УДК 519.21

С. О. ОМАРОВ, асп., Киевский университет

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗНАЧЕНИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ ПРОЦЕССА В УЗЛАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Известная интерполяционная формула Котельникова—Шеннона показывает, что стационарный случайный процесс с ограниченным спектром безошибочно восстанавливается по наблюдениям на некоторой бесконечной последовательности узлов интерполяции.

Представляют интерес (в частности, для приложений в телеметрии, статистической радиофизике, статистической оптике) обобщения этой формулы на тот случай, когда в узлах интерполяции наблюдаются не только значение процесса, но и значения производных (см. [1—3]).

В настоящей работе обобщается формула Котельникова—Шеннона на тот случай, когда наблюдения над процессом и его производными ведутся на некоторой периодически повторяющейся группе узлов.

Пусть узлы интерполяции заданы следующим образом:

$$t_{ks}=\frac{\pi MNk}{\alpha}+\tau_s \quad (s=0,1,\dots,N-1); \qquad 0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_{N-1}<$$

$$<\frac{1}{2}\,\frac{\pi MN}{\alpha}; \qquad \alpha>0, \quad k=0,\pm1,\dots;$$

M — любое фиксированное натуральное число.

Обозначим

$$T_{ks}(z)=\left[\frac{\prod\limits_{p=0}^{N-1}\sin\frac{\alpha}{NM}(z-t_{kp})}{\frac{\alpha}{NM}(z-t_{ks})\prod\limits_{\substack{p=0\\p\neq s}}^{N-1}\sin\frac{\alpha}{NM}(\tau_s-\tau_p)}\right]^M,$$

$$T(z)=\left[\prod_{p=0}^{N-1}\sin\frac{\alpha}{NM}(z-\tau_p)\right]^M.$$

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа с показателем $\sigma<\alpha$, ограниченная на вещественной оси. Тогда имеет место следующая интерполяционная формула:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{f^{(m)}(t_{ks})}{m!}(z-t_{ks})^m\right]T_{ks}(z), \tag{1}$$

причем ряд сходится равномерно в любой ограниченной области изменения z.

Более того, справедлива оценка

$$\left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{f^{(m)}(t_{ks})}{m!} (z - t_{ks})^m T_{ks}(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_f G(z) \left(\frac{\alpha}{\pi N M (\alpha - \sigma)} + 2^{NM-1} \pi e^{-(\alpha-\sigma)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi N M}{\alpha}} \right), \tag{2}$$

где $G(z) = \frac{2^{NM+2}}{\pi^2} |T(z)|$ — функция, ограниченная в любой ограниченной области изменения z.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\frac{T(z)}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(\xi)\, d\xi}{T(\xi)(\xi - z)}, \tag{3}$$

где C_n — контур квадрата с центром в начале координат, со сторонами длиной $2\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi N M}{\alpha}$, параллельными координатным осям.

Подынтегральная функция в точке $\xi = z$ имеет простой полюс, а при $\xi = t_{ks}$ ($s = 0, 1, \ldots, N-1$) имеет полюс M-го порядка. Применяя теорему Коши о вычетах, запишем

$$\frac{T(z)}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(\xi)\, d\xi}{T(\xi)(\xi - z)} = f(z) - \sum_{k=-n}^{n} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{f^{(m)}(t_{ks})}{m!} (z - t_{ks})^m \right] T_{ks}(z).$$

Чтобы получить разложение (1) и оценку (2), необходимо оценить модуль интеграла (3):

$$\left| \frac{T(z)}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(\xi)\, d\xi}{T(\xi)(\xi - z)} \right| \leqslant \frac{|T(z)|}{2\pi} \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{C_{in}} \frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|T(\xi)|\,|\xi - z|}, \tag{4}$$

где C_{1n} и C_{2n} — стороны квадрата, параллельные мнимой оси, а C_{3n} и C_{4n} — стороны квадрата, параллельные действительной оси. Как известно [4], если $f(\xi)$, $\xi = x + iy$ — целая функция экспоненциального типа с показателем σ, ограниченная на вещественной оси ($\sup\limits_{-\infty \leqslant t < \infty} |f(t)| = C_f < \infty$), то $|f(\xi)| \leqslant C_f e^{\sigma|y|}$. Далее, очевидно, что на C_{1n} и C_{2n}

$$\xi = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi N M}{\alpha} + iy$$

и, следовательно, $|\sin \alpha\xi| = \operatorname{ch} \alpha y$, а на C_{3n} и C_{4n}

$$\xi = x \pm i \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi N M}{\alpha},$$

поэтому $|\sin \alpha\xi| \geqslant \left| \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \right|$.

