Построим теперь представление $\{U_g\}$ группы G_0 в пространстве H. Зафиксируем элементы $g \in G_0$, $h \in L_0 \subset H$. Существует номер n такой, что $g \in G_n$, $h \in H_n$. Положим $U_g h = U_g^n h$. Такое определение корректно вследствие согласованности системы (4).

Очевидно, операторы U_g продолжаются до унитарных операторов в H; представление $\{U_g\}_{g \in G_0}$ является циклическим вектором $\Omega = \Omega_n$; некоммутативная мера $(\{U_g\}_{g \in G_0}, H, \Omega)$ является решением проблемы моментов.

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: Физматгиз, 1961. 310 с. 2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1965. 798 с. 3. *Березанский Ю. М., Шифрин С. Н.* Обобщенная степенная симметричная проблема моментов.— Укр. мат. журн., 1971, **23**, № 3, с. 291—306. 4. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. Киев : Наук. думка, 1983. 236 с. 5. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции : В 4-х т. М.: Физматгиз, 1961. Т. 4. 472 с. 6. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Физматгиз, 1980. 320 с. 7. *Woronowicz S. L.* The quantum problem of moments. II.— Rep. Math. Phys., 1971, **1**, N 3, p. 175—183. 8. *Powers R. T.* Self-adjoint algebras of unbounded operators. 1.— Comm. Math. Phys., 1971, **21**, N 2, p. 85—124. 9. *Коломыцев В. И., Самойленко Ю. С.* О неприводимых представлениях индуктивных пределов групп.—Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 4, с. 526—531. 10. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения: В 2-х т. М.: Мир, 1980. Т. 1. 455 с.

Поступила в редколлегию 01.10.82

УДК 519.21

А. А. ДЫХОВИЧНЫЙ, инж., Киевский университет

ОБ ОЦЕНКАХ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИЙ ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В настоящей статье изучаются асимптотические свойства эмпирических оценок корреляционной и спектральной функций гауссовского однородного и изотропного случайного поля, наблюдаемого на шаре.

Пусть $\xi(x)$ — однородное и изотропное непрерывное в среднем квадратическом гауссовское случайное поле в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Это означает, что математическое ожидание $M\xi(x) = m = \mathrm{const}$ (будем предполагать $m = 0$), а $M\xi(x)\xi(y) = B(|x - y|)$ зависит только от расстояния между точками x и y.

Известно [1], что корреляционная функция допускает представление

$$B(r) = \int_0^\infty Y_n(\lambda r)\, d\Phi(\lambda),$$

$$Y_n(\lambda r) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)\, (\lambda r)^{\frac{2-n}{2}},$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода ν-го порядка [2]; $\Phi(\lambda)$ — спектральная функция; $\Phi(\lambda)$ не убывает на $[0, +\infty)$, $\Phi(+\infty) = B(0) > 0$.

Обозначим через $S_R(x)$, $V_R(x)$ сферу и шар радиуса R с центром в точке x, $U_n(R) = \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)R^n$ и $\omega_n(R) = 2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)R^{n-1}$ соответственно объем шара и поверхность сферы радиуса R, $m_n^{(R)}$ — лебегову меру на $S_R(x)$. Предположим, что случайное поле $\xi(x)$ наблюдается на шаре $V_{2R}(0)$.

В качестве оценки спектральной функции $\Phi(\lambda)$ в точке λ примем статистику

$$\hat{\Phi}_R(\lambda) = 2^{\frac{2-n}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)U_n^{-1}(R)\lambda^{\frac{n}{2}}\int_0^R\Bigg[\int_{V_R(0)}\xi(x)\frac{1}{\omega_n(u)}\int_{S_u(x)}\xi(t)\times$$

$$\times m_n^{(u)}(dt)\,dx\Bigg]J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\,u^{\frac{n-2}{2}}\,du.$$

В работе [3] рассматривалась несмещенная состоятельная оценка корреляционной функции по наблюдениям на шаре $V_R(0)$. Естественно определить оценку по наблюдениям на шаре $V_{R+u}(0)$ в точке u, где $u \in [0, H]$ (H фиксировано) как статистику

$$\hat{B}_R(u) = U_n^{-1}(R)\int_{V_R(0)}\xi(x)\left[\frac{1}{\omega_n(u)}\int_{S_u(x)}\xi(t)\,m_n^{(u)}(dt)\right]dx.$$

