Если $\Xi(t)$ и $\Lambda(t)$ — два решения уравнения (19) на Q, то подобно выводу неравенств (26), (27) получаем

$$|||\Xi - \Lambda|||^2 = |||S_2^n\Xi - S_2^n\Lambda|||^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!}\{3C_0[3 + (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)]\}^n [(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)]^{2n+2} |||\Xi - \Lambda|||^2$$

для любого $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $|||\Xi - \Lambda||| = 0$ и решение уравнения (19) единственно.

1. *Пономаренко А. И.* Стохастические интегралы по обобщенным случайным ортогональным мерам в банаховых пространствах // Теория вероятностей и мат. статистика. 1985. Вып. 33. С. 92—99. 2. *Гихман Ил. И.* Об одном квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении в частных производных // Теория случайных процессов. 1977. Вып. 5. С. 21—27. 3. *Пясецкая Т. Е.* Об одном полулинейном стохастическом гиперболическом уравнении с двупараметрическим белым шумом // Теория случайных процессов. 1983. Вып. 11. С. 82—89.

Поступила в редколлегию 06.02.85

УДК 519.21

Г. И. ПРИЗВА, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) $M \mid G \mid 1 \mid \infty$ с прямым порядком обслуживания вызовов и прибором, отказывающим только в свободном состоянии. Считаем, что вызов, заставший прибор свободным, поступает немедленно на обслуживание. В противном случае он становится в очередь, длина которой может быть неограниченной. Пусть параметр входящего потока λ, $H(x)$ — функция распределения длительности обслуживания одного вызова, причем $h_1 = \int\limits_0^\infty x dH(x) < \infty$. Если в момент t прибор освободился от вызовов и до момента $t + x$ вызовы в СМО не поступали, то с вероятностью $D_0(x)$ прибор может выйти из строя в промежутке $[t, t + x)$. После выхода прибора из строя начинается его восстановление. Будем считать, что время восстановления прибора — случайная величина с функцией распределения $R(x)$. Длительности обслуживания вызовов, работы и восстановлений прибора, как обычно, независимые случайные величины.

Исследованию описанных выше СМО посвящены работы [1, 2]. Введем, следуя [2], некоторые специальные характеристики этих систем. Под обобщенным периодом занятости будем понимать промежуток занятости прибора, начавшийся либо с обслуживания вызова, поступившего в свободную и исправную систему, либо с восстановления прибора до следующего момента, когда система свободна от вызовов, а прибор исправлен. Пусть $\omega(t)$ — возможное время ожидания, точнее: длина промежутка времени, начинающегося с момента t

и оканчивающегося первым после t моментом, когда СМО освободится от вызовов, поступивших до момента t, а прибор будет исправен. Обозначим через $\theta(t)$ длину промежутка времени, начинающегося с момента t и оканчивающегося первым после t моментом, когда СМО освободится от вызовов, а прибор будет исправен. Естественно называть $\theta(t)$ остатком обобщенного периода занятости.

В настоящей работе на основе подхода [3] изучается совместное распределение величин $\omega(t)$ и $\theta(t)$. Кратко сформулируем некоторые известные результаты, используемые далее. Пусть $\Omega(x, t) = P\{\omega(t) \leqslant x\}$ и $\omega(s, t) = \int_0^\infty e^{-sx} d_x \Omega(x, t)$, причем $\omega(s, 0) = 0$, тогда

$$\omega(s, t) = e^{[s-\lambda+\lambda h(s)]t} \left\{1 - s \int_0^t e^{-[s-\lambda+\lambda h(s)]x} P_0(x)\, dx - \right.$$

$$\left. - [1 - r(s)] \int_0^t e^{-[s-\lambda+\lambda h(s)]x} P_1(x)\, dx \right\}, \quad (1)$$

где

$$h(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x), \quad r(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dR(x).$$

Можно показать [2], что

$$I_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_1(t)\, dt = \frac{1}{1 - r(s + \lambda - \lambda\pi(s))} \left[1 - \right.$$

$$\left. - (s + \lambda - \lambda\pi(s)) \int_0^\infty e^{-st} P_0(t)\, dt \right], \quad (2)$$

причем

$$I_0(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_0(t)\, dt = \frac{1 - \Delta_0(s+\lambda)}{s+\lambda} \left\{1 - \right.$$

$$\left. - \Delta_0(s+\lambda)\, r(s + \lambda - \lambda\pi(s)) - \frac{\lambda}{s+\lambda} [1 - \Delta_0(s+\lambda)]\, \pi(s) \right\}^{-1}, \quad (3)$$

где $\pi(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi(s) = h(s + \lambda - \lambda\pi(s)), \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (4)$$

а $\Delta_0(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dD_0(x)$.

