и следствие 2, получаем оценку

$$|S_2| = \frac{2}{\pi}\left(\frac{C_1}{T^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\frac{C_1}{T^{\lambda}}\right) = \frac{D}{T^{\lambda}}.$$

Эти две оценки доказывают формулу (4.2), где $k_1 = B + D$. Совершенно аналогично можем показать, что (4.3) также верно.

1. *Pitman E. J. G.* On the behaviour of the characteristic function of a probability distribution function in the neighbourhood of the origin // J. Austral. Math. Soc. 1968. 8, N 3. P. 423—443. 2. *Laue G.* Zur Theorie der charakteristischen Funktionen nichtnegatwer Zufallsgroßen. Leipzig. 1974. 124 S. 3. *Idem.* More about characteristic functions of one-sided distribution functions // Roßberg T., Jesiak B., Siegel G. Analytic methods in probability theory. Berlin, 1985. P. 74—92. 4. *Widder D. V.* The Laplace transform. Princeton, 1969. 406 p. 5. *Cartwright M. L.* Integral functions. Cambridge, 1956. 406 p. 6. *Laue G.* Existence and representation of density functions // Math. Nachr. 1983. N 114. P. 7—21. 7. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962. 1100 с. 8. *Laue G.* Zur Theorie der charakteristischen Funktionen nichtnegativer zufallsgrößen // Trans. 6th Prague Conf. on Information Theory. Prague, 1973. P. 529—546. 9. *Лукач Е.* Характеристические функции. М., 1979. 424 с.

Поступила в редколлегию 31.08.84

УДК 519.21

Л. ЛАКАТОШ, асп., Киев. ун-т

О ВЕРОЯТНОСТЯХ СОСТОЯНИЙ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ

Пусть $\xi(t)$ — однородная цепь Маркова с дискретным временем в фазовом пространстве $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и переходными вероятностями $P_{rk}(u)$, задаваемыми с помощью равенств $P_{0r}(1) = b_r$; $r = 0, 1, 2$; $P_{k,k+2-r}(1) = a_r$; $r = 0, 1, \ldots, k+1$, $P_{k0}(1) = \hat{a}_{k+2}$, $\hat{a}_k = \sum_{j=k}^{\infty} a_j$, где $\sum_{r=0}^{\infty} a_r = 1$ и $\sum_{r=0}^{2} b_r = 1$. Тогда

$$P_{0k}(n+1) = b_0 P_{0k}(n) + b_1 P_{1n}(n) + b_2 P^{*}_{2k}(n),$$

$$P_{rk}(n+1) = \sum_{i=0}^{r+1} a_i P_{r-i+2,k}(n) + \hat{a}_{r+2} P_{0k}(n), \quad r > 0. \tag{1}$$

Ввелем обозначения

$$a(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \theta^r, \quad c(\theta) = \frac{a(\theta)}{\theta^2}, \quad q_k(\theta, n) = \sum_{r=1}^{\infty} P_{rk}(n)\theta^r, \quad -1 < \theta < 1,$$

$$q_{rk}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{rk}(n) z^n, \quad r = 0, 1, 2,$$

$$Q_k(\theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_k(\theta, n) z^n, \quad 0 \leqslant z < 1.$$

Из уравнений Колмогорова — Чепмена (1) следует, что

$$q_k(\theta, n+1) = \frac{a(\theta)}{\theta^2} q_k(\theta, n) + P_{0k}(n) \frac{\theta^2[1-a_0-a_1] - [a(\theta) - a_0 - a_1(\theta)]}{\theta(1-\theta)} -$$

$$- P_{1k}(n) \frac{a_0 + a_1\theta}{\theta} - a_0 P_{2k}(n);$$

$$Q_k(\theta, z) = \left[(1-\delta_{0k})\theta^k + q_{0k}(z) z \frac{\theta^2[1-a_0-a_1] - [a(\theta) - a_0 - a_1\theta]}{\theta(1-\theta)} - \right.$$

$$\left. - q_{1k}(z) z \frac{a_0 + a_1\theta}{\theta} - q_{2k}(z) z a_0 \right] \left[1 - z\frac{a(\theta)}{\theta^2}\right]^{-1}.$$

Последнее выражение содержит неизвестные $q_{ik}(z)$ ($i = 0, 1, 2$). Для их определения мы будем опираться на результаты работ [1—3] о корнях $\theta_0(z) \in (0,1)$ и $\theta_1(z) \in (-1, 0)$ уравнения $1 = zc(\theta)$. Из системы (1) вытекает, что

$$q_{0k}(z)[1 - zb_0] - q_{1k}(z) zb_1 - q_{2k}(z) zb_2 = \delta_{0k}. \qquad (2)$$

