то при $0<|t|\leqslant M$ из (20) получим следующее неравенство:

$$K/2\cdot|t|\int_0^\infty x^{n-2}f(\sqrt{(M/2)^2+x^2})\,dx\leqslant|r(0)-r(t)|\leqslant$$

$$\leqslant K/2\cdot|t|\int_0^\infty x^{n-2}f(x)\,dx,$$

т. е. оценку вида $A|t|\leqslant|r(0)-r(t)|\leqslant B|t|$, A и B — положительные константы. Теорема доказана.

1. *Kawada T*. Sample functions of Polya processes // Pacific J. Math. 1981. **97**, N 1. P. 292—301.2. *Великоиваненко А. И.* Многомерные аналоги теоремы Пойа // Теория вероятностей и мат. статистика. 1986. Вып. 34. С. 36—43. 3. *Ядренко М. Й.* Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів // Вісн. Київ. ун-ту. Математика та механіка. 1967. № 9. С. 103—112. 4. *Y eh J.* Differentiability of sample functions of Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. 18, N 1. P. 105—108. 5. *Витушкин А. Г.* О многомерных вариациях. М., 1955. 255 с. 6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1962. Т. 3. 643 с.

Поступила в редколлегию 14.06.85

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, д-р физ.-мат. наук, Киев. ун-т

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СТИЛТЬЕСА ПРЕДЕЛЬНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗОТРОПНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

В статье доказано утверждение, обобщающее результаты работы [1]. Как и в работе [1], распределение случайного m-мерного вектора $\vec{\xi}' = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ будем называть изотропным, если $H\xi\approx\xi$, где H — ортогональная вещественная матрица m-го порядка, символ $\approx$ означает совпадение распределений.

Введем изотропные случайные матрицы $\Xi=(\vec{\xi}_1,\ldots,\vec{\xi}_n)$, $\xi_i\approx\xi$, λ_i — собственные числа матрицы $n^{-1}\Xi\Xi'$, $\mu_n(x)=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}F(x-\lambda_k)$, $F(y)=0$, если $y\leqslant 0$, $F(y)=1$, если $y>0$.

Теорема. Если для каждого значения m и n случайные векторы ξ_i независимы,

$$\lim_{n\to\infty}mn^{-1}=c,\quad 0<c<\infty; \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{(\vec{\xi},\vec{\xi})\,m^{-1}<x\}=G(x); \tag{2}$$

$$\mathbf{M}\xi_1^4<a<\infty, \tag{3}$$

то почти для любого x $\operatorname{plim}_{n\to\infty}\mu_n(x)=\mu(x)$, где $\mu(x)$ — функция распределения, преобразование Стилтьеса которой $u(t)=\int_0^\infty(t+x)^{-1}d\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$u(t)=\int_0^\infty[t+x(1+xu(t))^{-1}c]^{-1}dG(x),\quad t>0. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) существует и единственно в классе аналитических функций при $t > 0$.

Доказательство. Из книги [2, с. 177] вытекает, что почти для всех значений x

$$\text{plim}_{n\to\infty} [\mu_n(x) - \mathbf{M}\mu_n(x)] = 0. \tag{5}$$

Для спектральных функций $\mathbf{M}\mu_n(x)$ рассмотрим преобразование Стилтьеса

$$\int_0^\infty (t+x)^{-1} d\mathbf{M}\mu_n(x) = n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(It + n^{-1}\Xi\Xi')^{-1}.$$

Согласно [2, с. 175]

$$\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_s^t - \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_{s-1}^t = \mathbf{M}\,(d/dt)\ln[1 + n^{-1}(R_{s-1}^t\vec{\xi}_s, \vec{\xi}_s)],$$

где $R_s^t = (It + n^{-1}\sum_{k=1}^{s}\vec{\xi}_k\vec{\xi}_k')^{-1} = (r_{ij}^s)_{i,j=1}^m$.