Эта оценка также будет несмещенной и состоятельной при выполнении приведенного ниже условия 1 и

$$\hat{\Phi}_R(\lambda) = 2^{\frac{2-n}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)\lambda^{\frac{n}{2}}\int_0^R\hat{B}_R(u)\,J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\,u^{\frac{n-2}{2}}\,du.$$

Условие 1. Спектральная функция абсолютно непрерывна, причем $\Phi'(\lambda) = \lambda^{n-1}g(\lambda)$, а $g(\lambda)$ непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$, $g(0) \neq 0$.

Изучим поведение моментов оценки спектральной функции. Символами c, c_j будем обозначать положительные константы, не всегда одни и те же. Пусть $n \geqslant 2$. Обозначим $I(\mu, \lambda) = \int_0^\infty J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\times$ $\times J_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\,du$. Тогда по соотношению (6.512.3) [4]

$$I(\mu,\lambda) = \begin{cases}\mu^{\frac{n-2}{2}}/\lambda^{\frac{n}{2}}, & \mu < \lambda;\\ 1/2\mu, & \mu = \lambda;\\ 0, & \mu > \lambda.\end{cases}$$

Обозначим $I^R(\mu, \lambda) = \int\limits_0^R J_{\frac{n}{2}}(\lambda u) J_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, du$ и

$$I_R(\mu, \lambda) = I(\mu, \lambda) - I^R(\mu, \lambda) = \int\limits_R^\infty J_{\frac{n}{2}}(\lambda u) J_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, du.$$

Лемма 1. Пусть $\lambda > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для $\mu \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$ $|I_R(\mu, \lambda)| \leq c$, а для $\mu \in [0, +\infty) \setminus]\lambda - \delta, \lambda + \delta[$

$$I_R(\mu, \lambda) = O(R^{-1})(\mu^{-\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{1}{2}}) + o(R^{-1})\mu^{-\frac{1}{2}}, \quad R \to \infty.$$

Доказательство. Поскольку $\lambda > 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что $0 \notin [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$. Значит, существует R_1 такое, что для $R > R_1$ можно воспользоваться асимптотическими формулами для бесселевых функций [2]

$$J_\nu(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\left[\cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

Заменяя бесселевы функции в $I_R(\mu, \lambda)$ асимптотическими формулами, получаем

$$|I_R(\mu, \lambda)| \leq c_1 \left|\int\limits_R^\infty \cos\left(\lambda u - \frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\mu u - \frac{(n-2)\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) u^{-1} du\right| +$$

$$+ c_2 \leq c_2 + c_3 \left|\int\limits_R^\infty \cos\left(\lambda u + \mu u - \frac{n\pi}{2}\right) u^{-1} du\right| +$$

$$+ c_4 \left|\int\limits_R^\infty \sin((\lambda - \mu) u)\, u^{-1} du\right| \leq c_5.$$

Пусть теперь $\mu \in [0, +\infty) \setminus [\lambda - \delta, \lambda + \delta]$. Введем функцию $F_{\frac{n}{2}}(x) = \sqrt{x} J_{\frac{n}{2}}(x)$. Заметим, что $F_{\frac{n}{2}}(x)$ ограничена. Ее производная

$$F'_{\frac{n}{2}}(x) = \sqrt{x} J'_{\frac{n}{2}}(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} J_{\frac{n}{2}}(x) = \sqrt{x} J_{\frac{n-2}{2}}(x) - \frac{n-1}{2\sqrt{x}} J_{\frac{n}{2}}(x)$$

является ограниченной функцией для $n \neq 0$. Известно, что $F_{\frac{n}{2}}(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$F''_{\frac{n}{2}}(x) + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{4x^2}\right) F_{\frac{n}{2}}(x) = 0.$$

