1. *Каплан Е. И., Моца А. И., Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для аддитивных функционалов, определенных на асимптотически возвратных цепях Маркова. I // Теория вероятностей и мат. статистика. 1982. Вып. 27. С. 34—51.
2. *Моца А. И.* Моментные функции процессов достижения уровня для однородных локально безгранично делимых процессов // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 3. С. 14—16.

Поступила в редколлегию 24.10.86

УДК 519.21

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, д-р физ.-мат. наук,
Киев. ун-т

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

В настоящей статье приводятся достаточные условия существования периодических и стационарных решений стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Доказывается также асимптотическая периодичность или стационарность решений соответствующей задачи Коши. Периодичность случайного процесса означает периодичность всех конечномерных распределений по сдвигу времени. Такие процессы изучались в конечномерной ситуации в работах [1—3], в абстрактной ситуации в статьях [4—6] и некоторых других. Условиям существования периодических решений детерминированных уравнений как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах посвящено большое число работ (детальную библиографию можно найти в книгах [7, 8]). Однако детерминированные методы, как правило, не применимы к исследованию периодических в вероятностном смысле решений. Подход этой статьи иной и существенно вероятностный.

1. Постановка задачи. Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и соответствующей ему нормой $\|\cdot\|$; $A : \mathcal{D}(A) \to H$ — секториальный оператор с параметром $a > 0$ [9]. В частности, множество $\mathcal{D}(A)$ плотно в H, A — замкнут и $-A$ есть инфинитезимальный оператор аналитической полугруппы ограниченных операторов $G(t) := e^{-At}$, $t \geq 0$, при этом для некоторого $C_1 > 0$ $\|G(t)\| \leq C_1 e^{-at}$, $t \geqslant 0$.

Пусть $\{w_i(t) : t \geqslant 0\}$, $i = 1, 2$ — независимые винеровские процессы в H, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, S — корреляционный оператор элемента $w_i(1)$, $i = 1, 2$; S — положительный самосопряженный компактный оператор с конечным следом;

$$w(t) := \begin{cases} w_1(t), & t \geqslant 0, \\ -w_2(-t), & t < 0. \end{cases}$$

Для заданных функций f: $\mathbb{R} \times H \to H$, σ: $\mathbb{R} \times H \to \mathcal{L}(H)$ исследуется вопрос о существовании периодических и стационарных решений на оси следующего уравнения:

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\dot{w}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

а также вопрос об асимптотическом поведении решений соответствующей задачи Коши

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + Ax(t) = f(t, x(t)) + \sigma(t, x(t))\dot{w}(t), \quad t > t_0; \\ x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in H. \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим сначала точный смысл уравнений (1) и (2), а также смысл понятия периодичности.

Определение 1 [2]. Измеримый случайный H-значный процесс $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ называется периодическим с периодом $T > 0$, если $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{R}$, $\forall \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{B}(H)$: $P\{\xi(t_i + T) \in A_i, i = 1, \ldots, n\} = P\{\xi(t_i) \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Здесь $\mathcal{B}(H)$ — σ-алгебра борелевских множеств в H. Обратим внимание на то обстоятельство, что траектории периодического с периодом T процесса не являются, вообще говоря, даже с положительной вероятностью периодическими с периодом T функциями. Поэтому нельзя прямо применить методы исследования детерминированных уравнений к исследованию периодических по определению 1 решений. Процесс $\{\xi(t) : t \geqslant t_0\}$ называется периодическим с периодом $T > 0$, если требование определения 1 выполняется для всех n, $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset [t_0, +\infty)$. Пусть для каждого $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_t := \sigma\{w(s_2) - w(s_1) : s_1 < s_2 \leqslant t\}$; x_0 — H-значный случайный элемент $\mathcal{F}_{t_0}$-измеримый и такой, что $M\|x_0\|^2 < +\infty$.

