УДК 519.21

Л. Г. ВЕТРОВ, канд. физ.-мат. наук,
МВТУ им. Н. Э. Баумана

БИЛИНЕЙНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Пусть $f(x)$ — плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины. Рассмотрим последовательность многочленов $\{F_k(x),\ k=0,1,\ldots\}$, получаемую из последовательности $\{x^k, k=0, 1, \ldots\}$ в процессе ортогонализации с весовой функцией $f(x)$. Таким образом, $F_k(x)$ — многочлен степени k и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^l F_k(x)\,dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, l = 0, 1, \ldots, k-1; \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_k(x) F_l(x) f(x)\,dx = \delta_{k,l}, \quad k, l = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера.

Введем класс функций $g(x, y)$, допускающих представление

$$g(x, y) = f(x) f(y) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x) F_k(y)\right), \tag{3}$$

где μ_k (для удобства считаем $\mu_0 = 1$), $k = 0, 1, \ldots$ — вещественные коэффициенты, подчиненные условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^2 < \infty, \tag{4}$$

которое гарантирует сходимость в среднем ряде (3).

В работе [1] был поставлен следующий вопрос: при каких ограничениях коэффициентов $\{\mu_k\}$ функция $g(x, y)$, заданная разложением (3), является двумерной вероятностной плотностью (ДМВП) с мартингальными плотностями $f(x)$ и $f(y)$?

Ответ в случае, когда $f(x)$ — плотность нормального распределения, можно найти в работе [2], а в случае, когда $f(x)$ — плотность гамма распределения,— в статье [3].

В данной статье приведем необходимое и достаточное условие возможности представления (3) в случае, когда $f(x)$ — ряд распределения Пуассона, а также необходимые условия в общем случае.

Необходимые условия. Пусть $g(x, y)$ допускает разложение (3). Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\,dx dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\,dx = f(y), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\,dy = f(x).$$

Лемма. Функция $g(x, y)$, допускающая разложение (3), является ДМВП с мартингальными плотностями $f(x)$ и $f(y)$ тогда и только тогда, когда $g(x, y) \geqslant 0$ при всех действительных x и y.

Если $g(x, y)$ — ДМВП, то μ_k — коэффициент корреляции между случайными величинами $F_k(\xi)$ и $F_k(\eta)$, где (ξ, η) — случайный вектор, имеющий плотность распределения вероятностей $g(x, y)$. Поэтому мы ограничимся наборами $\{\mu_k\}$ с $|\mu_k| \leqslant 1$. Пусть многочлен $F_k(x)$ имеет вид

$$F_k(x) = h_k^{(k)} x^k + h_{k-1}^{(k)} x^{k-1} + \ldots + h_0^{(k)}, \tag{5}$$

тогда

$$x^k = (h_k^{(k)})^{-1} F_k(x) + a_{k-1}^{(k)} F_{k-1}(x) + \ldots + a_0^{(k)}, \tag{6}$$

где a_i^k, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ — некоторые действительные коэффициенты.

Через $g(x \mid y)$ обозначим условную плотность распределения случайной величины ξ при условии, что $\eta = y$ (напомним, что случайный вектор (ξ, η) имеет ДМВП $g(x, y)$). Ясно, что

$$g(x \mid y) = f(x)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x) F_k(y)\right). \tag{7}$$

Учитывая (1), (2), (5) — (7), получаем

$$M(\xi^k \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k g(x \mid y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x) F_k(y)\right) dx =$$
$$= \mu_k (h_k^{(k)})^{-1} F_k(y) + \mu_{k-1} a_{k-1}^{(k)} F_{k-1}(y) + \ldots + a_0^{(k)} = \mu_k y^k +$$
$$+ b_{k-1}^{(k)} y^{k-1} + \ldots + b_0^k, \tag{8}$$

где $b_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ — некоторые коэффициенты.