Отсюда $F_{\frac{n}{2}}(\lambda u) = -F''_{\frac{n}{2}}(\lambda u) + \frac{n^2 - 1}{4\lambda^2 u^2} F_{\frac{n}{2}}(\lambda u)$. Дополнительно обозначим

$$I_R^1(\mu, \lambda) = \int\limits_R^\infty F_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-3} du,$$

$$I_R^2(\mu, \lambda) = \int\limits_R^\infty F'_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-2} du,$$

$$I_R^3(\mu, \lambda) = \int\limits_R^\infty F_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, F'_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-2} du.$$

Заметим, что $I_R(\mu, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \int\limits_R^\infty F_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-1} du.$

Пользуясь дифференциальным уравнением и интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_R^\infty F_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-1} du = \frac{n-1}{\lambda^2} I_R^1(\mu, \lambda) - \frac{1}{\lambda} I_R^2(\mu, \lambda) +$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda^2} I_R^3(\mu, \lambda) - \frac{1}{\lambda R} F'_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu R) +$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda^2 R} F_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\, F'_{\frac{n-2}{2}}(\mu R) + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \int\limits_0^\infty F_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-1} du.$$

Отсюда

$$I_R(\mu, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \mu^2} \Big[\frac{n-1}{\lambda^2} I_R^1(\mu, \lambda) - \frac{1}{\lambda} I_R^2(\mu, \lambda) +$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda^2} I_R^3(\mu, \lambda) - \frac{1}{\lambda R} F'_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu R) + \frac{\mu}{\lambda^2 R} F_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\, F'_{\frac{n-2}{2}}(\mu R) \Big].$$

Учитывая обозначения и то, что $|J_\nu(\mu)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\mu}}$, убеждаемся, что при $R \to \infty$

$$|I_R^1(\mu, \lambda)| \leqslant c \int\limits_R^\infty u^{-3} du = o(R^{-1}),$$

$$|I_R^2(\mu, \lambda)| \leqslant c \int\limits_R^\infty u^{-2} du = O(R^{-1}),$$

$$|\mu I_R^3(\mu, \lambda)| = \mu \left| \int\limits_R^\infty J_{\frac{n}{2}}(\lambda u) \sqrt{\lambda u} \Big[\sqrt{\mu u} J_{\frac{n-4}{2}}(\mu u) - \right.$$

$$\left. - \frac{n-3}{2\sqrt{\mu u}} J_{\frac{n-2}{2}}(\mu u) \Big] u^{-2} du \right| \leqslant \mu \sqrt{\mu\lambda} \left| \int\limits_R^\infty J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, J_{\frac{n-4}{2}}(\mu u)\, u^{-1} du \right| +$$

$$+ c\sqrt{\mu\lambda}\left|\int\limits_R^\infty J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, J_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, u^{-2} du\right| = \mu O(R^{-1}) + o(R^{-1}),$$

$$\frac{1}{R}\left|F'_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\, F'_{\frac{n-2}{2}}(\mu R)\right| = O(R^{-1}),$$

$$\frac{\mu}{R}\left|F_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\, F_{\frac{n-2}{2}}(\mu R)\right| = \frac{\mu}{R}\left|\sqrt{\lambda R} J_{\frac{n}{2}}(\lambda R)\left[\sqrt{\mu R} J_{\frac{n-4}{2}}(\mu R) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n-3}{2\sqrt{\mu R}} J_{\frac{n-2}{2}}(\mu R)\right]\right| = \mu O(R^{-1}) + o(R^{-1}).$$

Таким образом, учитывая, что в рассматриваемой области функция $\lambda^2/(\lambda^2 - \mu^2)$ ограничена, получаем утверждение леммы 1.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1, тогда оценка $\hat{\Phi}_R(\lambda)$ является асимптотически несмещенной.