Числитель в формуле (2) при $\theta = \theta_{0,1}(z)$ должен быть равным нулю. Следовательно,

$$- q_{0k}(z) z \frac{\theta_0^2(z)[1-a_0-a_1] - [a(\theta_0(z)) - a_0 - a_1\theta_0(z)]}{\theta_0(z)[1-\theta_0(z)]} +$$

$$+ q_{1k}(z) z \frac{a_0 + a_1\theta_0(z)}{\theta_0(z)} + q_{2k}(z) z a_0 = (1-\delta_{0k})\theta_0^k(z) -$$

$$- q_{0k}(z) z \frac{\theta_1^2(z)[1-a_0-a_1] - [a(\theta_1(z)) - a_0 - a_1\theta_1(z)]}{\theta_1(z)[1-\theta_1(z)]} +$$

$$+ q_{1k}(z) z \frac{a_0 + a_1\theta_1(z)}{\theta_1(z)} + q_{2k}(z) z a_0 = (1-\delta_{0k})\theta_1^k(z).$$

Система уравнений (2), (3) имеет положительный определитель $D(z)$ и может быть решена по правилу Крамера: $q_{ik}(z) = \dfrac{D_{ik}(z)}{D(z)}$; $i = 0, 1, 2$.

Нами доказан следующий результат.

Теорема 1. Производящие функции вероятностей перехода из состояния i ($i = 0, 1, 2$) в состояние k за n шагов выражаются через корни уравнения $1 - z\dfrac{a(\theta)}{\theta^2} = 0$ в единичном круге и определяются системой линейных уравнений (2), (3).

Займемся нахождением необходимых и достаточных условий эргодичности цепи $\xi(t)$. Предположим, что рассматриваемая цепь непериодична и все состояния сообщаются. Для этого достаточно наложить например, условия, приводимые в работе [3], и получить, что

$$\lim_{t\to\infty} P_{ik}(t) = P_k \geqslant 0.$$

По абелевой теореме [4]

$$P_k = \lim_{z \to 1-0} \frac{(1-z) D_{0k}(z)}{D(z)}, \quad k \geqslant 0. \tag{4}$$

Отсюда легко получить такой результат.

Теорема 2. Цепь $\xi(t)$ эргодична тогда и только тогда, когда все состояния сообщаются и $c'(1) > 0$; при этом стационарные вероятности состояний цепи определяются формулой (4). В случае $c'(1) = 0$ состояния цепи являются возвратно-нулевыми, а при $c'(1) < 0$ — невозвратными.

В заключение укажем, что наши результаты дополняют исследования, проведенные в работах [1—3, 5, 6].

1. *Аннаев Т., Лакатош Л.* Анализ состояний однородной системы с неординарным поступлением и парным обслуживанием требований // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1981. **37**, № 4. P. 301—306. 2. *Корнийчук М. Т., Маркова Л. Н.* Исследование одного класса систем массового обслуживания с дискретным временем. Кв, 1977. 51 с. (Препр. / АН УССР, Ин-т математики; 9). 3. *Лакатош Л.* Цепи Маркова с ограниченными скачками и их применение. Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. К., 1981. 18 с. 4. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М., 1971. 264 с. 5. *Neuts M. F.* Markov chains with applications in queueing theory which have a matrix — geometric invariant probability vector // Adv. Appl. Probab. 1978. **10**, N 1. P. 185—212. 6. *Idem.* Queues solvable without Rouche's theorem // Oper. Res. 1979. **27**, N 4. P. 767—781.

Поступила в редколлегию 12.03.85

УДК 519.21

Ю. С. МИШУРА, канд. физ.-мат. наук, Киев. ун-т

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАРТИНГАЛОВ

Пусть $\{x_t, t \geqslant 0\}$ — непрерывный положительный локальный мартингал, $x_0 = 1$. Тогда, как известно, x_t допускает экспоненциальное представление вида

$$x_t = \exp\{m_t - 1/2 \langle m \rangle_t\}, \tag{1}$$

где m_t — непрерывный локальный мартингал, $m_0 = 0$, $\langle m \rangle_t$ — его квадратическая характеристика. В статье [1] показано, что при выполнении условия

$$E \exp\{1/2 \langle m \rangle_t\} < \infty, \quad t \geqslant 0 \tag{2}$$

имеет место равенство $Ex_t = 1$ и, следовательно, x_t — мартингал, причем условие (2) является неулучшаемым в том смысле, что постоянную $c = 1/2$ нельзя заменить на $c' = 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В настоящей статье приведены экспоненциальные представления, аналогичные представлению (1), для двупараметрических неотрицательных непрерывных мартингалов, а также достаточные условия их равномерной интегрируемости по каждой координате.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$, $s \leqslant t$, если $s_1 \leqslant t_1$, $s_2 \leqslant t_2$, $\{\mathfrak{F}_t, t \in R_+^2\}$ — поток σ-алгебр, удовлетворяющих обычным условиям $(F1)$ — $(F4)$ [2].