Напомним, что последовательность $\{\mu_k,\ k = 0, 1, \ldots\}$ будет решением проблемы моментов на отрезке $[a, b]$, если найдется такая функция распределения вероятностей $G(t)$, что

$$G(a) = 0, \quad G(b) = 1, \quad \mu_k = \int_a^b t^k dG(t), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Теорема 1. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0 \text{ и } f(x) > 0 \text{ при } x > 0. \tag{10}$$

Если функция $g(x, y)$, допускающая представление (3), является ДМВП, то $\{\mu_k\}$ — решение проблемы моментов на $[0, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [4], что $\{\mu_k\}$ будет решением проблемы моментов на $[0, 1]$ в том, и только в том случае, если

$$\Delta^n \mu_k \geqslant 0, \quad n, k = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

где

$$\Delta^n \mu_k = \Delta^{n-1} \mu_k - \Delta^{n-1} \mu_{k+1}, \quad \Delta^0 \mu_k = \mu_k. \tag{12}$$

Заметим, что

$$\Delta^n \mu_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \mu_{k+i}. \tag{13}$$

Если вектор (ξ, η) имеет ДМВП $g(x, y)$, то из условия (10) следует, что случайные величины ξ и η неотрицательны п. н. Далее,

$$\mathbf{M}\,[(\xi/\eta)^k (1 - \xi/\eta)^{2n} \mid \eta = y] = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i C_{2n}^i \mathbf{M}\,[(\xi/\eta)^{k+i} \mid \eta = y]. \tag{14}$$

В силу (8)

$$\lim_{y \to \infty} \mathbf{M}\,[(\xi/\eta)^k \mid \eta = y] = \mu_k, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{15}$$

Используя (13) — (15), получаем

$$\Delta^{2n} \mu_k \geqslant 0, \quad n, k = 0, 1, \ldots . \tag{16}$$

Отметим, что (4) и (13) влекут за собой

$$\lim_{k \to \infty} \Delta^n \mu_k = 0, \quad n, k = 0, 1, \ldots . \tag{17}$$

Учитывая (12) и (16), заключаем, что последовательность $\Delta^{2n+1} \mu_k$ является невозрастающей по k при $n = 0, 1, \ldots$. Отсюда с учетом (17) следует $\Delta^{2n+1} \mu_k \geqslant 0$, $n, k = 0, 1, \ldots$. Но это неравенство вместе с (16) дает (11).

Теорема 2. Пусть

$$f(x) > 0 \text{ при всех } x \in (-\infty, +\infty). \tag{18}$$

Если функция $g(x, y)$, допускающая представление (3), является ДМВП, то последовательность $\{\mu_k\}$ есть решение проблемы моментов на отрезке $[-1, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность $\{\mu_k\}$ будет решением проблемы моментов на отрезке $[-1, 1]$ в том, и только в том случае, если последовательность $\{\nu_k\}$ — решение проблемы моментов на отрезке $[0, 1]$, где

$$\nu_k = 2^{-k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu_i. \tag{19}$$

В силу (13) и (19)

$$\Delta^n \nu_k = 2^{-(k+n)} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu_{i+j}. \tag{20}$$

Для упрощения выкладок введем обозначение $A(r, l, k, y) = \mathbf{M}\,[(\xi/\eta)^r (1 - \xi/\eta)^l (1 + \xi/\eta)^k \mid \eta = y]$, где, как и раньше, вектор (ξ, η)

имеет ДМВП $g(x, y)$. Ясно, что

$$A(2r, 2l, 2k, y) \geqslant 0, \quad r, l, k = 0, 1, \ldots. \tag{21}$$

Отсюда $A(2r, 2l-1, 2k, y) \geqslant A(2r+1, 2l-1, 2k, y)$, $A(2r, 2l, 2k-1, y) \geqslant -A(2r+1, 2l, 2k-1, y)$. Сложим эти неравенства:

$$A(2r, 2l-1, 2k-1, y) \geqslant A(2k+2, 2l-1, 2k-1, y). \tag{22}$$

В силу (15)

