$= Q$, поэтому можно записать

$$N_2(t_1, t_2) \leqslant \varepsilon/(1 - \overline{F}(s, s)) + 2Q^{n_1 \wedge n_2 + 1}. \tag{17}$$

Проводя для случаев $t_1 > (n_1 + 1)s$, $t_2 \leqslant (n_2 + 1)s$ и $t_1 \leqslant (n_1 + 1)s$, $t_2 > (n_2 + 1)s$ рассуждения, аналогичные доказательству (17), несложно показать, что оценка (17) справедлива и в этих случаях.

Таким образом, из (16) и (17) следует, что

$$N_2(t_1, t_2) \leqslant \varepsilon/(1 - \overline{F}(s, s)) + \ln \overline{F}^{-1}(s, s) + 2Q^{n_1 \wedge n_2 + 1} \tag{18}$$

для всех t_1, $t_2 \geqslant 0$. Из (14), (15) и (18) получаем

$$|\overline{F}(t_1, t_2) - q_1^{k_1} q_2^{k_2} q_{12}^{k_1 \vee k_2}| \leqslant 2\varepsilon/(1 - \overline{F}(s, s)) +$$

$$+ \ln \overline{F}^{-1}(s, s) + 3Q^{n_1 \wedge n_2 + 1} \tag{19}$$

для всех t_1, $t_2 \geqslant 0$.

Теперь утверждение теоремы очевидно следует из (19), (13) и (12).

Отметим, что приведенные результаты несложно распространить, используя методику, предложенную в работе [1], и на многомерные показательные распределения размерности больше двух.

1. *Клебанов Л. Б., Меламед И. А.* Свойство ε-отсутствия последствия в конечном числе точек и устойчивость характеризации показательного распределения // Проблемы устойчивости стохастических моделей. М., 1984. С. 89—92.
2. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. М., 1984. 328 с.

Поступила в редколлегию 10.01.86

УДК 519.21

Ю. И. МАЖУГА, асп., Киев. ун-т

ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ОБРЫВА НЕПРЕРЫВНОГО ОДНОРОДНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

В работе [1] изучается асимптотика марковских моментов на однородных цепях Маркова с общим фазовым пространством и дискретным временем. В данной статье результаты [1] переносятся на случай непрерывных полугрупп. Задача оценки распределения момента первого наступления решалась в работе [2]. Однако методы и результаты [2] основаны на условии равномерного перемешивания системы.

1. Рассмотрим однородный марковский процесс $(x_t(\omega), t \geqslant 0)$ на пространстве (Ω, M^0, M_t, P_x), который согласован с потоком M_t и принимает значения в измеримом пространстве $(E, \mathscr{E})$. Пусть ζ — момент обрыва относительно системы (Ω, M^0, M_t, P_x), т. е. $\{\zeta \leqslant t\} \in M_t$ и для всех $t, u \geqslant 0$, $B \in \mathscr{E}$, $x \in E$ [3]

$$P_x\{\zeta > t + u, x_{t+u} \in B / M_t\} = P_{x_t}\{\zeta > u, x_u \in B\} 1_{\zeta > t}. \tag{1}$$

Распределение ζ однозначно задается семейством субстохастических ядер $\{Q_u : Q_u(x, B) = P_x(\zeta > u, x_u \in B),\ u \geqslant 0\}$, так как из (1) вытекает, что

$$P_x\{\zeta > t+u, x_{t+u} \in B\} = Q_{t+u}(x, B) = Q_t Q_u(x, B) \qquad (2)$$

для всех $x \in E$, $B \in \mathscr{E}$, $t, u \geqslant 0$.

Пусть $K = K(E)$ — некоторое банахово пространство конечных знакопеременных мер (зарядов) на $\mathscr{E}$, а $F = F(E)$ — некоторое банахово пространство измеримых функций на $\mathscr{E}$ с нормами $\|\cdot\|_K$ и $\|\cdot\|_F$ соответственно. Поставим в соответствие каждому ядру Q_t на $(E, \mathscr{E})$ и каждой мере $\mu \in K$ линейное отображение, задаваемое формулой $\mu Q_t(B) = \int_E \mu(dx) Q_t(x, B)$, где $x \in E, B \in \mathscr{E}$, $t \geqslant 0$.

