Используя эти неравенства, получаем $\mathbf{M}\left|(n-1)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\gamma}_k\right|^2 \leqslant cn^{-1}+o(1)$.

Следовательно, в силу (27)

$$p\lim_{n\to\infty}[(S\eta,\eta)-\mathbf{M}(S\eta,\eta)](n-1)^{-1}=0.$$

Анзлогично

$$[(S^2\eta,\eta)-\mathbf{M}(S^2\eta,\eta)]=-\sum_{k=1}^{n}(d/d\theta_n)\tilde{\gamma}_k. \tag{28}$$

После простых преобразований видно, что и эта разность стремится по вероятности к нулю. Таким образом, используя (28) и (26), получаем (25).

Заметим, что в общем случае

$$\varliminf_{n\to\infty}|(\mathbf{M}(S\eta,\eta)-\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,SR_{m_n})(n-1)^{-1}>0.$$

Покажем, что выражение $\rho_n=[1+(n-1)^{-1}\mathbf{M}(S\eta,\eta)]^{-1}$ ограничено. Очевидно, что

$$1+(n-1)^{-1}(S\eta,\eta)=\det[I\theta_n-(Q-(n-1)^{-1}\eta\eta')]\det[I\theta_n-Q]^{-1}=$$
$$=[1+(n-1)^{-1}((I\theta_n-(Q-\eta\eta'(n-1)^{-1}))^{-1}\eta,\eta)]^{-1}.$$

Из этого равенства и (28) вытекает $|\rho_n|\leqslant 1+c+o(1)$. Лемма 3 доказана.

С учетом лемм 2 и 3 легко установить, что справедливо

$$p\lim_{n\to\infty}|\theta_n-\tilde{\theta}_n|=0,\quad p\lim_{n\to\infty}|\tilde{\varphi}(\theta_n)-\mathbf{M}\tilde{\tilde{\varphi}}(\theta_n)|=0,$$

$$p\lim_{n\to\infty}|\tilde{\varphi}'(\theta_n)-\mathbf{M}\tilde{\varphi}'(\theta_n)|=0,\quad p\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n(m_n(n-1))^{-1}|=0.$$

Используя леммы 1—3, формулы (7), (8), (29), получаем утверждение теоремы 2.

1. *Гирко В. Л.* Центральная предельная теорема для случайных детерминантов // Теория вероятностей и ее применения. 1981. **26**, вып. 3. С. 532—542.2. *Он же.* Теория случайных детерминантов. К., 1980. 368 с.

Поступила в редколлегию 14.09.85

УДК 519.21

М. О. ДЖНЕЙД, асп., Киев. ун-т

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА НЕКОТОРЫХ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $\{\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\ldots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в фазовом пространстве $(E,\mathbf{A})$, $\mathrm{P}\{\zeta_k\in A\}=\pi(A)$, $A\in\mathbf{A}$. Рассмотрим величину

$\eta_n = \max\{\xi_1(\zeta_0, \zeta_1), \ldots, \xi_n(\zeta_{n-1}, \zeta_n)\}$, где $\xi_k(x, y) \geqslant 0$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных функций, $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$-измеримым образом зависящих от x, y.

Обозначим через $F(x, y; u)$ функцию распределения случайной величины $\xi_k(x,y)$, $F(x, y; u) = \mathbf{P}\{\xi_k(x, y) < u\}$ и положим $F(u) = \iint\limits_{EE} F(x, y; u)\,\pi(dx)\,\pi(dy)$, $F(x; u) = \mathbf{P}\{\xi_k(\zeta_0, \zeta_1) < u/\zeta_0 = x\} = \int\limits_E F(x, y; u)\,\pi(dy)$. Будем постоянно предполагать, что $F(u) < 1$ при всех $u > 0$.

