Препринт, № 77—24. 3. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. Киев: Наук. думка, 1978. 220 с. 4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с. 5. *Карташов Н. В.* Оценки эргодичности в системе M/M/1.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 24, с. 53—59.

Поступила в редколлегию 23.03.84

УДК 519.21

Р. Е. МАЙБОРОДА, студ., Киевский университет

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, ξ — случайная величина (с. в.), $F(x)$ — ее функция распределения, $f(t) = \mathbf{M} \exp(\xi t)$ — производящая функция моментов, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — выборка с. в. ξ.

Рассмотрим следующую оценку для $f(t)$:

$$f_n(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \exp(\xi_k t). \tag{1}$$

Нас будут интересовать условия состоятельности оценки f_n (т. е. сходимости $f_n \to f$ п. н. в некотором банаховом пространстве функций). Мы исследуем предельное поведение процесса

$$Y_n(t) = n^{1/2}(f_n(t) - f(t)) \tag{2}$$

в этом пространстве и построим функциональный доверительный интервал для $f(t)$. Аналогичным задачам для характеристической функции посвящены работы [1, 2]. Преобразование Лапласа оценивается в статье [3].

1. Предельная теорема в $C[-a, a]$. Рассмотрим пространство непрерывных на отрезке $[-a, a]$ функций с обычной нормой $\|\cdot\|_{[-a,a]}$. Обозначим R_ξ супремум тех R, для которых $\mathbf{M} \exp(\xi t)$ конечно при $|t| < R$. Тогда [4, гл. 7] при $0 < a < R_\xi$ $f \in C[-a, a]$. При любом a $f_n(t)$ является случайным элементом $C[-a, a]$.

Определим $Y(t)$ при $|t| < 0{,}5R_\xi$ как случайный процесс со следующими свойствами:

1) $Y(t)$ — гауссовский процесс,
2) $\mathbf{M}Y(t) = 0$ при всех $|t| < 0{,}5R_\xi$,
3) $\mathbf{M}Y(t)Y(s) = f(t+s) - f(t)f(s)$, $|s| < 0{,}5R_\xi$.

Теорема 1. 1. Для того чтобы $f_n \to f$ п. н. при $n \to \infty$ в $C[-a, a]$, необходимо, чтобы $0 < a \leqslant R_\xi$ и достаточно, чтобы $0 < a < R_\xi$.

2. Для того чтобы $Y_n \Rightarrow Y$* при $n \to \infty$ в $C[-a, a]$ необходимо $0 < a \leqslant 0{,}5R_\xi$ и достаточно $0 < a < 0{,}5R_\xi$.

---

* Знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость.

Доказательство. Необходимость в первом утверждении следует из того, что при $a > R_\xi\, f \notin C[-a, a]$. Докажем достаточность. Воспользуемся усиленным законом больших чисел для банаховых пространств (теорема 6.4.2 [5, с. 177]). Так как $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k$, где $x_k(t) = \exp(\xi_k t)$ независимы и одинаково распределены, то достаточно проверить, что $\mathbf{M}\|x_1\|_{[-a,a]} < \infty$. Но

$$\mathbf{M}\|x_1\|_{[-a,a]} = \mathbf{M}\sup_{-a\leqslant t\leqslant a}\exp(t\xi) \leqslant f(-a) + f(a) < +\infty.$$

Следовательно, по указанной теореме f_n сходится п. н. в норме $C[-a, a]$ к $\mathbf{M}x_1$, которое равно $\mathbf{M}x_1(t) = f(t)$.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Сначала докажем сходимость конечномерных распределений Y_n к соответствующим распределениям Y. Пусть t_j, $j = \overline{1, m}$ таковы, что $|t_j| < 0{,}5R_\xi$. Обозначим $\eta_k^{(i)} = \exp(t_i\xi_k) - f(t_i)$, $\vec{\eta}_k = (\eta_k^{(1)}, \ldots, \eta_k^{(m)})$. Тогда

$$\vec{Y}_n = (Y_n(t_1), \ldots, Y_n(t_m)) = n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\vec{\eta}_k.$$