Определение 2 [10]. H-Значный случайный процесс $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ($\{x(t) : t \geqslant t_0\}$), непрерывный по норме на $\mathbb{R}$ ($[t_0, +\infty)$) с вероятностью 1, называется обобщенным решением уравнения (1) (задачи Коши (2)), если для каждого $t \in \mathbb{R}$ ($t \geqslant t_0$) элемент $x(t)$ $\mathcal{F}_t$-измерим и для любых $-\infty < t_0 < t < +\infty$ (для любого $t > t_0$) с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\begin{gathered} x(t) = G(t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} G(t-s) f(s, x(s))\, ds + \\ + \int_{t_0}^{t} G(t-s)\sigma(s, x(s))\, dw(s), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\sup\{M\|x(\tau)\|^2 \mid t_0 \leqslant \tau \leqslant t\} < +\infty.$$

Первый интеграл в правой части (3) есть интеграл Бохнера относительно меры Лебега, второй — стохастический интеграл от неупреждающей операторно-значной функции по H-значному винеровскому процессу. Свойства таких стохастических интегралов изучались в общей ситуации многими авторами [11—13]. Заметим, что в детерминированном случае ($\sigma \equiv 0$) непрерывное решение интегрального уравнения (3) называется согласно Ф. Браудеру, слабым решением задачи 2 [9]. Условие $P'\{x \in \mathscr{D}(A)\} = 1$ со случайным H-значным элементом x означает, что существует множество $\Omega_0 \in \mathscr{F}$ с $P(\Omega_0) = 1$ такое, для которого $x(\omega) \in \mathscr{D}(A)$, $\omega \in \Omega_0$.

Определение 3 [10]. H-Значный случайный процесс $\{x(t): t \in \mathbb{R}\}$ ($\{x(t): t \geqslant t_0\}$), непрерывный по норме на $\mathbb{R}$ (на $[t_0, +\infty)$) с вероятностью 1, называется сильным решением уравнения (1) (задачи Коши (2) с элементом x_0 таким, что $P'\{x_0 \in \mathscr{D}(A)\} = 1$), если для каждого $t \in \mathbb{R}$ ($t \geqslant t_0$) элемент $x(t)$ $\mathscr{F}_t$-измерим, $P'\{x(t) \in \mathscr{D}(A)\} = 1$, для любых $-\infty < t_0 < t < +\infty$ (для любого $t > t_0$)

$$\sup\{M\|x(\tau)\|^2 \mid t_0 \leqslant \tau \leqslant t\} < +\infty,$$

$$\sup\{M\|Ax(\tau)\|^2 \mid t_0 \leqslant \tau \leqslant t\} < +\infty$$

и с вероятностью 1 справедливо равенство

$$x(t) = x(t_0) - \int_{t_0}^{t} Ax(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, x(s))\,dw(s). \quad (4)$$

2. Условия периодичности и стационарности. Далее используются следующие условия:

(i) для некоторого фиксированного $T > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H: f(t + T, x) = f(t, x)$, $\sigma(t + T, x) = \sigma(t, x)$;

(ii) $\exists C_2 \geqslant 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \{x, y\} \subset H$: $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant C_2\|x - y\|$; $\exists C_3 \geqslant 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \{x, y\} \subset H$: $\operatorname{tr}((\sigma(t, x) - \sigma(t, y)) S (\sigma(t, x) - \sigma(t, y))^*) \leqslant C_3^2\|x - y\|^2$;

(iii) $\forall x \in H$: $f(\cdot, x) \in C(\mathbb{R}, H)$, $\sigma(\cdot, x) \in C(\mathbb{R}, \mathscr{L}(H))$.

Теорема 1. Предположим, что условия (i)—(iii) выполнены и

$$a > C_1^2 C_3^2 + C_1\sqrt{C_1^2 C_3^4 + 2C_2^2}.$$

Тогда существует единственный с точностью до стохастической эквивалентности H-значный случайный процесс $\{x(t): t \in \mathbb{R}\}$, который является периодическим с периодом T обобщенным решением уравнения (1). Для любого $\mathscr{F}_{t_0}$-измеримого элемента x_0 с $M\|x_0\|^2 < +\infty$ единственное обобщенное решение $\{y(t): t \geqslant t_0\}$ задачи Коши (2) асимптотически периодично в том смысле, что $\|y(t) - x(t)\| \to 0$, $t \to +\infty$ с вероятностью 1 (периодично, если $x_0 = x(t_0)$).