Теорема. Если 1) $1 - F(u) \sim u^{-\alpha}L(u)$ при $u \to \infty$, где $L(u)$ — медленно меняющаяся функция при $u \to \infty$ и $0 < \alpha < \infty$; 2) $\sup\limits_x [1 - F(x; u)] \to 0$ при $u \to \infty$, то

$$\mathbf{P}\{\eta_n/a_n > u\} \to e^{-u^{\alpha}}, \quad u > 0,$$

где $a_n \to \infty$, $n[1 - F(a_n)] \to 1$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что η_n — максимум последовательности зависимых случайных функций. Поэтому $\eta_n = \max\{\eta'_{n,m}, \eta''_{n,m}, \eta^0_{n,m}\}$, где $\eta'_{n,m} = \max\left\{\tilde{\eta}_{i,m},\ i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{m}\right]\right\}$, $\tilde{\eta}_{i,m} = \max\{\xi_{(i-1)m+1}, \ldots, \xi_{im-1}\}$, $\eta''_{n,m} = \max\left\{\xi_{jm}(\zeta_{jm-1}, \zeta_{jm}),\ j = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{m}\right]\right\}$, $\eta^0_{n,m} = \max\{\xi_{\left[\frac{n}{m}\right]m+1}, \ldots, \xi_n\}$.

Величины $\tilde{\eta}_{i,m}$, $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{m}\right]$ при каждом $m > 1$ независимы в совокупности и одинаково распределены: $\mathbf{P}\{\tilde{\eta}_{i,m} < u\} = \mathbf{P}\{\eta_{m-1} < u\} = F_{m-1}(u)$. Величины $\xi_{jm}(\zeta_{jm-1}, \zeta_{jm})$ также независимы при каждом $m > 1$ и одинаково распределены с функцией распределения $F(u)$.

Теперь рассмотрим величину $\eta'_{n,m}$. Запишем

$$F_{m-1}(x; u) = \mathbf{P}\{\eta_{m-1} < u/\zeta_0 = x\} = \int \ldots \int F(x, x_1, u)\,F(x_1, x_2, u) \ldots$$
$$\ldots F(x_{m-2}, x_{m-1}, u)\,\pi(dx_1) \ldots \pi(dx_{m-1}).$$

Тогда

$$1 - F_{m-1}(x; u) = 1 - \int \ldots \int \prod_{k=1}^{m-1} F(x_{k-1}, x_k, u)\,\pi(dx_1), \ldots \pi(dx_{m-1})$$

и

$$1 - F_{m-1}(u) = \int \ldots \int \left(1 - \prod_{k=1}^{m-1} F(x_{k-1}, x_k, u)\right) \pi(dx)\,\pi(dx_1) \ldots \pi(dx_{m-1})$$
$$(x_0 = x).$$

Методом математической индукции докажем, что $1 - F_{m-1}(u) = (m - 1)(1 - F(u)) - o(1 - F(u))$. При $m - 1 = 2$ получаем $1 - F_2(u) = 2(1 - F(u)) - o(1 - F(u))$. Допустим, что при $m - 1 = r$ выполняется равенство $1 - F_r(u) = r(1 - F(u)) - o(1 - F(u))$. Докажем, что при $m-1=r+1$ верно

$$1-F_{r+1}(u)=(r+1)(1-F(u))-o(1-F(u));$$

$$1-F_{r+1}(u)=\int\ldots\int\left[1-\prod_{k=1}^{r+1}F(x_{k-1},x_k,u)\right]\pi(dx)\,\pi(dx_1)\ldots\pi(dx_{r+1})=$$

$$=1-F(u)+\int\ldots\int F(x_r,x_{r+1},u)\left(1-\prod_{k=1}^{r}F(x_{k-1},x_k,u)\right)\times$$

$$\times\,\pi(dx)\,\pi(dx_1)\ldots\pi(dx_{r+1})=(1-F(u))-\int\ldots\int[1-F(x_r,x_{r+1},u)]\times$$

$$\times\left[1-\prod_{k=1}^{r}F(x_{k-1},x_k,u)\right]\pi(dx)\,\pi(dx_1)\ldots\pi(dx_{r+1}).$$

При условии 2) теоремы

$$\int\ldots\int[1-F_r(x_r,u)]\left[1-\prod_{k=1}^{r}F(x_{k-1},x_k,u)\right]\pi(dx)\,\pi(dx_1)\ldots\pi(x_r)<$$

$$<\varepsilon(1-F_r(u)).$$

Отсюда $1-F_{r+1}(u)=(r+1)(1-F(u))-o(1-F(u))$, что и требовалось доказать.