Заметим, что уравнение (4) возникает при анализе периода занятости системы $M \mid G \mid \mathrm{I} \mid \infty$ с абсолютно надежным прибором и определяет единственную функцию $\pi(s)$, являющуюся преобразованием Лапласа— Стилтьеса функции распределения $\Pi(t)$ периода занятости для такой системы.

Итак, пусть $F(t, x, y)$ — функция распределения величин $\omega(t)$ и $\theta(t)$

$$F(t, x, y) = P\{\omega(t) \leqslant x,\ \theta(t) \leqslant y\}, \quad (5)$$

тройное преобразование Лапласа—Стилтьеса которой по всем аргументам

$$f(q, p, s) = qs \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-qt-px-sy} d_xF(t, x, y)\, dy dt. \qquad (6)$$

Ясно, что

$$d_xF(t, x, y) = P\{\omega(t) = x\} \cdot P\{\theta(t) \leqslant y \mid \omega(t) = x\} =$$
$$= P\{\theta(t) \leqslant y/\omega(t) = x\}\, d_x\Omega(x, t).$$

Для нахождения вероятности $P\{\theta(t) \leqslant y/\omega(t) = x\}$ используем такие соображения. Пусть за время возможного ожидания x прибыло j вызовов с вероятностью $e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$; в момент $t+x$ прибор исправен и в СМО находится j вызовов. Вероятность того, что остаток обобщенного периода занятости не превышает $y-x$, равна $\Pi_j(y-x)$, где через $\Pi_j(\cdot)$ обозначена j-кратная композиция распределения $\Pi(\cdot)$. Итак,

$$P\{\theta(t) \leqslant y/\omega(t) = x\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^j}{j!} \Pi_j(y-x).$$

Найдем теперь функцию (6);

$$f(q, p, s) = q \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-qt-px}\, s \int_x^{\infty} e^{-sy} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^j}{j!} \Pi_j(y-x)\, dy d_x\Omega(x, t) dt =$$
$$= q \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-qt-px-sx} d_x\Omega(x, t) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^j}{j!} [\pi(s)]^j\, dt =$$
$$= q \int_0^{\infty} e^{-qt} \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda+s-\lambda\pi(s))x} d_x\Omega(x, t)\, dt =$$
$$= q \int_0^{\infty} e^{-qt} \omega(p+\lambda+s-\lambda\pi(s), t)\, dt.$$

С учетом (1) в результате перемены порядка интегрирования после несложных вычислений получим

$$f(q, p, s) = \frac{q}{q-p-s+\lambda\pi(s)-\lambda h(p+\lambda+s-\lambda\pi(s))} \{1 -$$
$$- [p+\lambda+s-\lambda\pi(s)]\, I_0(q) - [1-r(p+\lambda+s-\lambda\pi(s))]\, I_1(q)\}, \qquad (7)$$

где $I_0(q)$ и $I_1(q)$ задаются соотношениями (2), (3).

Для абсолютно надежного прибора $I_1(q) = 0$, а $I_0(q) = \frac{1}{q+\lambda-\lambda\pi(q)}$, так что формула (7) полностью согласуется с основным результатом [3] в случае простейшего потока вызовов.

Рассмотрим приложения формулы (7) для нахождения некоторых предельных распределений, связанных с возможным временем ожидания и остатком обобщенного периода занятости при $t \to \infty$.

Введем функцию совместного предельного распределения указанных выше характеристик $G(x, y) = \lim_{t\to\infty} F(t, x, y)$, существование которого при $\lambda h_1 < 1$ следует, например, из общей эргодической теоремы для регенерирующих процессов [1]. Пусть двойное преобразование Лапласа—Стилтьеса функции $G(x, y)$

$$g(p, s) = s\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-sy} d_x G(x, y)\, dy.$$

На основании свойств преобразований Лапласа—Стилтьеса

$$g(p, s) = \lim_{q\to 0} f(q, p, s) = \frac{1}{p+s-\lambda\pi(s)+\lambda h(p+\lambda+s-\lambda\pi(s))} \times$$

$$\times \frac{1-\lambda h_1}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1\Delta_0(\lambda)} \{(1-\Delta_0(\lambda))(p+\lambda+s-\lambda\pi(s)) +$$

$$+ \lambda\Delta_0(\lambda)[1-r(p+\lambda+s-\lambda\pi(s))]\},$$

где $r_1 = \int_0^\infty x dR(x)$.