Предположим, что для каждого $t \geqslant 0$ Q_t — это линейный оператор, отображающий K в K. Из соотношения (2) следует, что операторы $\{Q_t,\ t \geqslant 0\}$ образуют полугруппу, $Q_0 = I$ по определению [4, 5].

Рассмотрим сопряженную полугруппу $\{Q_t',\ t \geqslant 0\}$ на банаховом пространстве K^* (K^* — пространство, сопряженное к K).

Обозначим G совокупность всех элементов $f \in K^*$ таких, что $w - \lim\limits_{t \downarrow 0} Q_t' f = f$. Пусть B — слабый инфинитезимальный оператор полугруппы Q_t', D_B — его область определения [3]. Аналогично введем полугруппу операторов $\{T_t, t \geqslant 0\}$ на пространстве F, задаваемых формулой $T_t f(x) = \int_E Q_t(x, dy) f(y), f \in F$ (по определению $T_0 = I$), затем пространство F^*, полугруппу $\{T_t', t \geqslant 0\}$ на нем, аналогичное G множество L, слабый инфинитезимальный оператор $\tilde{B}$ полугруппы T_t' с областью определения $D_{\tilde{B}}$.

В предположении, что $f \in D_B$, $\mu \in D_{\tilde{B}}$, рассмотрим уравнения в пространствах K^* и F^* соответственно

$$Bf = 1, \quad g = 1 + \lambda f; \qquad (3)$$

$$\mu\tilde{B} = \pi, \quad \nu = \pi + \lambda\mu. \qquad (4)$$

Здесь $1 \in G$ — функция, тождественно равная единице, $\pi \in L$, λ — некоторое положительное число. Обозначим $\varphi_t = \lambda \exp(-\lambda t)$, $\Phi_t = \exp(-\lambda t)$.

Теорема 1. Пусть g удовлетворяет (3) или ν удовлетворяет (4). Тогда при всех $t \geqslant 0$ соответственно справедливы соотношения

$$Q_t' 1 - \Phi_t 1 = Q_t' g - \varphi * Q_t' g - \Phi_t g, \qquad (5)$$

$$\pi T_t' - \pi\Phi_t = \nu T_t' - \nu T_t' * \varphi - \nu\Phi_t. \qquad (6)$$

Они понимаются как равенства в пространствах K^* и F^* соответственно.

Докажем соотношение (5). Из утверждения I.15. А [3] следует, что при всех $t \geqslant 0$ $Q'_t f - f = \int_0^t Q'_s 1 ds$. Поэтому

$$\varphi * Q'_t g = \int_0^t \varphi_{t-s} Q_s g ds = \int_s^t \varphi_{t-s} Q'_s 1 ds + \lambda \int_0^t \varphi_{t-s} Q'_s f ds =$$
$$= \int_0^t \varphi_{t-s} Q'_s 1 ds + \lambda \int_0^t \varphi_{t-s} \left[\int_0^s Q'_u 1 du \right] ds + \lambda \int_0^t \varphi_{t-s} ds f =$$
$$= \int_0^t \varphi_{t-s} Q'_s 1 ds + \lambda \int_0^t Q'_u 1 \left[\int_u^t \varphi_{t-s} ds \right] du + \lambda f - \varphi_t f =$$
$$= Q'_t g - Q'_t 1 + \Phi_t 1 - \Phi_t g.$$

Последнее равенство и доказывает (5). Соотношение (6) доказывается аналогично.

2. Из (5) выводится оценка асимптотики ζ в терминах средних по мерам P_x.

Лемма 1. Пусть функция $h = \int_0^\infty Q'_t 1 dt$. Тогда $h \in D_B$ и $Bh = -1$.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1.1 [3]. Достаточно положить $\lambda = 0$.

Будем предполагать выполненным условие

$$\pi Q_t \leqslant \pi, \quad t \geqslant 0, \tag{7}$$

где π — некоторая вероятностная мера на $\mathscr{E}$.

