})$ в виде $C(e^{i\lambda}) = |C(e^{i\lambda})| \times e^{i\Psi(e^{i\lambda})}$. Функция $\ln C(e^{i\lambda}) = \ln |C(e^{i\lambda})| + i\Psi(e^{i\lambda})$ будет аналитической в круге D. Следовательно, функции $\Psi(e^{i\lambda})$ и $\ln |C(e^{i\lambda})|$ связаны с помощью сопряженного преобразования Пуассона [4]:

$$\Psi(e^{i\lambda}) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\lambda - t) \ln |C(e^{it})|\, dt, \tag{3}$$

где $Q_r(\lambda)$ — сопряженное ядро Пуассона. Если обозначим через $P_r(\lambda)$ ядро Пуассона, то

$$Q_r(\lambda) = \operatorname{Im} H_r(\lambda) = (2r \sin \lambda)/(1 + r^2 - 2r \cos \lambda),$$

$$P_r(\lambda) = \operatorname{Re} H_r(\lambda) = (1 - r^2)/(1 + r^2 - 2r \cos \lambda),$$

$$H_r(\lambda) = (1 + re^{i\lambda})/(1 - re^{i\lambda}), \quad -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Из формулы (2) следует, что среднеквадратическая ошибка $\sigma^2(A_N, C, f, g)$ является функцией от $|C(e^{i\lambda})|$. Для определения оптимальной функции $|C(e^{i\lambda})|$ используем необходимое условие экстремума функционала. Пусть $B(e^{i\lambda})$ — другая функция из допустимого класса аналитических функций, удовлетворяющих уравнению (3). Определим функцию $C_\varepsilon(e^{i\lambda})$ формулой [5]

$$\ln |C_\varepsilon(e^{i\lambda})| = \ln |C(e^{i\lambda})| + \varepsilon \ln |B(e^{i\lambda})|.$$

Тогда

$$|C_\varepsilon(e^{i\lambda})| = |C(e^{i\lambda})| \exp\{\varepsilon \ln |B(e^{i\lambda})|\}.$$

Подставим значение $|C_\varepsilon(e^{i\lambda})|$ в формулу для вычисления $\sigma^2(A_N, C, f, g)$, которую можно записать в таком виде:

$$\sigma^2(A_N, C, f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\,|A_N(e^{i\lambda})|^2 f(e^{i\lambda}) + |C(e^{i\lambda})|^2 [f(e^{i\lambda}) + g(e^{i\lambda})] -$$

$$- [A_N(e^{i\lambda}) |C(e^{i\lambda})| e^{-i\Psi(e^{i\lambda})} + \overline{A_N(e^{i\lambda})}\, |C(e^{i\lambda})| e^{i\Psi(e^{i\lambda})}] f(e^{i\lambda})]\, d\lambda.$$

Тогда $\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \sigma^2(A_N, C_\varepsilon, f, g)|_{\varepsilon=0} = 0$ является необходимым условием оптимальности $|C(e^{i\lambda})|$. Из этого условия следует, что оптимальное значение $|C(e^{i\lambda})|$ удовлетворяет условию

$$2|C(e^{i\lambda})|^2 [f(e^{i\lambda}) + g(e^{i\lambda})] = [\overline{A_N(e^{i\lambda})}\, C(e^{i\lambda}) + A_N(e^{i\lambda}) \overline{C(e^{i\lambda})}] f(e^{i\lambda}) +$$

$$+ \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\lambda - t) [\overline{A_N(e^{it})}\, C(e^{it}) - A_N(e^{it}) \overline{C(e^{it})}] f(e^{it})\, dt.$$

Полученное выражение можно записать так:

$$|C(e^{i\lambda})|^2 [f(e^{i\lambda}) + g(e^{i\lambda})] = \mathrm{Re}\,[\overline{A_N(e^{i\lambda})}\,C(e^{i\lambda})]\,f(e^{i\lambda}) +$$

$$+ \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\lambda - t)\,\mathrm{Im}\,[\overline{A_N(e^{it})}\,C(e^{it})]\,f(e^{it})\,dt =$$

$$= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [P_r(\lambda - t)\,\mathrm{Re}\,[\overline{A_N(e^{it})}\,C(e^{it})] + Q_r(\lambda - t)\times$$

$$\times \mathrm{Im}\,[\overline{A_N(e^{it})}\,C(e^{it})]]\,f(e^{it})\,dt = \mathrm{Re} \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{A_N(e^{it})}\,C(e^{it}) \times$$

$$\times H_r(\lambda - t)\,f(e^{it})\,dt.$$

Здесь использована возможность аналитического продолжения в единичный круг D с помощью преобразования Пуассона функции $\mathrm{Re}\,[A_N(e^{i\lambda})\,\bar{C}(e^{i\lambda})]\,f(e^{i\lambda})$. Интегрирование полученных выражений по отрезку $[-\pi, \pi]$ с учетом того, что [4]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_r(\lambda - t)\,d\lambda = 1, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi,$$

дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} |C(e^{i\lambda})|^2 [f(e^{i\lambda}) + g(e^{i\lambda})]\,d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,[\overline{A_N(e^{i\lambda})}\,C(e^{i\lambda})]\,f(e^{i\lambda})\,d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{A_N(e^{i\lambda})}\,C(e^{i\lambda})\,f(e^{i\lambda})\,d\lambda.$$

Используя приведенные соотношения для преобразования минимальной среднеквадратической ошибки $\sigma^2(A_N, C, f, g)$, приходим к такой формуле:

$$\min_c \sigma^2(A_N, C, f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})]\,\overline{A_N(e^{i\lambda})}\,f(e^{i\lambda})\,d\lambda =$$

$$= \min_c \sigma^2(A_N, C, f). \tag{4}$$

Здесь $\min\limits_c$ обозначает минимум по всем допустимым оценкам вида (1). Эта формула для минимальной среднеквадратической ошибки оценки преобразования $A_N\xi$ при фиксированной плотности $f(e^{i\lambda})$ последовательности $\xi(k)$ не зависит от спектральной плотности $g(e^{i\lambda})$ помехи $\eta(k)$. С учетом полученной формулы определим минимаксное значение ошибки. Можно записать, что

$$\lim_{n\to\infty} \min_c \sigma^2(A_N, C, f_n, g) = \lim_{n\to\infty} \min_c \sigma^2(A_N, C, f_n) = \min_c \max_F \sigma^2(A_N, C, F) =$$

$$= \min_c \max_\lambda R^2 |A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})|\,|A_N(e^{i\lambda})|.$$

Здесь $\max\limits_{F}$ обозначает максимум по всем спектральным мерам стационарных последовательностей, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(d\lambda) \leqslant R^2$. Для оценки полученного выражения используем некоторые результаты из теории аналитических функций [6]. Выражение $A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})$ можно рассматривать как функцию из класса аналитических функций $f(z)$, представимых в виде ряда, начинающегося с фиксированных членов $\sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k z^k$. Для каждой функции этого класса выполняется соотношение

$$\max_{\lambda} |f(e^{i\lambda})| \geqslant \mu_N. \qquad (5)$$

Здесь μ_N, $\mu_N > 0$ — наибольшее собственное значение эрмитовой формы, определяемой матрицей (h_{pq}); $p, q = 0, 1, \ldots, N$, где $h_{pq} = \alpha_p \bar{\alpha}_q + \alpha_{p-1}\bar{\alpha}_{q-1} + \ldots + \alpha_0 \bar{\alpha}_{q-p}$ при $p \leqslant q$ и $h_{qp} = \bar{h}_{pq}$, причем равенство в соотношении (5) достигается для функций $f(z)$ специального вида. Величины μ_N обладают еще одним свойством [6]. Они образуют неубывающую последовательность и $\lim\limits_{N\to\infty} \mu_N = \max\limits_{\lambda} |f(e^{i\lambda})|$ для функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$. Используем указанные соотношения для вычисления минимаксного значения ошибки. Получим такое неравенство:

$$\min_{c} \max_{\lambda} R^2 |A_N(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda})| \, |A_N(e^{i\lambda})| \leqslant R^2 v_N^2 \max_{\lambda} |A_N(e^{i\lambda})| \underset{N\to\infty}{\rightarrow} R^2 v^2.$$

Здесь v_N^2 — максимальное собственное значение матрицы с элементами

$$l_{pq} = \sum_{m=0}^{\min(p,q)} a(N-p+m)\, \overline{a(N-q+m)}; \qquad p, q = 0, 1, \ldots, N.$$

Так как $h_{N-p, N-q} = K(p, q)$, то v_N^2 — максимальное собственное значение оператора K_N в l_2, заданного матрицей

$$K(p, q) = \sum_{m=0}^{\min(N-p, N-q)} a(m+p)\, \overline{a(m+q)}; \qquad p, q = 0, 1, \ldots, N.$$