Используя приведенные выше неравенства, получаем при любом фиксированном z

$$\frac{|T(z)|}{2\pi}\int\limits_{C_{1n}}\frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|T(\xi)|\,|\xi-z|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|T(z)|}{2\pi}\int_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}\frac{C_f e^{\sigma|y|}\operatorname{ch}^{-NM}\frac{\alpha}{NM}y\,dy}{\left[\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}-u\right)^2+(y-v)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|T(z)|\,2^{NM}C_f}{2\pi\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}-u\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(\alpha-\sigma)|y|}\,dy=$$

$$=\frac{2^{NM}C_f\,|T(z)|}{\pi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}-u\right](\alpha-\sigma)}.$$

Так как $z=u+iv$ фиксирована, то для достаточно больших n $|u|\leqslant\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}$. Поэтому, продолжая нашу оценку, находим

$$\frac{|T(z)|}{2\pi}\int\limits_{C_{1n}}\frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|T(\xi)|\,|\xi-z|}\leqslant\frac{2^{NM}C_f}{\pi^2 NM}\,|T(z)|\,\frac{\alpha}{n(\alpha-\sigma)}.\tag{5}$$

Для второго слагаемого получаем такую же оценку, как и для первого. Оценим третье слагаемое в (4). Так как на C_{3n} $\xi=x\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\times\times\frac{\pi NM}{\alpha}$, то для любого фиксированного $z=u+iv$

$$\frac{|T(z)|}{2\pi}\int\limits_{C_{3n}}\frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|T(\xi)|\,|\xi-z|}\leqslant\frac{|T(z)|\,C_f e^{\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}}{2\pi\left[\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{NM}}\times$$

$$\times\int_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}\frac{dx}{\left[(x-u)^2+\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}-v\right)^2\right]^{1/2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{NM}C_f e^{\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}\,|T(z)|\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}{\pi\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}-v\right]e^{NM\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left(1-e^{-2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)^{NM}}.$$

Так как $z=u+iv$ фиксировано, то для достаточно больших n

$|v| \leqslant \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}$ и $e^{-2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} < \frac{1}{2}$. Поэтому, продолжая нашу оценку, запишем

$$\frac{|T(z)|}{2\pi}\int\limits_{C_{3n}}\frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|T(\xi)|\,|\xi-z|} \leqslant \frac{2^{2NM+1}|T(z)|\,C_f e^{\sigma\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}}{\pi e^{NM\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}} =$$

$$= \frac{2^{2NM+1}}{\pi}C_f|T(z)|\,e^{-(\alpha-\sigma)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}. \tag{6}$$

Для четвертого слагаемого получаем такую же оценку, как и для третьего. Тогда из (4)—(6) следует

$$\left|\frac{T(z)}{2\pi}\int\limits_{C_n}\frac{f(\xi)\,d(\xi)}{T(\xi)(\xi-z)}\right| \leqslant C_f G(z)\left(\frac{\alpha}{nNM(\alpha-\sigma)}+2^{NM-1}\pi e^{-(\alpha-\sigma)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}\right). \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что в любой ограниченной области изменения z ряд, стоящий в правой части формулы (1), сходится к $f(z)$ равномерно.

Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с $M\xi(t)=0$ и функцией ковариации, представимой в виде

$$B(t,s)=\iint\limits_{\Lambda\,\Lambda} f(t,\lambda)\,\overline{f(s,\mu)}\,F(d\lambda, d\mu),$$

где Λ — некоторое множество параметров λ; $F(A, A')$ — комплекснозначная функция множеств, аддитивная по обоим аргументам, положительно-определенная и такая, что $\iint\limits_{\Lambda\,\Lambda}|F(d\lambda, d\mu)| < \infty$. Функция $f(t,\lambda)$ относительно t может быть доопределена в плоскости комплексного переменного до целой функции такой, что

$$C_f=\sup_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{-\infty<t<\infty}|f(t,\lambda)|<\infty,$$

$$\sigma=\sup_{\lambda\in\Lambda}C(\lambda)=\sup_{\lambda\in\Lambda}\ \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\partial^n f(t,\lambda)}{\partial t^n}\right|_{t=0}}<\infty.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если $\sigma=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}C(\lambda)<\infty$, то почти для всех выборочных функций справедлива формула

$$\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{\xi^{(m)}(t_{ks})}{m!}(t-t_{ks})^m\right]T_{ks}(z) \tag{8}$$

при любом фиксированном $\alpha>\sigma$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1

$$f(t,\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{f^{(m)}(t_{ks},\lambda)}{m!}(t-t_{ks})^m\right]T_{ks}(z)$$

при всех λ, удовлетворяющих условию $C(\lambda)<\alpha$.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_n(t)-\sum_{k=-n}^{n}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{\xi^{(m)}(t_{ks})}{m!}(t-t_{ks})^m\right]T_{ks}(z).$$