Применим к этой сумме центральную предельную теорему. Так как векторы $\vec{\eta}_k$ независимы, одинаково распределены и $\mathbf{M}\vec{\eta}_k = \vec{0}$, то достаточно доказать ограниченность ковариационной матрицы $\vec{\eta}_1$. Запишем

$$\mathbf{M}\eta_1^{(i)}\eta_1^{(j)} = \mathbf{M}[\exp(t_i\xi)\exp(t_j\xi)] - f(t_i)f(t_j) = f(t_i + t_j) - f(t_i)f(t_j) = a_{ij}.$$

Так как $|t_j| < 0{,}5R_\xi$, то $|t_i + t_j| < R_\xi$ и $a_{ij} < +\infty$ при всех $i, j = \overline{1, m}$. Следовательно, $\vec{Y}_n$ слабо сходится к некоторому гауссовскому вектору, имеющему математическое ожидание $\vec{0}$ и ковариационную матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$. В силу 1) — 3) этим свойством обладает вектор $(Y(t_1), \ldots, Y(t_m))$.

Чтобы закончить доказательство, осталось проверить плотность последовательности случайных процессов $\{Y_n\}_1^\infty$ в $C[-a, a]$. Для этого согласно теореме 12.3 [6, с. 136] достаточно проверить выполнение следующих условий:

(I) последовательность $\{Y_n(0)\}$ плотна;

(II) при любых $t, s \in [-a, a]$ выполняется неравенство

$$J(t, s) = \mathbf{M}(Y_n(t) - Y_n(s))^2 \leqslant C(t - s)^2.$$

Условие (I) очевидно. Проверим (II):

$$J(t, s) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{M}[\exp(\xi_j t) - f(t) + f(s) - \exp(\xi_j s)]^2 \leqslant \mathbf{M}[\exp(\xi t) - \exp(\xi s)]^2 = f(2t) - 2f(t + s) + f(2s).$$

Поскольку $t, s \in [-a, a]$, то $2t$, $2s$ и $t+s$ принадлежат отрезку $(-R_\xi$ R_ξ, на котором функция f — аналитическая [4, гл. 7]. Следовательно,

$$f(2t) = f(t+s) + f'(t+s)(t-s) + 2^{-1}f''(\theta_1)(t-s)^2,$$

$$f(2s) = f(t+s) + f'(t+s)(s-t) + 2^{-1}f''(\theta_2)(t-s)^2,$$

$\theta_1, \theta_2 \in [-2a, 2a]$. Сложив эти равенства, получим

$$J(t, s) = 2^{-1}(f''(\theta_1) + f''(\theta_2))(t-s)^2 \leqslant C(t-s)^2.$$

Достаточные условия сходимости доказаны.

Если $|t| > 0{,}5R_\xi$, то

$$\mathbf{M}Y^2(t) = f(2t) - f^2(t) = \infty,$$

т. е. процесс $Y(t)$ не определен.

2. Предельные теоремы в C_p^0. Пусть T — некоторый (конечный или бесконечный) интервал, $p(t) > 0$ — непрерывная «весовая» функция, определенная на T. Будем говорить, что функция $x(t)$, $t \in T$ принадлежит классу $C_p(T)$, если $x(t)$ непрерывна на T и $\exists \, |\lim\limits_{t \to a_i} x(t)p(t)| < \infty$, где a_1, a_2 — концы интервала T (возможно $a_i = \pm\infty$). Если, кроме того,

$$\lim_{t \to a_i} x(t)p(t) = 0, \quad i = \overline{1, 2},$$

то $x(t)$ принадлежит классу $C_p^0(T)$. В случае $T = \mathbf{R}$ будем писать $C_p^0(T) = C_p^0$. Легко показать, что $C_p(T)$ и $C_p^0(T)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|x\|_p = \sup\limits_{t \in T}|x(t)p(t)|$. $C_p(T)$ линейно изоморфно $C[0, 1]$, причем этот изоморфизм можно осуществить умножением на функцию $p(t)$ и последующим гомеоморфным отображением T на $(0, 1)$.