В процессе вычислений использован тот факт, что существуют пределы [2]

$$\lim_{q\to 0} qI_0(q) = (1-\lambda h_1)\frac{1-\Delta_0(\lambda)}{\lambda}\left[\frac{1-\Delta_0(\lambda)}{\lambda}+r_1\Delta_0(\lambda)\right]^{-1},$$

$$\lim_{q\to 0} qI_1(q) = \Delta_0(\lambda)(1-\lambda h_1)\left[\frac{1-\Delta_0(\lambda)}{\lambda}+r_1\Delta_0(\lambda)\right]^{-1}.$$

Для функции $B(x)$ предельного распределения величины $\omega(t)$ при $t\to\infty$ и ее преобразования Лапласа—Стильтеса $\beta(p)$ из (8) при $\lambda h_1 < 1$ находим

$$\beta(p) = \lim_{s\to 0} g(p, s) = \frac{1}{p-\lambda+\lambda h(p)} \cdot \frac{1-\lambda h_1}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1\Delta_0(\lambda)} \times$$

$$\times \{(1-\Delta_0(\lambda))p + \lambda\Delta_0(\lambda)[1-r(p)]\}. \tag{9}$$

Заметим, что формула (9) совпадает с известным результатом [2].

Введем, наконец, функцию $A(x)$ предельного распределения величины $\theta(t)$ при $t\to\infty$ и ее преобразование Лапласа—Стилтьеса $\alpha(s)$. Из соотношения (8) получим при $\lambda h_1 < 1$

$$\alpha(s) = \lim_{p\to 0} g(p, s) = \frac{1}{s}\frac{1-\lambda h_1}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1\Delta_0(\lambda)} \times$$

$$\times \{(1-\Delta_0(\lambda))(\lambda+s-\lambda\pi(s)) + \lambda\Delta_0(\lambda)[1-r(\lambda+s-\lambda\pi(s))]\}. \tag{10}$$

Укажем, что соотношения (8) — (10) позволяют определить разнообразные численные характеристики, связанные с предельным распределением величин $\omega(t)$ и $\theta(t)$ при $t \to \infty$. Вычисление таких характеристик достаточно громоздко. Приведем поэтому лишь окончательные выражения для первых двух моментов m_1^{ω}, m_1^{θ} и m_2^{ω}, m_2^{θ} предельных распределений $\omega(t)$ и $\theta(t)$:

$$m_1^{\omega} = \frac{\lambda h_2}{2(1-\lambda h_1)} + \frac{\lambda \Delta_0(\lambda)}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1 \Delta_0(\lambda)} \cdot \frac{r_2}{2},$$

$$m_1^{\theta} = \frac{\lambda h_2}{2(1-\lambda h_1)^2} + \frac{\lambda \Delta_0(\lambda)}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1 \Delta_0(\lambda)} \cdot \frac{r_2}{2},$$

$$m_2^{\omega} = \frac{\lambda h_3}{3(1-\lambda h_1)} + \frac{(\lambda h_2)^2}{2(1-\lambda h_1)^2} + \frac{\lambda h_2}{2(1-\lambda h_1)} +$$

$$+ \frac{\lambda \Delta_0(\lambda)}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1 \Delta_0(\lambda)} \left[\frac{r_3}{3(1-\lambda h_1)} + \frac{r_2}{2(1-\lambda h_1)^2} + \frac{r_2}{2(1-\lambda h_1)}\right],$$

$$m_2^{\theta} = \frac{\lambda h_3}{3(1-\lambda h_1)^3} + \frac{(\lambda h_2)^2}{(1-\lambda h_1)^4} +$$

$$+ \frac{\lambda \Delta_0(\lambda)}{1-\Delta_0(\lambda)+\lambda r_1 \Delta_0(\lambda)} \left[\frac{r_3}{3(1-\lambda h_1)^2} + \frac{\lambda h_2 r^2}{(1-\lambda h_1)^3}\right],$$

где h_2, h_3 и r_2, r_3 — соответственно вторые и третьи моменты длительности обслуживания одного вызова и времени восстановления прибора.

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966. 432 с. 2. *Гнеденко Б. В., Даниелян Э. А., Димитров Б. Н.* и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. 448 с. 3. *Призва Г. Й.* Про одну формулу для систем масового обслуговування $M_k \mid G \mid I$ // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка, 1975. № 17. С. 69—74.

Поступила в редколлегию 07.02.85

УДК 519.21

А. К. ФАРАХ, асп., Киевский университет

АСИМПТОТИКА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Оценка функции по наблюдениям в точках. Введем G — класс всех функций $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^2)$;
2) f периодична с периодом 1 по каждой переменной;
3) $f \in \mathbf{C}^2([0, 1] \times [0, 1])$.

Пусть для каждых $n \in \mathbf{N}$ и $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ $t_j = \frac{j}{n}$; $\{\varepsilon_{jk}, j \geqslant 0, k \geqslant 0\}$ — семейство действительных случайных величин с конечным вторым моментом таких, что $\mathbf{M}\varepsilon_{jk} = 0$, $\mathbf{M}(\varepsilon_{jk}\varepsilon_{\nu\mu})\ \sigma^2\delta_{j\nu}\delta_{k\mu}$; $j, k, \nu, \mu \geqslant 0$, $\sigma^2 > 0$ — фиксированное число.