$$\lim_{y\to\infty} A(r, l, k, y) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^j C_l^j \sum_{i=0}^{k} C_k^i \mu_{r+i+j}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = 0$ (что следует из (4)), то

$$\lim_{r\to\infty} \lim_{y\to\infty} A(2r, 2l-1, 2k-1, y) = 0. \tag{23}$$

Исходя из (22) и (23), заключаем, что последовательность $A(2r, 2l-1, 2k-1, y)$ является невозрастающей по r и

$$\lim_{y\to\infty} A(2r, 2l-1, 2k-1, y) \geqslant 0. \tag{24}$$

Переписав неравенства (21) и (24) в виде $\lim\limits_{y\to\infty} A(2r, 2l, 2k, y) \geqslant 0$, $\lim\limits_{y\to\infty} A(2r, 2l-1, 2k+1, y) \geqslant 0$ и сложив их, получим

$$\lim_{y\to\infty} A(2r, 2l-1, 2k, y) \geqslant 0. \tag{25}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\lim_{y\to\infty} A(2r, 2l, 2k+1, y) \geqslant 0. \tag{26}$$

Неравенства (21), (24)—(26) дают $\lim\limits_{y\to\infty} A(2r, l, k, y) \geqslant 0$, $r, l, k = 0, 1, \ldots$, откуда, учитывая (20), находим

$$\Delta^n \nu_k = 2^{-(n+k)} \lim_{y\to\infty} (0, n, k, y) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\{\nu_k\}$ — решение проблемы моментов на $[0, 1]$, а $\{\mu_k\}$ — решение проблемы моментов на $[-1, 1]$. Теорема доказана.

Распределение Пуассона. Пусть

$$f(x) = f(x, a) = a^x e^{-a}/x!, \quad a > 0, \quad x = 0, 1, \ldots \tag{27}$$

есть ряд распределения Пуассона. Ортонормированные многочлены в этом случае называются полиномами Пуассона—Шарлье. Будем обозначать их через $\{q_k(x, a), k = 0, 1, \ldots\}$.

Теорема 3. Функция

$$q(x, y, a) = f(x, a) f(y, a) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mu_k (x, a) q_k (y, a)\right)$$

является рядом распределения с мартингальными распределениями (27) тогда, и только тогда, когда последовательность $\{\mu_k\}$ — решение проблемы моментов на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Необходимость устанавливается так же, как и теорема 1.

Предположим, что $\{\mu_k\}$ — решение проблемы моментов на $[0, 1]$. Тогда найдется функция распределения $G(t)$, сосредоточенная на $[0, 1]$ и такая, что $\mu_k = \int_0^1 t^k dG(t)$.

Рассмотрим функцию $g(x, y, a, t) = f(x, a) f(y, a) \sum_{k=0}^{\infty} t^k q_k (x, a) \times$ $\times q_k(y, a)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. При $x > y$ она допускает представление [5] $g(x, y, a, t) = f(x, a) f(y, a) e^{at} (1-t)^{y-x} (t/a)^x \sum_{i=0}^{x} C_x^i C_y^i i! \, [(1-t)^2 a/t]^{x-y}$.

Легко убедиться, что $g(x, y, a, t) \geqslant 0$ при $t \in [0, 1]$ и $x, y = 0, 1 \ldots$. Отсюда, учитывая, что $g(x, y, a) = \int_0^1 g(x, y, a, t) \, dG(t)$, получаем $g(x, y, a) \geqslant 0$, $x, y = 0, 1, \ldots$, что вместе с леммой завершает доказательство теоремы.

Некоторые замечания. А. Условия (10) и (18) могут быть несколько ослаблены. В теореме 2 существенным является то, что $f(x)$ — плотность распределения вероятностей неограниченной случайной величины. Полностью отбросить эти условия нельзя.

Пример. Пусть $f(x)$—плотность равномерного распределения на отрезке $[-1, 1]$. В этом случае $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = \sqrt{3} x$, $F_2(x) =$ $= \sqrt{5}(3x^2 - 1)/2$.