При условии 1) теоремы, $n\to\infty$ и $u\to\infty$ получаем $1-F_{m-1}(u)\sim\sim(m-1)(1-F(u))$. Отсюда при $n\to\infty$ [1, с. 338]

$$\mathbf{P}\{\eta'_{n,m}/a_{n,m}>u\}\to e^{-u^{\alpha}},\quad u>0,$$

где $a_{n,m}\to\infty$, $\frac{n}{m}\left[1-F_{m-1}(a_{n,m})\right]\to 1$ при $\pi\to\infty$.

Положим $a_{n,m}=c_m a_n$, $c_m>0$. Тогда

$$\frac{n}{m}[1-F_{m-1}(a_{n,m})]\sim\frac{n}{m}(m-1)(1-F(a_{n,m}))\sim$$

$$\sim\frac{n(m-1)}{m}c_m^{-\alpha}a_n^{-\alpha}L(c_m a_n)\sim\frac{m-1}{m}c_m^{-\alpha}n[1-F(a_n)].$$

При $n\to\infty$

$$\frac{m-1}{m}c_m^{-\alpha}=1\Rightarrow c_m=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{1/\alpha}\Rightarrow a_{n,m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{1/\alpha}a_n.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\eta'_{n,m}/\left(\frac{m-1}{m}\right)^{1/\alpha}a_n>u\right\}\to e^{-u^{\alpha}},$$

$$\mathbf{P}\{\eta'_{n,m}/a_n>u\}\to e^{-\frac{m}{m-1}u^{\alpha}},\quad u>0.$$

Рассмотрим величину $\eta''_{n,m}$. Проводя аналогичные выкладки, при $n\to\infty$ получаем

$$\mathbf{P}\{\eta''_{n,m}/a_n>u\}\to e^{-mu^{\alpha}},\quad u>0.$$

Наконец, так как $\eta^0_{n,m}$ содержит не более $m-1$ членов, то

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^0_{n,m}}{a_n} > \varepsilon\right\} \leqslant (m-1)\,\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_1(\zeta_0, \zeta_1)}{a_n} > \frac{\varepsilon}{m-1}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т. е. $\eta^0_{n,m}/a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ по вероятности.

Для любых неотрицательных случайных величин ξ, η и любого числа $u>0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi<u\} - \mathbf{P}\{\eta>u/2\} \leqslant \mathbf{P}\{\max(\xi,\eta)<u\} \leqslant \mathbf{P}\{\xi<u\}.$$

С учетом этого неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta'_{n,m}}{a_n} < u\right\} - \mathbf{P}\left\{\frac{\max(\eta'_{n,m}, \eta^0_{n,m})}{a_n} > \frac{u}{2}\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{a_n} < u\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\frac{\eta'_{n,m}}{a_n} < u\right\}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, находим

$$[(1-e^{-\frac{m}{m-1}u^\alpha}) - e^{-m\left(\frac{u}{2}\right)^\alpha}] \leqslant \liminf_{n\to\infty}\left[1-\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{a_n} > u\right\}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left[1-\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{a_n} > u\right\}\right] \leqslant (1-e^{-\frac{m}{m-1}u^\alpha}).$$

После предельного перехода при $m\to\infty$

$$1-e^{-u^\alpha} \leqslant \liminf_{n\to\infty}\left[1-\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{a_n} < u\right\}\right] \leqslant \limsup_{n\to\infty}\left[1-\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{a_n} < u\right\}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 1-e^{-u^\alpha}.$$

Значит, $\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_n}{a_n} > u\right\} \to e^{-u^\alpha}$, $u>0$.

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. М., 1967. Т. 2. 752 с.

Поступила в редколлегию 06.11.84

УДК 519.21

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, д-р физ.-мат. наук, Н. ЗЕРЕК, асп.,
А. Г. КУКУШ, канд. физ.-мат. наук, Киев. ун-т

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ К НОРМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ОЦЕНКИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА

В настоящей статье при определенных условиях доказывается асимптотическая нормальность (т. е. слабая сходимость соответствующих распределений) оценок бесконечномерного параметра нелиней-