Доказательство. Из определения $\hat{\Phi}_R(\lambda)$ и спектрального представления корреляционной функции следует

$$M\hat{\Phi}_R(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^R J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, J_{\frac{n-2}{2}}(\mu u)\, du\right] \mu^{\frac{n}{2}} g(\mu)\, d\mu.$$

Формула обращения для спектральной функции имеет вид [1]

$$\Phi(\lambda) = 2^{\frac{2-n}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \lambda^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty B(u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda u)\, u^{\frac{n-2}{2}} du =$$

$$= \lambda^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty I(\mu, \lambda)\, \mu^{\frac{n}{2}} g(\mu)\, d\mu.$$

Тогда $M\hat{\Phi}_R(\lambda) - \Phi(\lambda) = \lambda^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty I_R(\mu, \lambda)\, \mu^{\frac{n}{2}} g(\mu)\, d\mu.$

Представляя интеграл в виде суммы интегралов по двум областям, учитывая, что $\int\limits_0^\infty \mu^{\frac{n}{2}} g(\mu)\, d\mu < \infty$, и пользуясь леммой 1, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда для корреляции оценок $\hat{\Phi}_R(\lambda_1)$, $\hat{\Phi}_R(\lambda_2)$ справедливо

$$\lim_{R\to\infty} U_n(R) \operatorname{cor}[\hat{\Phi}_R(\lambda_1), \hat{\Phi}_R(\lambda_2)] = 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int\limits_0^{\min(\lambda_1, \lambda_2)} \mu^{n-1} g^2(\mu)\, d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим корреляцию оценок. Используя свойства сферических средних однородного и изотропного случайного поля [1], а также его гауссовость, получаем

$$\operatorname{cor}[\hat{\Phi}_R(\lambda_1), \hat{\Phi}_R(\lambda_2)] = 2^{2-n}\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}\right) U_n^{-2}(R) \times$$

$$\times (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^R\int_0^R \int_{V_R(0)}\int_{V_R(0)} [Y_n(\mu\,|\,x-y\,|)\, Y_n(\nu\,|\,x-y\,|) \times$$

$$\times Y_n(\mu u)\, Y_n(\nu v) + Y_n(\mu\,|x-y|)\, Y_n(\nu\,|\,x-y\,|)\, Y_n(\nu v) \times$$

$$\times Y_n(\nu u)]\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_1 u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_2 v)\,(uv)^{\frac{n-2}{2}}\,(\mu\nu)^{n-1}\, g(\mu)\, g(\nu)\, dx dy du dv d\mu d\nu.$$

Для сферической функции Бесселя справедливо представление

$$Y_n(\mu\,|\,u\,|) = \frac{1}{\omega_n(\mu)} \int_{S_\mu(0)} e^{i(s,u)} m_n^{(\mu)}(ds),$$

а $(2\pi)^{-n} U_n^{-1}(R) \left| \int_{V_R(0)} e^{i(\mu,x)} dx \right|^2 = \Psi_R(|\,\mu\,|)$ есть ядро, определенное в работе [5].

Далее нас будет интересовать только первое слагаемое $U_n(R) \times$ $\times \operatorname{cor}[\hat{\Phi}_R(\lambda_1), \hat{\Phi}_R(\lambda_2)]$. Запишем

$$2^{2-n}\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}\right) U_n^{-1}(R)\,(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^R\int_0^R \left[\int_{V_R(0)}\int_{V_R(0)} \frac{1}{\omega_n(\mu)} \times\right.$$

$$\left.\times \int_{S_\mu(0)} e^{i(\mu_1, x-y)} m_n^{(\mu)}(d\mu_1)\, \frac{1}{\omega_n(\nu)} \int_{S_\nu(0)} e^{i(\nu_1, x-y)}\, m_n^{(\nu)}(d\nu_1)\, dx dy\right] \times$$

$$\times Y_n(\mu u)\, Y_n(\nu v)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_1 u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_2 v)\,(uv)^{\frac{n-2}{2}}\,(\mu\nu)^{n-1}\, g(\mu)\, g(\nu)\, du dv d\mu d\nu =$$

$$= 2^{2-n}\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}\right)(2\pi)^n \omega_n^{-2}(1)\,(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^R\int_0^R \int_{S_\mu(0)}\int_{S_\nu(0)} \Psi_R(|\,\mu_1+\nu_1\,|) \times$$

$$\times m_n^{(\mu)}(d\mu_1)\, m_n^{(\nu)}(d\nu_1)\, Y_n(\mu u)\, Y_n(\nu v)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_1 u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_2 v)\,(uv)^{\frac{n-2}{2}}\, g(\mu) \times$$