Рассмотрим функцию $g(x, y) = 0{,}25 [1 + \mu_1 3xy + \mu_2 5 (3x^2 - 1) \times$ $\times (3y^2 - 1)/4]$. Легко проверить, что при $\mu_1 \in [-0, 1; 0, 1]$ и $\mu_2 \in$ $\in [-0, 1; 0, 1]$ имеет место неравенство $g(x, y) \geqslant 0$, $x, y \in [-1, 1]$. Таким образом, $g(x, y)$ является ДМВП. Однако если $\mu_2 \neq 0$, $\mu_4 = 0$, то последовательность $\{\mu_k\}$ не может быть решением моментов.

Б. Доказанные нами утверждения относятся к случаю совпадающих мартингальных плотностей. В работе [3] приводятся аналогичные результаты для случая, когда мартингальные плотности являются плотностями гамма-распределения с различными параметрами.

В. Теорема 3, а также результаты работ [2 и 3] наводят на мысль, что условия теорем 1 и 2 не только необходимы, но и достаточны. Эта догадка справедлива, если верна следующая гипотеза.

Пусть $f(x)$ — произвольная положительная вероятностная плотность и $\{F_k(x),\ k = 0, 1, \ldots\}$ — соответствующая ей последовательность ортогональных многочленов. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k F_k(x) F_k(y) \geqslant 0 \qquad (28)$$

при всех $t \in [-1, 1]$, $x, y \in (-\infty, +\infty)$.

Для конкретных плотностей $f(x)$ (нормальное распределение, гамма-распределение, распределение Пуассона) сумма (28) подсчитывается в явном виде, после чего проверяется ее неотрицательность.

1. *Ядренко М. И., Леоненко Н. Н.* О некоторых нерешенных задачах анализа, комбинаторики и теории вероятностей // Математика сегодня. К., 1983. С. 94—110. 2. *Сарманов О. В., Братоева З. Н.* Вероятностные свойства билинейных разложений по полиномам Эрмита // Теория вероятностей и ее применения. 1967. 12, вып. 3. С. 520—531. 3. *Griffiths R. C.* The canonical correlation coefficients of bivariate gamma distributions // Ann. Math. Statist. 1969. 40, N 4. P. 1401—1408. 4. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 5. *Meixner J.* Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polynome Math. Z. 1938. 44, N 3. S. 531—535.

Поступила в редколлегию 10.11.86

УДК 519.21

В. Л. ГИРКО, д-р физ.-мат. наук, Киев. ун-т,
А. С. БАБАНИН, инж., Ин-т кибернетики АН УССР

ОБ ОЦЕНКЕ G_8 РЕШЕНИЙ ЭМПИРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим $x_\alpha = [I\alpha n + A'A]^{-1} A'b$, $\alpha > 0$ регуляризованное решение системы уравнений $Ax = b$, где $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ — матрица коэффициентов, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $b' = (b_1, \ldots, b_n)$.

G_8-Оценкой решения x_α назовем выражение

$$G_8 = [I\theta(\alpha) n + X'X]^{-1} X'b, \qquad (1)$$

где $\theta(\alpha)$ — решение уравнения

$$\theta(\alpha)[1 + \sigma^2 a(\theta(\alpha))]^2 + \sigma^2(1 - mn^{-1})(1 + \sigma^2 a(\theta(\alpha))) = \alpha, \qquad (2)$$

$$\alpha > 0, \quad \theta(\alpha) > 0,$$

$$a(\theta(\alpha)) = n^{-1} \operatorname{Sp}[I\theta(\alpha) + n^{-1}X'X]^{-1},$$

X — наблюдение над матрицей A.

Теорема. Пусть элементы x_{ij} матрицы X независимы и распределены по нормальным законам $N(a_{ij}, \sigma^2)$, векторы $c \in R^m$ и b удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{m} |(A'b, \varphi_k)(c, \varphi_k)| < \infty; \qquad (3)$$