Лемма 1. Если для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ случайных элементов из C_p^0 выполняются условия:

1) $\{x_n\}$ плотно в $C[a, b]$ при $a, b \in \mathbf{R}$,

2) $\sup\limits_{n \in N} P\{\sup\limits_{t \geqslant b} |p(t)x_n(t)| \geqslant \varepsilon\} \to 0, \quad b \to +\infty,$

$$\sup_{n \in N} P\{\sup_{t \leqslant a} |p(t)x_n(t)| \geqslant \varepsilon\} \to 0, \quad a \to -\infty,$$

то последовательность $\{x_n\}$ плотна в C_p^0.

Доказательство. Поскольку C_p—замкнутое подпространство в $C_p(\mathbf{R})$, достаточно проверить плотность в $C_p(\mathbf{R})$. Для этого отобразим изоморфно $C_p(\mathbf{R})$ на $C[0, 1]$. Последовательность $\{x_n\}$ перейдет в $\{x_n'\}$ такую, что:

1) $\{x_n'\}$ плотна в $C[\alpha, \beta]$ при любых $0 < \alpha < \beta < 1$,

2) $\sup\limits_{n \in N} P\{\sup\limits_{t \in [0,1] \setminus [\alpha, \beta]} |x_n'(t)| > \varepsilon\} \to 0, \quad \alpha \to 0, \quad \beta \to 1.$

Используя теорему 8.2 [6, с. 83], нетрудно доказать, что $\{x_n'\}$ плотна в $C[0, 1]$, следовательно, $\{x_n\}$ плотна в C_p.

Пусть $\varphi(t)$ — N-функция Орлича (ср. [7, с. 19]), т. е.:
1) $\varphi(t) = \varphi(-t)\ \forall t \in \mathbf{R}$,
2) $\varphi(t)$ — выпуклая непрерывная функция на $\mathbf{R}$,
3) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$,
4) $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t)/t = +\infty$, $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t)/t = 0$.

Обозначим $\varphi^*(l) = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} (lt - \varphi(t))$ преобразование Юнга—Фенхеля функции φ. Если $\varphi(t)$ — N-функция, то $\varphi^*(l)$ также является N-функцией, и

$$\begin{gathered}(\varphi(\sigma t))^* = \varphi^*(t/\sigma) \text{ при } \sigma > 0,\\ (\alpha\varphi)^*(t) = \alpha\varphi^*(t/\alpha) \text{ при } \alpha > 0,\\ (\varphi^*(t))^* = \varphi^{**}(t) = \varphi(t).\end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим $G_\xi(x) = \mathbf{P}\{|\xi| > x\}$,

$$A_1 = \{\sigma > 0 : \mathbf{M}\exp(\varphi^*(\xi/\sigma)) < \infty\}, \quad \sigma(\xi, \varphi^*) = \inf A_1.$$

Возможно $\sigma(\xi, \varphi^*) = \infty$.

Лемма 2. Пусть $\sigma(\xi, \varphi^*) < \infty$,

$$A_2 = \{\sigma > 0 : \exists C > 0,\ f(t) < C\exp\varphi(\sigma t)\},$$
$$A_3 = \{\sigma > 0 : \exists C > 0,\ G_\xi(x) < C\exp(-\varphi^*(x/\sigma))\},$$

тогда $\sigma(\xi, \varphi^*) = \inf A_2 = \inf A_3$.

Доказательство. Докажем, что:
1) из $\sigma \in A_1$ следует $\sigma \in A_2$,
2) из $\sigma \in A_2$ следует $\sigma \in A_3$,
3) из $\sigma \in A_3$ следует, что любое $\sigma_1 > \sigma$ принадлежит A_1.

1. Если $\sigma \in A_1$, то

$$\sup_{t\in R} \mathbf{M}\exp(t\xi)/\exp(\varphi(\sigma t)) \leqslant \mathbf{M}\exp(\varphi^*(\xi/\sigma)) \leqslant C,$$

т. е. $\sigma \in A_1$.

2. По неравенству Чебышева, если $\sigma \in A_3$, то $G_\xi(x) \leqslant 2C\exp(\varphi(\sigma \times t) - tx)$. Отсюда, используя определение φ^*, получаем $\sigma \in A_3$.