Теорема 2. Пусть $M_\pi \zeta < \infty$, т. е. функция $m(x) = M_x \zeta$ интегрируема по мере π. Начальное распределение α процесса x_t абсолютно непрерывно относительно π и $\alpha(C) \leqslant a\pi(C)$ при всех $C \in \mathscr{E}$. Тогда для всех $m > 0$ (в том числе и для $m = M_\pi \zeta$) справедливо неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} | P_\alpha(\zeta > t) - \exp(-t/m) | \leqslant 2am^{-1} \int_E \pi(dx) | m(x) - m |. \tag{8}$$

Доказательство. Положим $f = -h$, где h — функция, определенная в лемме 1, и рассмотрим функцию $g = 1 + f/m$. В силу леммы 1 функция g как элемент G удовлетворяет (3), где $\lambda = m^{-1}$. Множество мер $\{\alpha : \alpha \leqslant a\pi\}$ Q_t-инвариантно по условию (7). Поэтому для распределения α справедливо представление (5), откуда $| \alpha Q_t 1 - \Phi_t | = | -\exp(-\lambda t)(\alpha g) + \alpha Q_t g - \varphi * \alpha Q_t g | = \left| \lambda \int_0^t \exp(-\lambda s) ds (\alpha g) - (\alpha g) + \alpha Q_t g - \lambda \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \times \alpha Q_s g ds \right| \leqslant | \alpha Q_t g - \alpha g | + \left| \lambda \int_0^t \exp(-\lambda s)(\alpha g - \alpha Q_{t-s} g) ds \right| \leqslant 2 \sup_{t \geqslant 0} | \alpha g - \alpha Q_t g |$, где $\alpha g = \int_E \alpha(dx) g(x)$.

По условию $M_\pi \zeta < \infty$, поэтому $m(x) < \infty$ π-почти везде. Если $\alpha \leqslant a\pi$, то $\alpha g = \alpha(1 - m(x)/m)$. Следовательно, $| P_\alpha(\zeta > t) - \Phi_t | \leqslant 2 \sup_{t \geqslant 0} | \alpha g - \alpha Q_t g | \leqslant 2a\pi | g | = 2a\pi | 1 - \lambda m(x) | = 2a \int_E \pi(dx) \times$

$\times|1-\lambda m(x)|$, что и доказывает (8). При проведении последних выкладок мы воспользовались таким утверждением.

Лемма 2. Если меры $\alpha_i \in \{\alpha : \alpha \leqslant a\pi\}$, $i = 1, 2$, то для любой функции g справедливо неравенство $|\alpha_1 g - \alpha_2 g| \leqslant a\pi|g|$.

Следствие. Пусть процесс $(x_t, t \geqslant 0)$ имеет момент регенерации τ, т. е. σ-алгебры M_τ и $\sigma[x_{t+\tau}, t \geqslant 0]$ независимы при условии x_τ, величина $x_\tau = \tilde{x}$ неслучайна P_x-почти наверное для всех $x \in E$, $M_\pi \tau < \infty$ и $\alpha(A) \leqslant a\pi(A)$ при $A \in \mathscr{E}$. Тогда справедлива оценка

$$\sup_{t \geqslant 0} |P_\alpha(\zeta > t) - \exp(-t/\tilde{m})| \leqslant 2a(P_\pi(\zeta < \tau) + \tilde{m}^{-1} M_\pi \tau), \tag{9}$$

где $\tilde{m} = M_{\tilde{x}} \zeta$.

Доказательство. Рассмотрим представление

$$m(x) = M_x(\zeta/\zeta < \tau) + M_x(\zeta/\zeta \geqslant \tau) = M_x(\zeta/\zeta < \tau) +$$
$$+ M_x(\tau + M_{\tilde{x}}\zeta/\zeta \geqslant \tau) = \tilde{m}(1 - P_x(\zeta < \tau)) + M_x \min(\tau, \zeta). \tag{10}$$

Согласно (10), в частности, $M_\pi \zeta < \infty$. Поэтому (9) следует из неравенства (8), в котором положим $m = \tilde{m}$, оценив $\min(\tau, \zeta) \leqslant \tau$. Следствие доказано.

Пример. Пусть $(\xi_n, n \geqslant 1)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$ и моментами $\mu = M\zeta_1, \mu_2 = M\zeta_1^2$, а случайная величина ζ_0 не зависит от ζ_n и имеет распределение $\alpha(\cdot)$, абсолютно непрерывное относительно стационарного распределения $\pi(\cdot)$, где $\pi([x, \infty)] = \mu^{-1}\int_x^\infty \overline{H}(u)\,du$, $\overline{H}(u) = 1 - H(u)$, и выполняется условие $\alpha(\cdot) \leqslant a\pi(\cdot)$.