$$\times g(\nu)\, du dv d\mu d\nu = 2^{2-n}\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}\right)(2\pi)^n\, \omega_n^{-2}(1)\,(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \int_{R^n}\int_{R^n} \Psi_R(|\,\mu_1+\nu_1\,|) \times$$

$$\times \left[\int_0^R Y_n(|\,\mu_1\,|\,u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_1 u)\, u^{\frac{n-2}{2}} du\right]\left[\int_0^R Y_n(|\,\nu_1\,|\,v)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_2 v)\, v^{\frac{n-2}{2}} dv\right] \times$$

$$\times g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1 = (2\pi)^n\, \omega_n^{-2}(1)\, (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, I^R(|\mu_1|, \lambda_1)\, I^R(|\nu_1|, \lambda_2)\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|) \times$$

$$\times |\mu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, |\nu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, d\mu_1 d\nu_1.$$

Поскольку $I^R(\mu, \lambda) = I(\mu, \lambda) - I_R(\mu, \lambda)$, то приведенный выше интеграл представляет сумму четырех интегралов:

$$T_R^1(\lambda_1, \lambda_2) = (2\pi)^n\, \omega_n^{-2}(1) \int\limits_{V_{\lambda_1}(0)}\int\limits_{V_{\lambda_2}(0)} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1,$$

$$T_R^2(\lambda_1, \lambda_2) = (2\pi)^n\, \omega_n^{-2}(1)\, \lambda_2^{\frac{n}{2}} \int\limits_{V_{\lambda_1}(0)}\int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|) \times$$

$$\times I_R(|\nu_1|, \lambda_2)\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, |\nu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, d\mu_1 d\nu_1,$$

$$T_R^3(\lambda_1, \lambda_2) = (2\pi)^n\, \omega_n^{-2}(1)\, \lambda_1^{\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n}\int\limits_{V_{\lambda_2}(0)} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|) \times$$

$$\times I_R(|\mu_1|, \lambda_1)\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, |\mu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, d\mu_1 d\nu_1,$$

$$T_R^4(\lambda_1, \lambda_2) = (2\pi)^n\, \omega_n^{-2}(1)\, (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, I_R(|\mu_1|, \lambda_1) \times$$

$$\times I_R(|\nu_1|, \lambda_2)\, g(|\nu_1|)\, g(|\mu_1|)\, |\nu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, |\mu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, d\mu_1 d\nu_1.$$

Покажем, что $T_R^2(\lambda_1, \lambda_2)$, $T_R^3(\lambda_1, \lambda_2)$ и $T_R^4(\lambda_1, \lambda_2)$ стремятся к нулю при $R \to \infty$. Рассмотрим, например, T_R^2. Заметив, что из работы [3] следует ограниченность интеграла

$$\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1,$$

представим T_R^2 как сумму интегралов по трем различным областям R^{2n}. Пусть $|\mu_1| \in [0, \lambda_1]$, $|\nu_1| \in [\lambda_2 - \delta, \lambda_2 + \delta]$, где $\delta > 0$. Тогда по лемме 1 интеграл по этой области может быть сделан малым за счет выбора δ. Далее, пусть $|\mu_1| \in [0, \lambda_1]$, $|\nu_1| \in [0, \delta_1]$, где $\delta_1 > 0$. Поступая, как и в работе [6] при вычислении дисперсии оценки, получаем

$$\int\limits_{V\lambda_1(0)}\int\limits_{V_{\delta_1}(0)} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, I_R(|\nu_1|,\lambda_2)\, g(|\mu_1|)\,|\nu_1|^{\frac{2-n}{2}}\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1 =$$

$$= c\int\limits_0^{\lambda_1}\int\limits_0^{\delta_1}\left[\int\limits_0^{2R} Y_n(\mu z)\, Y_n(\nu z)\, z^{n-1} I_{\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{z^2}{4R^2}\right) dz\right]\times$$

$$\times I_R(\nu_1\lambda_2)\,\mu^{n-1}\nu^{\frac{n}{2}} g(\mu)\, g(\nu)\, d\mu d\nu = c_1\int\limits_0^{\lambda_1}\int\limits_0^{\delta_1}\left[\int\limits_0^{2R} J_{\frac{n-2}{2}}(\mu z)\, J_{\frac{n-2}{2}}(\nu z)\times\right.$$

$$\left.\times zI_{\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{z^2}{4R^2}\right) dz\right] I_R(\nu,\lambda_2)\,\mu^{\frac{n}{2}}\nu g(\mu)\, g(\nu)\, d\mu d\nu,$$