Приведем основные этапы доказательства теоремы 1, опустив стандартные рассуждения, основанные на свойствах стохастических интегралов (см. [14]). Сначала проверяется, что при условиях теоремы 1 существование обобщенного решения уравнения (1) эквивалентно существованию сильнонепрерывного с вероятностью 1 и $\{\mathscr{F}_t\}$-согласованного решения следующего стохастического интегрального уравнения:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t - s) f(s, x(s))\,ds + \int_{-\infty}^{t} G(t - s)\sigma(s, x(s))\,dw(s), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Затем аналогично [2] используются метод последовательных приближений и оценки, основанные на свойствах стохастических интегралов и подобные содержащимся в работе [14]. При этом учитывается, что процесс вида $\left\{\int\limits_{-\infty}^{t} G(t-s)\,\sigma(s, z(s))\,dw(s),\ t\in\mathbb{R}\right\}$ периодичен с периодом T, если $\{z(s): s\in\mathbb{R}\}$ периодичен с периодом T и $\{\mathcal{F}_t\}$ согласован, а также то, что предел последовательности периодических процессов является периодическим.

Аналогично можно получить условия существования стационарного в узком смысле решения. Пусть функции $\tilde{f}: H\to H$, $\tilde{\sigma}: H\to\mathcal{L}(H)$ не зависят от t. Введем условие

(i') $\exists\tilde{C}_2\geqslant 0\ \forall\{x, y\}\subset H$: $\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\leqslant\tilde{C}_2\|x-y\|$; $\exists\tilde{C}_3\geqslant 0$ $\forall\{x, y\}\subset H$: $\operatorname{tr}((\tilde{\sigma}(x)-\tilde{\sigma}(y))\,S\,(\tilde{\sigma}(x)-\tilde{\sigma}(y))^*)\leqslant\tilde{C}_3^2\|x-y\|^2$.

Теорема 2. Предположим, что функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\sigma}$ удовлетворяют условию (i') и $a>C_1^2\tilde{C}_3^2+C_1\sqrt{C_1^2\tilde{C}_3^4+2\tilde{C}_2^2}$. Тогда существует единственный с точностью до стохастической эквивалентности H-значный стационарный случайный процесс $\{\tilde{x}(t): t\in\mathbb{R}\}$, который является обобщенным решением уравнения

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}+A\tilde{x}(t)=\tilde{f}(\tilde{x}(t))+\tilde{\sigma}(\tilde{x}(t))\,\dot{w}(t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Для любого $\mathcal{F}_{t_0}$-измеримого элемента x_0 такого, что $M\|x_0\|^2<+\infty$, единственное обобщенное решение $\{\tilde{y}(t): t\geqslant t_0\}$ задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{d\tilde{y}(t)}{dt}+A\tilde{y}(t)=\tilde{f}(\tilde{y}(t))+\tilde{\sigma}(\tilde{y}(t))\,\dot{w}(t),\quad t\geqslant t_0;\\ \tilde{y}(t_0)=x_0\end{gathered} \tag{7}$$

асимптотически стационарно в том смысле, что $\|\tilde{y}(t)-\tilde{x}(t)\|\to 0$, $t\to+\infty$ с вероятностью 1 (стационарно, если $x_0=x(t_0)$).