Рассмотрим суммы $S(n) = \xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и случайный момент ν_ε, который не зависит от ξ_n, $n \geqslant 0$ и имеет геометрическое распределение $P\{\nu_\varepsilon = n\} = \varepsilon(1-\varepsilon)^n$, $n \geqslant 0$. Поскольку $\nu_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то и $S(\nu_\varepsilon) \to \infty$. Справедливо неравенство

$$\sup_{t \geqslant 0} |P(S(\nu_\varepsilon) > t) - \exp(-t\varepsilon/\mu(1-\varepsilon))| \leqslant \varepsilon a \mu_2/\mu^2(1-\varepsilon). \tag{11}$$

Для его доказательства рассмотрим процесс перескоков $x_t = S_{N_t} - t$, где N_t — количество восстановлений на интервале $(0, t)$ ($t = 0$ не считается моментом восстановления). Этот процесс регенерирующий [6], причем $P\{x_0 \in \cdot\} = P\{\xi_0 \in \cdot\} = \alpha(\cdot) \leqslant a\pi(\cdot)$, величина $\tilde{x} = x_\tau = 0$, $M_\pi \tau = \mu_2/2\mu$, а момент ζ совпадает с $S(\nu_\varepsilon)$. Поэтому все условия следствия соблюдены. Подставив в неравенство (9) $S(\nu_\varepsilon)$ и $\mu_2/2\mu$ вместо ζ и $M_\pi\tau$ соответственно и заметив, что $P_\pi(\zeta < \tau) = 0$, а $\tilde{m} = M_0\zeta(1-\varepsilon)/\varepsilon$, получим (11).

1. *Карташов Н. В.* Оценки геометрической асимптотики марковских моментов на однородных цепях // Теория вероятностей и мат. статистика. 1987. Вып. 37. С. 66—77. 2. *Анисимов В. В.* Оценки аппроксимации потоков слабозависимых событий пуассоновскими // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986. № 6. С. 43—49. 3. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., 1963. 860 с. 4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М., 1973. Т. 2. 640 с. 5. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. К., 1978. 220 с. 6. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. М., 1967. 300 с.

Поступила в редколлегию 27.11.86

УДК 519.21

Р. Е. МАЙБОРОДА, мл. науч. сотр.,
Киев. ун-т

ОЦЕНИВАНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ МОМЕНТОВ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

В статистике хорошо изучена задача оценивания распределения случайной величины (с. в.) ξ по результатам наблюдений. Обычно предполагают, что наблюдается выборка $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с. в., имеющих то же распределение, что и ξ. Однако в реальных экспериментах ξ_j часто измеряются не точно, а с некоторой погрешностью. Данная работа посвящена оцениванию производящей функции моментов (п. ф. м.) и функции распределения (ф. р.) ξ в случае неоднородной аддитивной погрешности.

Пусть наблюдаются $\zeta_j = \xi_j + \eta_j$, $j = \overline{1, n}$, где ξ_j — независимые с. в. с тем же распределением, что и ξ, η_j — не зависимые от ξ_j и между собой с. в., $\mathbf{M}\eta_j = 0$. П. ф. м. ξ называют функцию $f_\xi(u) = \mathbf{M}\exp(u\xi)$. Будем предполагать, что п. ф. м. η_j известны и равны $f_j(u)$. В качестве оценки $f_\xi(u)$ естественно предложить

$$\hat{f}_n(u) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \exp(u\zeta_j)/f_j(u), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Оценка $\hat{f}_n(u)$ является несмещенной: $\mathbf{M}\hat{f}_n(u) = f_\xi(u)$, если $f_\xi(u) < \infty$, $f_j(u) < \infty$. Рассмотрим вопрос о состоятельности $\hat{f}_n$.

Будем говорить, что с. в. η является субгауссовской, если $\exists s$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f_\eta(u) \leqslant \exp(u^2 s^2/2). \tag{1}$$

Минимальное s, для которого выполнено (1), называют субгауссовским штандартом η и обозначают $\tau(\eta)$ [1].

Теорема 1. Пусть $f_\xi(u) < \infty$ при $|u| < a$, $0 < 2b < a$, $\tau(\eta_j) = \tau_j$. Если $\tau_j^2 = o(\ln j)$, то $(n \to \infty)$

$$\sup_{|u| \leqslant b} |\hat{f}_n(u) - f_\xi(u)| \to 0 \text{ п. н.} \tag{2}$$