где $I_{(p,q)}(x) = \frac{1}{B(p,q)}\int\limits_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ — неполная бета-функция. Так как

$$\left|\int\limits_0^{2R} J_{\frac{n-2}{2}}(\mu z)\, J_{\frac{n-2}{2}}(\nu z)\, zI_{\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{z^2}{4R^2}\right) dz\right| \leqslant c\frac{1}{\sqrt{\mu\nu}} R,$$

то, приняв во внимание лемму 1, убеждаемся, что исходный интеграл по рассматриваемой области не превосходит $c\int\limits_0^{\delta_1} g(\nu)\, d\nu$ и выбором δ_1 может быть сделан малым.

Пусть $\delta > 0$ и $\delta_1 > 0$ уже выбраны. Тогда по лемме 1 интеграл по оставшейся области стремится к нулю как $1/R$ при $R\to\infty$.

Аналогично поступаем с $T_R^3(\lambda_1,\lambda_2)$ и $T_R^4(\lambda_1,\lambda_2)$. Как в работе [3], показываем, что при $R\to\infty$

$$(2\pi)^n\omega_n^{-2}(1)\int\limits_{V_{\lambda_1}(0)}\int\limits_{V_{\lambda_2}(0)} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1 \to$$

$$\to 2^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_0^{\min(\lambda_1,\lambda_2)} \mu^{n-1} g^2(\mu)\, d\mu.$$

Предел второго слагаемого в выражении $U_n(R)\operatorname{cor}[\hat{\Phi}_R(\lambda_1),\ \hat{\Phi}_R(\lambda_2)]$ совпадает с пределом первого. Различие в доказательстве возникает при рассмотрении $T_R^4(\lambda_1,\lambda_2)$, но

$$|T_R^4(\lambda_1,\lambda_2)| \leqslant c\left|\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1+\nu_1|)\, I_R(|\nu_1|,\lambda_1)\, I_R(|\nu_1|,\lambda_2)\times\right.$$

$$\left.\times|\nu_1|^{2-n} g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1\right| = c\left|\int\limits_{Rn}\int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1|)\, g(|\mu_1-\nu_1|)\times\right.$$

$$\times |v_1|^{2-n} I_R(|v_1|, \lambda_1) I_R(|v_1|, \lambda_2) g(|v_1|) d\mu_1 dv_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \int_{R^n} |I_R(|v_1|, \lambda_1)| |I_R(|v_1|, \lambda_2)| |v_1|^{2-n} g(|v_1|) dv_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_0^\infty |I_R(v, \lambda_1)| |I_R(v, \lambda_2)| v g(v) dv \to 0$$

при $R \to \infty$, что завершает доказательство теоремы.

Изучим теперь асимптотическое распределение оценок корреляционной и спектральной функций.

Для случайного поля $\xi(x)$ рассмотрим условие сильного перемешивания. Пусть $\Lambda \subset R^n$; обозначим через $m(\Lambda)$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $\{\xi(x), x \in \Lambda\}$, а через $\alpha[m(\Lambda_1), m(\Lambda_2)] = \sup\limits_{\substack{A \in m(\Lambda_1) \\ B \in m(\Lambda_2)}} |P(AB) - P(A)P(B)|$ — розенблаттов коэффициент связи между σ-алгебрами $m(\Lambda_1)$, $m(\Lambda_2)$. Пусть $\rho(\Lambda_1, \Lambda_2) = \inf\limits_{\substack{x \in \Lambda_1 \\ y \in \Lambda_2}} |x - y|$ — расстояние между множествами Λ_1, Λ_2, а $\alpha(r) = \sup \alpha(m(\Lambda_1), m(\Lambda_2))$, где верхняя грань берется по всем множествам таким, что $\rho(\Lambda_1, \Lambda_2) > r$.