3. Пусть

$$G_\xi(x) \leqslant C_1\exp(-\varphi(x/\sigma)). \tag{4}$$

Возьмем $\sigma_1 > \sigma$ и рассмотрим

$$\mathbf{M}\exp\varphi^*(\xi/\sigma_1) = -\int_0^\infty \exp\varphi^*(x/\sigma_1)\, dG_\xi(x) = -\exp\varphi^*(x/\sigma_1)\, G_\xi(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty G_\xi(x)\, d\exp\varphi^*(x/\sigma_1).$$

В силу (4)

$$\mathbf{M}\exp\varphi^*(\xi/\sigma_1) \leqslant C_2 + C_1\int_0^\infty \exp(-\varphi^*(x/\sigma))\, d\exp\varphi^*(x/\sigma_1).$$

Поскольку $\sigma_1 > \sigma$, φ — N-функция Орлича, то $\varphi^*(x/\sigma) \geqslant \sigma_1 \times \times \varphi^*(x/\sigma_1)/\sigma$ и $M \exp \varphi^*(\xi/\sigma_1) < C_1$, т. е. $\sigma_1 \in A_1$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\tau > \sigma(\xi, \varphi^*)$. Тогда существуют такие K_1, $K_2 > 0$, что для всех $t > 0$

$$|f'(t)| \leqslant K_1 \exp \varphi(\tau t), \quad |f''(t)| \leqslant K_2 \exp \varphi(\tau t).$$

Доказательство. Возьмем $n = \overline{1, 2}$, $t > 0$, $q = \tau/\sigma(\xi, \varphi^*)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant \mathbf{M} |\xi|^n \exp(\xi t) \leqslant (M |\xi|^{pn})^{1/p} (\mathbf{M} \exp(\xi t q))^{1/q} \leqslant K_n \times$$
$$\times \exp(\varphi(\tau t q)/q) \leqslant K_n \exp \varphi(\tau t)$$

(мы воспользовались леммой 2 и тем, что все моменты с. в. ξ ограничены).

Рассмотрим C_p^0, где

$$p(t) = \exp(-\varphi(\sigma t)). \tag{5}$$

Будем говорить, что N-функция φ удовлетворяет условию (A), если φ дифференцируема на $\mathbf{R}$ и для любого $\sigma_1 < \sigma$ существуют такие константы C, $r > 0$, что при всех t, $|t| > r\, |p'(t)| \leqslant C \exp(-\varphi(\sigma_1 t))$.

Теорема 2. Пусть $p(t)$ определяется (5).

1. Для того чтобы имела место сходимость $f_n \to f$ п. н. в C_p^0 необходимо, чтобы $\sigma(\xi, \varphi^*) \leqslant \sigma$ и достаточно, чтобы $\sigma(\xi, \varphi^*) < \sigma$.

2. Чтобы одновременно со сходимостью $f_n \to f$ п. н. имела место сходимость $Y_n \Rightarrow Y$ в C_p^0, необходимо, чтобы $\sigma(\xi, 2\varphi^*) \leqslant \sigma$, а при выполнении условия (A) достаточно, чтобы $\sigma(\xi, 2\varphi^*) < \sigma$.

Доказательство. Применив усиленный закон больших чисел, проверим $\mathbf{M} \| x \|_p < \infty$, где $x(t) = \exp(\xi t)$ (x — случайный элемент C_p^0, так как φ — N-функция):

$$\mathbf{M} \| x \|_p = \mathbf{M} \exp \sup_{t \in R} (t\xi - \varphi(\sigma t)) \leqslant \mathbf{M} \exp \varphi^*(\xi/\sigma) < \infty,$$

если $\sigma > \sigma(\xi, \varphi^*)$.

Если же $\sigma < \sigma(\xi, \varphi^*)$, то в силу леммы 2 f не принадлежит C_p^0, поэтому не может быть и сходимости в C_p^0.