Обобщенные решения уравнения (1) или задачи Коши (2), вообще говоря, не обладают нужной «гладкостью» — к значениям $\{x(t)\}$ оператор A не обязательно применим. Поэтому представляют интерес условия, при которых обобщенное решение уравнения (1) является сильным его решением. Введем следующие условия:

(v) $\forall t\in[0, T]$, $\forall x\in\mathcal{D}(A)$: $f(t, x)\in\mathcal{D}(A)$, $Af\in C(\mathbb{R}\times\mathcal{D}(A), H)$; $\forall t\in[0, T]$, $\forall x\in\mathcal{D}(A)$, $\forall y\in H$: $\sigma(t, x)\,y\in\mathcal{D}(A)$, $A\sigma y\in C(\mathbb{R}\times\mathcal{D}(A), H)$;

(vi) $\exists L_1\geqslant 0\ \forall t\in[0, T]$, $\forall\{x, y\}\subset\mathcal{D}(A)$: $\|Af(t, x)-Af(t, y)\|\leqslant L_1\|Ax-Ay\|$; $\exists L_2\geqslant 0\ \forall t\in[0, T]$, $\forall\{x, y\}\subset\mathcal{D}(A)$: $\operatorname{tr}((A\sigma(t, x)-A\sigma(t, y))\,S\,(A\sigma(t, x)-A\sigma(t, y))^*)\leqslant L_2^2\|Ax-Ay\|^2$.

Теорема 3. Предположим, что условия (i)—(vi) выполнены и $a>\max\{C_1^2C_3^2+C_1\sqrt{C_1^2C_3^4+2C_2^2},\ C_1^2L_2^2+C_1\sqrt{C_1^2L_2^4+2L_1^2}\}$.

Тогда единственное обобщенное периодическое с периодом T решение уравнения (1) является единственным сильным периодическим с периодом T решением уравнения (1). Для любого $\mathcal{F}_{t_0}$-измеримого случайного элемента x_0 такого, что $M\|x_0\|^2 < +\infty$ и $P'\{x_0 \in \mathcal{D}(A)\} = 1$, единственное обобщенное решение задачи Коши (2) является единственным сильным решением.

При доказательстве теоремы 3 устанавливается следующее утверждение.

Если условие (v) выполнено и процесс $\{z(t) : t \in \mathbb{R}\}$ согласован с потоком $\{\mathcal{F}_t\}$, сильно непрерывен на $\mathbb{R}$ и при каждом $t \in \mathbb{R}$ $P'\{z(t) \in \mathcal{D}(A)\} = 1$, то $P'\{u(t) \in \mathcal{D}(A)\} = 1$, где

$$u(t) := \int_{-\infty}^{t} G(t-s) f(s, z(s))\, ds + \int_{-\infty}^{t} G(t-s) \sigma(s, z(s))\, dw(s),$$

$$Au(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s) Af(s, z(s))\, ds + \int_{-\infty}^{t} G(t-s) A\sigma(s, z(s))\, dw(s)$$

$$(\mathrm{mod}\, P).$$

При доказательстве существенно используются замкнутость оператора A и некоторые другие его свойства [9]. Затем с помощью аналога теоремы Фубини для произведения меры Лебега и меры $\{dw\}$ в H доказывается совпадение сильного и обобщенного решений.

Справедлив аналогичный результат для обобщенного стационарного решения при выполнении таких условий:

(ii') $\forall x \in \mathcal{D}(A) : \tilde{f}(x) \in \mathcal{D}(A)$, $A\tilde{f} \in C(\mathcal{D}(A), H)$; $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall y \in H$: $\tilde{\sigma}(x) y \in \mathcal{D}(A)$, $A\tilde{\sigma} y \in C(\mathcal{D}(A), H)$;

(iii') $\exists \tilde{L}_1 \geqslant 0$ $\forall \{x, y\} \subset \mathcal{D}(A)$: $\|A\tilde{f}(x) - A\tilde{f}(y)\| \leqslant \tilde{L}_1 \|Ax - Ay\|$; $\exists \tilde{L}_2 \geqslant 0$ $\forall \{x, y\} \subset \mathcal{D}(A)$: $\mathrm{tr}\,((A\tilde{\sigma}(x) - A\tilde{\sigma}(y)) S (A\tilde{\sigma}(x) - A\tilde{\sigma}(y))^*) \leqslant \tilde{L}_2^2 \|Ax - Ay\|^2$.