Этот оператор можно представить в виде $K_N = A_N \bar{A}_N$, где A_N задается матрицей с элементами $a_{kj} = a(k+j)$, $k+j \leqslant N$; $a_{kj} = 0$, $k+j > N$; $k, j = 0, 1, \ldots$ Операторы A_N являются приближением вполне непрерывного оператора A в l_2, заданного матрицей с элементами $a_{kj} = a(k+j)$; $k, j = 0, 1, \ldots$ (см. условие (B)). Разность квадратов абсолютных норм операторов A и A_N, равная $\sum\limits_{m=N+1}^{\infty} (m+1) |a(m)|^2$, стремится к нулю при $N \to \infty$. Значит, последовательность A_N сходится при $N \to \infty$ к A равномерно. Отсюда [7] $\lim\limits_{N \to \infty} v_N = v$, где v — наибольшее собственное значение оператора A в пространстве l_2. Мы доказали, что

$$\min_{\hat{A}} \max_{\xi} M \mid A\xi - \hat{A}\xi \mid^2 \leqslant R^2 v^2,$$

где через $\min\limits_{\hat{A}}$ обозначен минимум по всем линейным оценкам преобразования $A\xi$, а через $\max\limits_{\xi}$ — максимум по всем стационарным последовательностям, удовлетворяющим условиям $M\xi(k) = 0$, $M \mid \xi(k) \mid^2 \leqslant R^2$. Покажем, что в данном неравенстве возможен только знак равенства. Для этого нужно оценить величину $\max\limits_{\xi} \min\limits_{\hat{A}} M \mid A\xi - \hat{A}\xi \mid^2$ снизу. Если предположить, что спектральная мера $F(d\lambda)$ последовательности $\xi(k)$ задана, то можно записать, что

$$\min_{\hat{A}} M \mid A\xi - \hat{A}\xi \mid = \min_{C \in H_2(F+G)} \int_{-\pi}^{\pi} \mid A(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda}) \mid^2 F(d\lambda) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \mid C(e^{i\lambda}) \mid^2 G(d\lambda) \geqslant \min_{C \in H_2(F)} \int_{-\pi}^{\pi} \mid A(e^{i\lambda}) - C(e^{i\lambda}) \mid^2 F(d\lambda),$$

где $\min\limits_{C \in H_2(F+G)}$ и $\min\limits_{C \in H_2(F)}$ — минимум по всем аналитическим в единичном круге функциям классов Харди [4] по мере $F(d\lambda) + G(d\lambda)$ и $F(d\lambda)$ соответственно.

Последнее выражение в данном неравенстве равно квадрату среднеквадратической ошибки оценки преобразования $A\xi$ по наблюдениям последовательности $\xi(k)$ в точках $k = -1, -,2 \ldots$. Максимальную величину этой ошибки можно найти, пользуясь следующими свойствами стационарных последовательностей.

Каждую стационарную случайную последовательность $\xi(k)$ можно представить в виде суммы некоррелированных детерминированной и вполне недетерминированной последовательностей [2]. Детерминированная последовательность оценивается безошибочно. Поэтому можно ограничить класс последовательностей $\xi(k)$ вполне недетерминированными последовательностями, удовлетворяющими условиям $M\xi(k) = 0$, $M \mid \xi(k) \mid^2 \leqslant R^2$. Вполне недетерминированные последовательности представимы в виде одностороннего скользящего среднего $\xi(k) = \sum\limits_{m=-\infty}^{k} g(k-m)\varphi(m)$, где $\varphi(m)$ — последовательность взаимно некоррелированных случайных величин с единичной дисперсией и $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mid g(m) \mid^2 \leqslant R^2$, так как $M \mid \xi(k) \mid^2 \leqslant R^2$. Оптимальная линейная оценка значения $\xi(j)$, $j \geqslant 0$ по наблюдениям $\xi(k)$, $k = -1, -2, \ldots$ равна $\hat{\xi}(j) = \sum_{m=-\infty}^{-1} g(j-m)\varphi(m)$. Можно записать, что

$$\max_{\xi} \min_{\hat{A}} M|A\xi - \hat{A}\xi|^2 = \max_{\|g\| \leqslant R} M \left| \sum_{j=0}^{\infty} a(j) \sum_{m=0}^{j} g(j-m)\varphi(m) \right|^2 =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant R} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\min(k,j)} g(k-m)\overline{g(j-m)}a(k)\overline{a(j)} =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant R} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} g(p)\overline{g(q)} \sum_{m=0}^{\infty} a(m+p)\overline{a(m+q)} =$$

$$= \max_{\|g\| \leqslant R} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} g(p)\overline{g(q)}K(p,q),$$