Перейдем ко второй части теоремы. Если $f_n \to f$ в C_p^0, то $f \in C_p^0$ и Y_n — случайный элемент C_p^0. Следовательно, если $Y_n \Rightarrow Y$ в $\| \cdot \|_p$, то Y является случайным элементом C_p^0 и $\lim\limits_{t \to \pm\infty} Y(t)\, p(t) = 0$ п. н. Так как $Y(t)$ — гауссовский процесс, то

$$D[Y(t)\, p(t)] = f(2t)\, p^2(t) - f^2(t)\, p^2(t) \to 0, \quad t \to \pm \infty.$$

Поскольку $f \in C_p^0$, то $f(t)\, p(t) \to 0$. Следовательно, $f(2t)\, p^2(t) \to 0$. В силу леммы 2 и (3) $\sigma(\xi, 2\varphi^*) \leqslant \sigma$. Осталось доказать достаточность условия $\sigma(\xi, 2\varphi^*) < \sigma$ для слабой сходимости, т. е. проверить плотность семейства $\{Y_n\}$ в пространстве C_p^0. Обозначим $Z_n(t) = Y_n(t)p(t)$ и рассмотрим

$$J(t, s) = \mathbf{M}(Z_n(t) - Z_n(s))^2 \leqslant f(2t)p^2(t) - 2f(t+s)p(t)p(s) + f(2s)p^2(s).$$

Оценим правую часть этого неравенства с учетом аналитичности f на $\mathbf{R}$:

$$J(t, s) \leqslant (f(2t) - f(t+s))p^2(t) + (f(2s) - f(t+s))p^2(s) + f(t+s) \times (p^2(t) - 2p(t)p(s) + p^2(s)) = [2f'(t+s)(p^2(\theta_3))' + 2^{-1}f''(\theta_1)p^2(t) + 2^{-1}f''(\theta_2)p^2(s) + f(t+s)(p'(\theta_4))^2](t-s)^2. \tag{6}$$

Здесь θ_i — промежуточные точки, $\theta_1, \theta_2 \in [2t, 2s]$, $\theta_3, \theta_4 \in [t, s]$. Будем считать, что $t, s \in [m, m+1]$, где m — некоторое целое. Тогда $\theta_1, \theta_2 \in [2m, 2m+2]$, $\theta_3, \theta_4 \in [m, m+1]$. Оценим (6). Обозначим $\sigma(\xi, 2\varphi^*) = \tau$. В силу лемм 2, 3 и (3) для любого $\tau_1 > \tau$ существуют $K_1, K_2 > 0$ такие, что

$$|f'(t)| \leqslant K_1 \exp(2\varphi(\tau_1 t/2)),$$

$$|f''(t)| \leqslant K_2 \exp(2\varphi(\tau_1 t/2)).$$

Выберем $\tau < \tau_1 < \sigma$. Существует $C_1 < \infty$ такое, что $|f'(t+s)|$, $|f''(\theta_j)|$ $(j = \overline{1, 2})$, $|f(t+s)|$ не превосходят $C_1 \exp(2\varphi(\tau_1(2m+1)/2))$. Из условия (*A*) следует, что для любого σ_1, $\tau_1 < \sigma_1 < \sigma$ существует m_0 такое, что при $m > m_0$ $|(p^2(\theta_3))'|$, $p^2(t)$, $(p'(\theta_4))^2$ не превосходят $C_2 \exp\{-2\varphi(\sigma_1 m)\}$. При $m > m_0$

$$J(t, s) \leqslant K \exp\{2\varphi(\tau_1(m+1)) - 2\varphi(\sigma_1 m)\}(t-s)^2,$$

причем $\tau < \tau_1 < \sigma_1 < \sigma$. Так как φ — N-функция, то выполняется свойство 4) N-функций и для любых x, y $\varphi(|x| + |y|) \geqslant \varphi(x) + \varphi(y)$. Отсюда вытекает, что $\exists \alpha > 0$, $\alpha_1 \in \mathbf{R}$, m_1

$$2[-\varphi(\tau_1 m + \tau_1) + \varphi(\sigma_1 m)] \leqslant 2\alpha m + \alpha_1$$

при $m > m_1$ и

$$J(t, s) \leqslant K \exp(-2\alpha m)(t-s)^2$$

или

$$\mathbf{M}(Z_n(t) - Z_n(s))^2 \leqslant [Ct \exp(-\alpha m) - Cs \exp(-\alpha m)]^2.$$

В силу неравенств (8.6), (8.7) и (12.57) [6, с. 85, 137]

$$P\{\sup_{t,s \in [m, m+1]} |Z_n(t) - Z_n(s)| > \varepsilon\} \leqslant C\varepsilon^{-2} \exp(-\alpha m).$$