Условие 2. Пусть $\alpha(r) = O(r^{-n-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ и

$$\int_0^\infty \mu^{n+1} g(\mu) d\mu < \infty.$$

Заметим [5], что из условия 2 следует выполнение условия 1.

Рассмотрим случайный процесс $\gamma_R(u) = \sqrt{\overline{U}_n(R)} [\hat{B}_R(u) - B(u)]$, $u \in [0, H]$ с математическим ожиданием $M\gamma_R(u) = 0$ и корреляционной функцией $R_R(u_1, u_2)$ и гауссовский случайный процесс $\gamma(u)$ $u \in [0, H]$ с математическим ожиданием $M\gamma(u) = 0$ и корреляционной функцией

$$R(u_1, u_2) = 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty Y_n(\mu u_1) Y_n(\mu u_2) \mu^{n-1} g^2(\mu) d\mu.$$

Далее будем предполагать, что условие 2 выполнено.

Лемма 2. Гауссовский процесс $\gamma(u)$ порождает в $C([0, H])$ меру P.

Доказательство.

$$M[\gamma(u_1) - \gamma(u_2)]^2 = c \int_0^\infty [Y_n(\mu u_1) - Y_n(\mu u_2)]^2 \mu^{n-1} \times$$

$$\times g^2(\mu) d\mu \leqslant c \int_0^\infty \mu^{n+1} g^2(\mu) d\mu (u_1 - u_2)^2,$$

откуда и следует [7] утверждение леммы 2.

Лемма 3. Вектор $\{\gamma_R(u_1), \ldots, \gamma_R(u_m)\}$ слабо сходится к вектору $\{\gamma(u_1), \ldots, \gamma(u_m)\}$ при $R \to \infty$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7 [5].

Лемма 4. Семейство мер P_R, порождаемых процессами $\gamma_R(u)$ в $C([0, H])$, компактно.

Доказательство.

$$M[\gamma_R(u_1) - \gamma_R(u_2)]^2 = R_R(u_1, u_1) + R_R(u_2, u_2) - 2R_R(u_1, u_2) =$$

$$= (2\pi)^n \omega_n^{-2}(1) \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \Psi_R(|\mu_1 + \nu_1|)\,[[Y_n(|\mu_1| u_1) - Y_n(|\mu_1| u_2)] \times$$

$$\times [Y_n(|\nu_1| u_1) - Y_n(|\nu_1| u_2)] + [Y_n(|\mu_1| u_1) -$$

$$- Y_n(|\mu_1| u_2)]^2]\, g(|\mu_1|)\, g(|\nu_1|)\, d\mu_1 d\nu_1.$$

Тогда согласно [3] $M[\gamma_R(u_1) - \gamma_R(u_2)]^2 \leqslant c\,[u_1 - u_2]^2$ равномерно по R.

Из лемм 2—4 при выполнении условия 2 следует такая теорема.

Теорема 3. Меры P_R слабо сходятся к мере P в $C([0, H])$ при $R \to \infty$.

Рассмотрим вектор $\{\eta_R(\lambda_1), \ldots, \eta_R(\lambda_m)\}$, где $\eta_R(\lambda_i) = \sqrt{U_n(R)}\,[\hat{\Phi}_R(\lambda_i) - M\hat{\Phi}_R(\lambda_i)]$ и гауссовский вектор $\{\eta(\lambda_1), \ldots, \eta(\lambda_m)\}$ с математическим ожиданием $M\eta(\lambda_i) = 0$ и корреляционной матрицей

$$M\eta(\lambda_i)\,\eta(\lambda_j) = 2^n \pi^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int\limits_0^{\min(\lambda_i, \lambda_j)} \mu^{n-1} g^2(\mu)\, d\mu.$$

Теорема 4. Вектор $\{\eta_R(\lambda_1), \ldots, \eta_R(\lambda_m)\}$ слабо сходится к вектору $\{\eta(\lambda_1), \ldots, \eta(\lambda_m)\}$ при $R \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что

$$\eta_R(\lambda_i) = 2^{\frac{2-n}{2}}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)(\lambda_i)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^R \sqrt{U_n(R)}\,[\hat{B}_R(u) - B(u)]\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_i u)\, u^{\frac{n-2}{2}}\, du =$$

$$= 2^{\frac{2-n}{2}}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)(\lambda_i)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^R \gamma_R(u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_i u)\, u^{\frac{n-2}{2}}\, du.$$