В силу того что распределения векторов $\vec{\xi}_k$ изотропны, из этой формулы находим

$$\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_n - \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_{n-1} = \mathbf{M}\,(d/dt)\ln[1 + r_{11}^{n-1}(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1)n^{-1}], \quad r_{ii}^{n-1} \approx r_{jj}^{n-1}.$$

Докажем, что при $t > 0$

$$\text{plim}_{n\to\infty}(r_{11}^{n-1} - \mathbf{M}r_{11}^{n-1}) = 0. \tag{6}$$

Для этого представим разность $r_{11}^{n-1} - \mathbf{M}r_{11}^{n-1}$ в следующем виде:

$$r_{11}^{n-1} - \mathbf{M}r_{11}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1}[\mathbf{M}_{k-1}(r_{11}^{n-1} - r_{11}^{n-1,k}) - \mathbf{M}_k(r_{11}^{n-1} - r_{11}^{n-1,k})], \tag{7}$$

где $\mathbf{M}_k$ — условное математическое ожидание при фиксированной минимальной σ-алгебре, относительно которой измеримы случайные векторы $\vec{\xi}_{k+1}, \ldots, \vec{\xi}_n$; $r_{11}^{n-1,k}$ — элемент матрицы $\left(It + \sum_{s\neq n,k}\xi_s\xi_s'\right)^{-1}$.

С учетом формулы (3.1.31) [2, с. 190] находим

$$\mathbf{M}(r_{11}^{n-1} - \mathbf{M}r_{11}^{n-1})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{i1}^{n-1,k}\xi_{ik}\right)^4 n^{-2}.$$

Так как распределение вектора ξ изотропно и $\sum_{i=1}^{m}(r_{i1}^{n-1,k})^2 \leqslant t^{-1}$, то при $t > 0$ в силу условия (3) выполняется (6). Используя (6) и то, что $\mathbf{M}r_{11}^{n-1} = m^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_{n-1} = m^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_n + o(1)$, получаем

$$\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_n - \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_{n-1} = \mathbf{M}\,(d/dt)\ln[1 + \mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,R_n(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1)n^{-1}m^{-1}] + o(1). \tag{8}$$

Рассмотрим матрицы

$$H_k = \sum_{s=1}^{k}(\vec{\xi}_s, \vec{\xi}_s)\vec{h}_s\vec{h}_s' n^{-1}m^{-1} + n^{-1}\sum_{s=k+1}^{n}\vec{\xi}_s\vec{\xi}_s',$$

где $\vec{h}_s$ — независимые случайные векторы, распределенные по нормальному закону $N(0, I)$ и не зависящие от случайных векторов $\vec{\xi}_s$. Используем (8) и соотношение

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} [((It + H_k - (\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)\vec{h}_k\vec{h}_k m^{-1}n^{-1})^{-1}\vec{h}_k, \vec{h}_k)\, n^{-1} - $$

$$- n^{-1}\operatorname{Sp}(It + H_k)^{-1}] = 0,$$

тогда

$$\operatorname{plim}_{n\to\infty} n^{-1} [\mathbf{M}\operatorname{Sp} R_n - \mathbf{M}\operatorname{Sp}(It + H_n)^{-1}] = 0. \qquad (9)$$

Для функций $\mathbf{M}\operatorname{Sp}(It + H_n)^{-1}$ можно воспользоваться хорошо развитой теорией предельных теорем [3, с. 265]. В силу этого следствия с учетом (1) — (5) и (9)

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\operatorname{Sp}(It + H_n)^{-1} = u(t),$$

где $u(t)$ удовлетворяет уравнению (4). Теорема доказана.

1. *Yin Y. Q., Krishnaiah P. R.* Limit theorem for the eigenvalues of the sample covariance matrix when the underlying distribution is isotropic // Теория вероятностей и ее применения. 1985. **30**, вып. 4. С. 810—816. 2. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы. К., 1975. 448 с. 3. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов. К., 1980. 368 с.

Поступила в редколлегию 17.12.85

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, д-р физ.-мат. наук,
А. К. МАТВЕЙЧУК, инж., Киев. ун-т

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, заданных на вероятностном пространстве (Ω, F, P), со значениями в $R = (-\infty, \infty)$. Последовательность случайных величин $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, называют случайным блужданием. Величины ξ_n называются шагами блуждания, а величины S_n — положением блуждания после n-го шага.

В настоящей работе изучается предельное поведение функционалов от случайных блужданий, которые можно представить в виде $\sum_{k=1}^{n} f(S_k)$, где $f(x) = \sum_{m=1}^{r} c_m \exp(iu_m x)$, $|c_m| \leqslant c < \infty$.

Теорема. Пусть для постоянных u_m; $m, t = \overline{1, r}$; $r < \infty$; $l = 1, 2, \ldots$

$$|\varphi_l(u_m)| \leqslant \varphi < 1; \qquad (1)$$

$$|\varphi_l(u_m + u_t)| \leqslant \varphi_1 < 1, \qquad (2)$$