Обозначим $\lambda = \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-2}$. Тогда

$$P\{\sup_{t,s \in [m, k]} |Z_n(t) - Z_n(s)| > \varepsilon\} \leqslant \sum_{j=m}^{k-1} P\{\sup_{t,s \in [j, j+1]} |Z_n(t) - Z_n(s)| >$$

$$> \varepsilon\lambda^{-1}j^{-2}\} \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} Cj^4\varepsilon^{-2}\exp(-\alpha j).$$

При $k \to \infty$, учитывая, что $P\{\lim_{t\to\infty} Z_n(t) \neq 0\} = 0$, получаем

$$\sup_{n\in N} P\{\sup_{t>m} |Z_n(t)| > \varepsilon\} \leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{j=m}^{\infty} j^4 \exp(-\alpha j) \to 0, \quad m \to +\infty.$$

Аналогично проверяется

$$\sup_{n\in N} P\{\sup_{t<-m} |Z_n(t)| > \varepsilon\} \to 0, \quad m \to +\infty.$$

Поскольку плотность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $C[-m, m]$ следует из теоремы 1, то согласно лемме 1 эта последовательность плотна в C_p^0. Теорема доказана.

Условие (А) легко проверяется для целого ряда N-функций. Например, оно выполнено для $\varphi(t) = |t|^\beta$ $(\beta > 1)$.

Пусть $x(t)$ — непрерывная функция, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Обозначим

$$l(x) = \sup_{t\in\mathbf{R}} |x(t)g(t)|.$$

Лемма 4. Если $Y_n \Rightarrow Y$ в C_p, где $p(t) > 0$, $g(t)$ — непрерывные функции и $g(t) = O(p(t))$, $t \to \pm\infty$, то $l(Y_n) \to l(Y)$ по распределению.

Доказательство сводится к проверке непрерывности функционала $l(\cdot)$ в пространстве C_p.

3. Построение доверительного интервала. Пусть $B(t, \omega) = B(t)$ — выборочно непрерывная версия броуновского моста.

Лемма 5. Пусть $R_\xi > 0$. Тогда у процесса $Y(t)$ существует версия, которая при $|t| < 0{,}5R_\xi$ представима в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\, dB(F(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} B(F(x))\, d\exp(tx) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} B(F(x))\, t\exp(tx)\, dx, \qquad (7)$$

причем интегралы определены п. н. как интегралы Стилтьеса.

Доказательство. Рассмотрим процесс

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\, dB(F(x), \omega). \qquad (8)$$

Покажем, что при $t \in (-0{,}5R_\xi, 0{,}5R_\xi)$ интеграл (8) существует и конечен для почти всех ω. Рассмотрим сначала

$$\int_a^b \exp(tx)\, dB(F(x)) = J(a, b) - \int_a^b B(F(x))\, d\exp(tx), \qquad (9)$$

где $J(a, b) = \exp(tx)B(F(x))|_a^b$.

Так как при фиксированном ω функция $B(t, \omega)$ непрерывна, то функция $B(F(x))$ ограничена и множество точек ее разрывов имеет лебегову меру 0. Поскольку $\exp(tx)$ — абсолютно непрерывная по мере Лебега функция, то интеграл в правой части (9) существует. Следовательно, существует и исходный интеграл.

В силу закона повторного логарифма почти для всех $\omega \in \Omega$

$$B(x, \omega) = o(x^{\alpha}), \quad x \to 0, \quad B(x, \omega) = o((1-x)^{\alpha}), \quad x \to 1, \ \alpha < 2^{-1}$$

и

$$J(a, b) = \exp(tx) B(F(x)) |_a^b = \exp(tb)\, o((1-F(b))^{\alpha}) - \exp(ta)\, o(F^{\alpha}(a)).$$

Как известно [4, с. 235], для всех q, $0 < q < R_{\xi}$

$$1 - F(x) + F(-x) = O(\exp(-qx)).$$

Поэтому, учитывая $|t| < 0{,}5R_{\xi}$, можно выбрать α и q так, чтобы $t - q\alpha < 0$, и получить

$$J(a, b) \to 0, \quad a \to -\infty, \quad b \to +\infty. \tag{10}$$

Та же оценка применима и для проверки сходимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(F(x))\, d \exp(tx).$$

Этот интеграл сходится, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-q|x|))^{\alpha} d \exp(tx) < \infty.$$

Учитывая (9) и (10), получаем второе и третье равенства в (7). Первое равенство следует из того, что для X очевидно выполняются условия 1)—3), определяющие Y.