Но $\eta_R(\lambda_i) = \eta_R^1(\lambda_i) + \eta_R^2(\lambda_i)$, где

$$\eta_R^1(\lambda_i) = 2^{\frac{2-n}{2}}\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)(\lambda_i)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^H \gamma_R(u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_i u)\, u^{\frac{n-2}{2}}\, du,$$

а $\eta_R^2(\lambda_i) = \eta_R(\lambda_i) - \eta_R^1(\lambda_i)$.

В выражении

$$M[\eta_R^2(\lambda_i)]^2 = 2^{2-n}\Gamma^{-2}\left(\frac{n}{2}\right)(\lambda_i)^n \int\limits_H^R \int\limits_H^R U_n(R) \operatorname{cor}\{\hat{B}_R(u), \hat{B}_R(v)\} \times$$

$$\times J_{\frac{n}{2}}(\lambda_i u)\, J_{\frac{n}{2}}(\lambda_i v)\,(uv)^{\frac{n}{2}}\, du dv$$

можно в силу теоремы 2 совершить предельный переход при $R \to \infty$, а предельное выражение выбором H может быть сделано малым.

Таким образом, предельное распределение $\{\eta_R(\lambda_1), \ldots, \eta_R(\lambda_m)\}$ совпадает с предельным распределением $\{\eta'_R(\lambda_1), \ldots, \eta'_R(\lambda_m)\}$. Но $\eta'_R(\lambda_i)$, $i = \overline{1, m}$ есть линейные непрерывные функционалы от процесса $\gamma_R(u)$, и конечномерные распределения $\gamma_R(u)$ слабо сходятся к конечномерным распределениям $\gamma(u)$.

Поэтому, учитывая [7, с. 485] и гауссовость интеграла от гауссовского процесса, получаем гауссовость предельного распределения $\eta'_R(\lambda_i)$, $i = \overline{1, m}$, что завершает доказательство теоремы.

1. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. Киев : Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1980. 208 с. 2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. 296 с. 3. *Дыховичный А. А.* Об оценке корреляционной функции однородного и изотропного гауссовского случайного поля. Теория вероятностей и мат. статистика, 1983, вып. 29, с. 37—40. 4. *Градштейн И. С. Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с. 5. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* О принципе инвариантности для оценки корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 3, с. 323—331. 6. *Дыховичный А. А.* Оценка корреляционной функции однородного и изотропного случайного поля по наблюдениям на шаре.— В кн.: Исследования по статистике случайных процессов. Киев : Киев. ун-т, 1982. 16 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 2889—82. 7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. М.: Наука, 1971. Т. 1. 664 с.

Поступила в редколлегию 23.02.83

УДК 519.21

Н. В. КАРТАШОВ, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОДНО УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЭРГОДИЧНОСТИ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В работе доказываются уточнения неравенств для дискретных последовательностей восстановления [1] и неравенств эргодичности и устойчивости общих цепей Маркова [2]. Метод доказательства основан на неравенстве для производящей функции апериодического дискретного распределения, отделяющего ее значения на единичной окружности от единицы.

1. Рассмотрим дискретное распределение вероятностей $q = (q_t)$ на множестве $N = \{1, 2, \ldots\}$ с моментами $\mu = \sum_{t \geqslant 1} t q_t$, $\mu_{1+\beta} = 2 \sum_{n \geqslant} n^\beta Q_n$, где $Q_n = \sum_{t > n} q_t$, $n \geqslant 0$, «хвост» распределения q, а $\beta \in (0, 1)$.

Предположим, что распределение q апериодично, т. е. наибольший общий делитель (н. о. д.) множества $I(q) = \{i : q_i > 0\}$ равен единице. Тогда при некотором n множество $I_n(q) = I(q) \cap [1, n]$ содержится в классе $J = \{I \subset N$, н. о. д. $I = 1$, $\sup I < \infty\}$. Из определения J