Теорема 4. Предположим, что условия (i')—(iii') выполнены и число $a > \max\left\{C_1^2 \tilde{C}_3^2 + C_1 \sqrt{C_1^2 \tilde{C}_3^4 + 2\tilde{C}_2^2},\ C_1^2 \tilde{L}_2^2 + C_1 \sqrt{C_1^2 \tilde{L}_2^4 + 2\tilde{L}_1^2}\right\}$.

Тогда единственное стационарное обобщенное решение уравнения (6) является единственным стационарным сильным решением уравнения (6). Для любого $\mathcal{F}_{t_0}$-измеримого элемента x_0 такого, что $M\|x_0\|^2 < +\infty$ и $P'\{x_0 \in \mathcal{D}(A)\} = 1$, единственное обобщенное решение задачи Коши (7) является единственным сильным решением этой задачи.

1. *Ворович И. И.* Об устойчивости движения при случайных возмущениях // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. **20**, № 1. С. 17—32. 2. *Дороговцев А. Я.* Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях, возмущаемых периодическими случайными процессами // Укр. мат. журн. 1962. **14**, № 2. С. 119—128. 3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969. 368 с. 4. *Козобров В. И.* Периодические

случайные возмущения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Душанбе, 1982. 20 с. 5. *Pardoux E., Pignol M.* Stability of periodic bilinear stochastic differential equations with correlated noise inputs // Analele stiintifice ale Univ. «Al. I. Cuza» din Iasi. S. la. 1985. **31**, f. 3. P. 275—279. 6. *Morozan T.* Bounded and periodic solutions of affine stochastic differential equations // Studii Si. Cer. Mat. 1986. 38, N 6. P. 523—527. 7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970. 536 с. 8. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с. 9. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., 1985. 376 с. 10. *Дороговцев А. Я.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для абстрактного стохастического дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 1986. **41**, № 4. С. 159—160. 11. *Curtain R. F.* Estimation theory for abstract evolution equations excited by general white noise processes // SIAM J. Control and Optimization. 1976. **14**, N 6. P. 1124—1150. 12. *Kotelenez P.* A submartingale tyre inequality with applications to stochastic evolution equations // Stochastics. 1982. **8**, № 2. P. 139—151. 13. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. М., 1983. 208 с. 14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. К., 1982. 612 с.

Поступила в редколлегию 12.02.87

УДК 519.21

О. К. ЗАКУСИЛО, канд. физ.-мат. наук,
Киев. ун-т

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЦЕССОВ ХРАНЕНИЯ ЗАПАСОВ С АДДИТИВНЫМ ВХОДОМ

В работах [1, 2] указана конструкция процесса $x(t)$ хранения запасов с функцией сноса $g(x, t)$ и входом $A(t)$, являющимся неубывающим непрерывным справа однородным процессом с независимыми приращениями. Такой процесс описывает положение точки, движущейся по закону $g(x, t)$ (x — начальное положение точки) и испытывающей аддитивное воздействие процесса $A(t)$.

Не затрагивая в настоящей статье условий существования стационарного распределения Π процесса $x(t)$, займемся выводом уравнений, которым оно удовлетворяет. Как и в работах [1, 2], предполагаем, что $g(x, t)$ непрерывна по (x, t), неотрицательна, не возрастает по t, не убывает по x, удовлетворяет уравнению $g(x, s+t) = g(g(x, s), t)$ и определена при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. При этих условиях Π является также слабым пределом переходных вероятностей процесса $x(t)$ при $t \to \infty$.

Если интенсивность λ скачков процесса $A(t)$ конечна, то существуют случайные величины τ_k — момент k-го скачка процесса $A(t)$, $\Theta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ и $\eta_k = A(\tau_k) - A(\tau_k - 0)$, причем Θ_k и η_k независимы в совокупности, а их распределения задаются равенствами $P(\eta_k < x) = F(x)$, $P(\Theta_k > t) = e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$.

Введем последовательность $\xi_k = x(\tau_k - 0) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} x(\tau_k - \varepsilon)$, $k \geqslant 1$. Она является однородной цепью Маркова и удовлетворяет рекуррентному соотношению $\xi_{k+1} = g(\xi_k + \eta_k, \Theta_{k+1})$.