Используя теорему о спектральном представлении случайных функций [5], запишем

$$M\,|\,\xi(t)-\xi_n(t)\,|^2=M\left|\int_\Lambda\left\{f(t,\lambda)-\sum_{k=-n}^{n}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{f^{(m)}(t_{ks},\lambda)}{m!}(t-t_{ks})\right]\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times T_{ks}(z)\right\}z(d\lambda)\right|^2=\iint_{\Lambda\Lambda}\left\{f(t,\lambda)-\right.$$

$$-\sum_{k=-n}^{n}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{f^{(m)}(t_{ks},\lambda)}{m!}(t-t_{ks})^m\right]T_{ks}(z)\left\{\overline{f(t,\mu)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=-n}^{n}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\left[\frac{\overline{f^{(m)}(t_{ks},\lambda)}}{m!}(t-t_{ks})^m\right]T_{ks}(z).\right.$$

Из неравенства (2) вытекает, что

$$M\,|\,\xi(t)-\xi_n(t)\,|^2\leqslant$$

$$\leqslant C_l^2G^2(t)\left(\frac{\alpha}{\pi NM(\alpha-\sigma)}+2^{NM-1}\pi e^{-(\alpha-\sigma)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi NM}{\alpha}}\right)^2\iint_{\Lambda\Lambda}|\,F(d\lambda,d\mu)\,|.$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M\,|\,\xi(t)-\xi_n(t)\,|^2<\infty.$

Поэтому ряд (8) сходится с вероятностью 1 при любом фиксированном t, и эта сходимость равномерна в любом ограниченном интервале изменения t. Поскольку в рассматриваемом нами случае почти все выборочные функции непрерывны, то отсюда следует утверждение теоремы.

Аналог теоремы 2 может быть установлен и для случайных полей, допускающих представление вида

$$\xi(t)=\int_{\Lambda^m}\prod_{k=1}^{m}f_k(t_k,\lambda_k)\,z(d\lambda),$$

где B_Λ — алгебра подмножеств Λ; $z(\cdot)$ — случайная функция множеств на $B_\Lambda \times \dots \times B_\Lambda$ такая, что $Mz(A)\overline{z(B)} = F(A, B)$, $(A, B \in B_\Lambda \times \dots \times B_\Lambda)$ — комплекснозначная функция множеств, аддитивная по всем аргументам, положительно-определенная, $\int\limits_{\Lambda^m}\int\limits_{\Lambda^m} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty$.

1. *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с. 2. *Папулис А.* Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с. 3. *Джери Дж. А.* Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения : Обзор.— Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1977, 65, № 11, с. 53—89. 4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1947. 240 с. 5. *Розанов Ю. А.* Спектральный анализ абстрактных функций.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, вып. 4, с. 48—56.

Поступила в редколлегию 13.09.83

УДК 519.21

А. Н. РАДЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МЕРЫ МНОЖЕСТВА УРОВНЯ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

В работе [1] были получены условия измеримости геометрической меры множества уровня случайной функции. В частности, была доказана измеримость сферической и интегральногеометрической мер множества уровня. В данной статье, являющейся продолжением [1], получены соотношения для математического ожидания геометрической меры множества уровня. Эти результаты были ранее депонированы [2].

1. Пусть (Ω, σ, P) — полное вероятностное пространство, $\xi : X \times \Omega \to Y$ — п. н. непрерывная на $X \subset \mathbb{R}^m$ случайная функция, Y — произвольное метрическое пространство; $S_y^k(B) = S^k(x \in B : \xi(x, \omega) = y)$ — k-мерная сферическая мера множества уровня, $N(B)$ — число точек множества B, $N_y(p, z, B) = N(x \in B : \xi(x, \omega) = y, p(x) = z)$ (см. [1]).

Из приведенных в статье [1] свойств геометрических мер вытекают следующие соотношения для k-мерной сферической меры (при произвольном $k = 1, \dots, m$):

а) при любом $t \in [1, +\infty)$ для всякого борелевского $A \subset \mathbb{R}^m$

$$S^k(A) \geqslant \frac{1}{\beta_t(m, k)} \left\{ \int\limits_{O^*(m,k)} dp \left[\int\limits_{\mathbb{R}^k} N\left(A \cap \{x : p(x) = z\}\right) dz \right]^t \right\}^{1/t}; \quad (1)$$

б) если борелевское $A \subset \mathbb{R}^m$ счетно (S^k, k)-спрямляемо, то при этом k

$$S^k(A) = \frac{1}{\beta_1(m, k)} \iint\limits_{O^*(m,k) \times \mathbb{R}^k} N(A \cap \{x : p(x) = z\})\, dz dp. \quad (2)$$