Пусть $R_{\xi} = +\infty$. Чтобы получить функциональный доверительный интервал для f, оценим вероятность

$$P_n(\lambda) = P\{\sup_{t \in R} g(t) | f_n(t) - f(t)| > \lambda\}.$$

Здесь $g(t) = \exp(-\varphi(\beta t))$, φ — N-функция.

Теорема 3. Пусть $\beta > \sigma(\xi, 2\varphi^*) = \sigma$ и для функции φ выполняется условие (А).

Тогда при $n \to \infty$

$$P_n(\lambda n^{-1/2}) \to P_g(\lambda) = P\{\sup_{t \in R} g(t) | Y(t)| > \lambda\} \tag{11}$$

в точках непрерывности $P_g(\lambda)$, причем

$$P_g(\lambda) \leqslant P\{\| B/h_{\alpha} \| > \lambda / K_{\alpha}\}, \quad h_{\alpha}(x) = (x(1-x))^{\alpha}, \quad \sigma/(2\beta) < \alpha < 2^{-1},$$
$$\| B/h_{\alpha} \| = \sup_{x \in (0,1)} |B(x)/h_{\alpha}(x)|; \tag{12}$$

$$K_\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha (F(x)) \exp \psi(x)\, dx < \infty; \tag{13}$$

$$\psi(x) = \varphi^* ((|x| + 1)/\beta). \tag{14}$$

Доказательство. Сходимость в (11) следует из теоремы 2 и леммы 4. Оценим $P_g(\lambda)$. Обозначим

$$\eta = \sup_{t \in R} | Y(t) \exp(-\varphi(\beta t)) |.$$

Тогда по лемме 5

$$\eta = \sup_{t \in R} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B(F(x))\, t \exp[tx - \varphi(\beta t)]\, dx \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | B(F(x)) | \exp \psi(x)\, dx.$$

Используя (12) и (13), получаем

$$\eta \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | B(F(x)) | [h_\alpha(F(x))]^{-1} h_\alpha (F(x)) \exp \psi(x)\, dx \leqslant \| B/h_\alpha \| K_\alpha,$$

что и дает (11).

Покажем, что в условиях теоремы $K_\alpha < \infty$. В самом деле, в силу леммы 2

$$F(-t) + 1 - F(t) = O(\exp(-2\varphi^*(t/\sigma)))$$

и

$$h_\alpha(F(x)) = O(\exp(-2\alpha\varphi^*(x/\sigma))).$$

Учитывая (14), при $\beta' < \beta$ получаем $\psi(x) \leqslant C\varphi^*(x/\beta')$. Следовательно, для конечности K_α достаточно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[-2\alpha\varphi^*(x/\sigma) + \varphi^*(x/\beta')]\, dx < \infty,$$

что выполняется, если $\sigma/(2\alpha) < \beta' < \beta$.

Чтобы использовать теорему 3, нужно оценить K_α и $P\{\|B/h_\alpha\| > \lambda\}$. Заменяя в (13) $F(x)$ эмпирической функцией распределения

$$F_n(x) = F_n(x, \omega) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} I_{\{\xi_k < x\}}$$

(I_A обозначает индикатор события A), получаем оценку для K_α — $K_{\alpha,n}$. Покажем, что в условиях теоремы 3 $K_{\alpha,n} \to K_\alpha$ п. н. при $n \to \infty$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 6. Пусть $G_n(x) = F_n(-x) + 1 - F_n(x)$, $\sigma_2 > \sigma_1 = \sigma(\xi, \varphi)$. Тогда почти для всех $\omega \in \Omega$ существует $n_0 = n_0(\omega)$ такое, что для всех $n_0 > n$ и всех $x > 0$ $G_n(x, \omega) \leqslant C \exp(-\varphi(x/\sigma_2))$.