где $\max\limits_{\|g\| \leqslant R}$ — максимум по всем последовательностям $g(m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющим условию $\|g\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |g(m)|^2 \leqslant R^2$. Оператор K, заданный в пространстве l_2 матрицей $K(p,q)$; $p, q = 0, 1, \ldots$, можно представить в виде $K = A\bar{A}$, где A — оператор в l_2, заданный матрицей с элементами $a(k,j) = a(k+j)$; $k, j = 0, 1, \ldots$. В силу условия (B) A — симметричный вполне непрерывный оператор. Поэтому оператор K — непрерывный и, следовательно, имеет собственные значения v_k^2, $k = 1, 2, \ldots$, где v_k, $v_k > 0$ — собственные значения оператора A [3]. Отсюда следует, что

$$\max_{\xi} \min_{\hat{A}} M|A\xi - \hat{A}\xi|^2 \geqslant \max_{\|g\| \leqslant R} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} g(p)g(q)K(p,q) = v^2R^2,$$

где v^2 — максимальное собственное значение оператора K. Таким образом, максимальное значение среднеквадратической ошибки линейной оценки преобразования $A\xi$ определяется максимальным собственным значением вполне непрерывного оператора K. Максимальное значение ошибки в классе стационарных последовательностей, удовлетворяющих условиям $M\xi(k) = 0$, $M|\xi(k)|^2 \leqslant R^2$, получим для вполне недетерминированных последовательностей вида

$$\xi(k) = \sum_{m=-\infty}^{k} g(k-m)\varphi(m), \qquad \sum_{m=0}^{\infty} |g(m)|^2 = R^2, \tag{6}$$

где $g(m)/R$, $m = 0, 1, \ldots$ — собственный вектор оператора K, отвечающий наибольшему собственному значению v^2; $\zeta(m)$ — последовательность взаимно некоррелированных случайных величин с единичной дисперсией.

Мы показали, что

$$\min_{\hat{A}} \max_{\xi} M \,|\, A\xi - \hat{A}\xi \,|^2 \leqslant v^2 R^2 \leqslant \max_{\xi} \min_{\hat{A}} M \,|\, A\xi - \hat{A}\xi \,|^2.$$

Так как в этом неравенстве возможно только равенство [9], то минимаксное и максиминное значения среднеквадратической ошибки линейной оценки преобразования $A\xi$ совпадают.

Теорема. При выполнении условий (A), (B) максимальная среднеквадратическая ошибка оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\,\xi(j)$ стационарной случайной последовательности $\xi(k)$, $M\xi(k) = 0$, $M\,|\,\xi(k)\,|^2 \leqslant R^2$ по наблюдениям $\xi(k) + \eta(k)$ в точках $k = -1, -2, \ldots$ равна vR, где v^2 — наибольшее собственное значение самосопряженного вполне непрерывного оператора $K = A\overline{A}$ в пространстве l_2, заданного матрицей с элементами $K(p, q) = \sum_{m=0}^{\infty} a(p+m)\,\overline{a(q+m)}$; $p, q = 0, 1, \ldots$.

Максимальное значение среднеквадратической ошибки получим в том случае, когда последовательность $\xi(k)$ является последовательностью одностороннего скользящего среднего и задается формулой (6).

Пример. При оптимальном линейном оценивании величины $A\xi = \xi(0) + \xi(1)$ по наблюдениям стационарной последовательности $\xi(k) + \eta(k)$, $M\xi(k) = 0$, $M\,|\,\xi(k)\,|^2 = 1$ в точках $k = -1, -2, \ldots$ максимальную среднеквадратическую ошибку, равную $([3 + \sqrt{5}]/2)^{1/2}$, получим для последовательности $\xi(k) = g(0)\,\varphi(k) + g(1)\,\varphi(k-1)$, где $g(0) = [(3 + \sqrt{5})/(5 - \sqrt{5})]^{1/2}$, $g(1) = [2/(5 + \sqrt{5})]^{1/2}$.

1. *Моклячук М. П.* Об одной игре двух лиц с нулевой суммой и экстраполяции случайных последовательностей.— Исслѐдование операций и АСУ, 1981, вып. 17, с. 122—127. 2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов : В 3-х т. М.: Наука, 1971. Т. 1. 664 с. 3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544 с. 4. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 310 с. 5. *Yao K.* An alternative approach to the linear causal least-square filtering theory.— IEEE Trans. on Inform. Theory, 1971, N 17, p. 232—240. 6. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 308 с. 7. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы : В 3-х т. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1. 896 с. 8. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах на собственные значения. М.: Мир, 1970. 328 с. 9. *Мак Кинси Дж.* Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1960. 420 с.

Поступила в редколлегию 20.09.83