Доказательство. Положим $q(x) = \exp \varphi(x\sigma_2)$. В пространстве $C_q(R_+) = C_q([0, +\infty))$ рассмотрим случайные элементы, определенные следующим образом:

$$\eta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < |\xi_k|, \\ (|\xi_k| + \varepsilon - x)/\varepsilon & \text{при } |\xi_k| < x \leqslant |\xi_k| + \varepsilon, \\ 0 & \text{при } x > |\xi_k| + \varepsilon \end{cases}$$

($\varepsilon > 0$ фиксировано). Тогда

$$I_{\{x<|\xi_k|\}} \leqslant \eta_k(x) \leqslant I_{\{x \leqslant |\xi_k| + \varepsilon\}}. \qquad (15)$$

Покажем, что для η_k выполняется усиленный закон больших чисел в $C_q(\mathbf{R}_+)$:

$$\mathbf{M}\,\|\eta_1\|_q = \mathbf{M}\sup_{t\geqslant 0}|\eta_k(t)\,q(t)| \leqslant \mathbf{M}q(|\xi_k| + \varepsilon) \leqslant C\mathbf{M}\exp\varphi(\xi/\sigma_3) < C_1,$$

если $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$.

Таким образом, $\left\| n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_k - \mathbf{M}\eta_1\right\|_q \to 0$ п. н. Следовательно, для любого фиксированного $\delta > 0$ и почти всех $\omega \in \Omega$ существует $n_0 = n_0(\omega)$ такое, что

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(x) \leqslant \mathbf{M}\eta_1(x) + \delta\exp(-\varphi(x/\sigma_2)) \text{ при } x > 0.$$

В силу (15) $G_n(x) \leqslant n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(x)$, а с другой стороны,

$$\mathbf{M}\eta_1(x) \leqslant \mathbf{M}I_{\{x<|\xi|+\varepsilon\}} = P\{|\xi| > x - \varepsilon\}.$$

Поскольку $\sigma_2 > \sigma(\xi, \varphi)$, применив лемму 2, получим искомое неравенство. Фиксируем $\omega \in \Omega$. Обозначим

$$J(a, b) = \left|\int_a^b h_\alpha(F_n(x))\exp\psi(x)\,dx - \int_a^b h_\alpha(F(x))\exp\psi(x)\,dx\right|. \qquad (16)$$

Тогда $|K_{\alpha,n} - K_\alpha| \leqslant J(-\infty, -a) + J(-a, a) + J(a, +\infty)$. Используя лемму 6 с заменой φ на $2\varphi^*$, $\sigma_2 = \beta'$, $\sigma_1 = (\xi, 2\varphi^*)$, нетрудно доказать, что при $n > n_0(\omega)$ можно выбрать b так, чтобы $J(-\infty, -b) < \varepsilon/3$, $J(b, +\infty) < \varepsilon/3$. Фиксируя теперь b, $a = -b$, проинтегрируем по частям (16) и применим теоремы Хелли и Гливенко—Кантелли. Получим $J(-b, b) \to 0$ п. н. при $n \to \infty$. Следовательно, при больших n $|K_{\alpha,n} - K_\alpha| < \varepsilon$, что и означает сходимость $K_{\alpha,n}$ к K_α п. н.

Вероятности вида $P\{\|B/h_\alpha\| > \lambda\}$ можно вычислять методом, предложенным в работе [8, теоремы 2 и 6]. При этом следует учитывать, что случайная величина $\|B/h_\alpha\|$ п. н. конечна, так что $P\{\|B/h_\alpha\| > \lambda\} \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Доказательства указанных теорем легко обобщаются на этот случай.

1. *Csörgő S.* Limit behavior of the empirical characteristic function.— Ann. Probab., 1981, 9, N 1, p. 130—144. 2. *Feuerveger A., Mureika R. A.* The empirical characteristic function and its applications.— Ann. Statist., 1977, 5, N 1, p. 88—97. 3. *Симонова И. Э.* Оценка преобразований Лапласа от функций распределения.— В кн.: Случайные процессы и поля. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 95—103. 4. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 424 с. 5. *Гренандер У.* Вероятности на алгебраических структурах. М.: Мир, 1965. 275 с. 6. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с. 7. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 272 с. 8. *Park C., Shuurman R.* Evaluations of barriercrossing probabilities of Winer paths.— J. Appl. Probab., 1976, N 13, p. 268—275.

Поступила в редколлегию 27.06.83