Наслідок 2. Якщо $\lim\limits_{T\to\infty}(\ln Ta_T^{-1})/\ln\ln T=\infty$, функція $f_3(T)=$ $=a_T^{1/\alpha}\varphi_3(T)$, де

$$\varphi_3(T)=\left\{B^{-1}(\ln\ln T+\ln T/a_T+\frac{3}{2}\ln\ln T/a_T+(1+\varepsilon)\ln\ln\ln T)\right\}^{1/\lambda}$$

буде верхньою для H_i, $i=1,2,3$.

Доведення випливає з того факту, що

$$I_3(\varphi_3)=\int\limits_{2e}^{\infty}\varphi_3^{3\lambda/2}(T)\left(\ln\frac{T}{a_T}\right)^{-3/2}(\ln\ln T)^{-(1+\varepsilon)}\frac{a_T}{T}\,\frac{dT}{a_T\ln T}\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{2e}^{\infty}\left(\ln\frac{T}{a_T}\right)^{3/2}\left(\ln\frac{T}{a_T}\right)^{-3/2}\frac{d\ln\ln T}{(\ln\ln T)^{(1+\varepsilon)}}<\infty.$$

Список використаної літератури

1. *Зинченко Н. М.* Асимптотика приращений устойчивых процессов со скачками одного знака // Теория вероятностей и ее применения. 1987. 32, вып. 4. С. 793—796. 2. *Csorgo M., Revesz P.* How big are the increments of a Wiener process // Ann. Probab. 1979. 7, N 4. P. 731—737. 3. *Iidem.* Strong approximation in probability and statistics. Budapest, 1981. 284 p. 4. *Revesz P.* On the increments of Wiener and related processes // Ann. Probab. 1982. 10, N 3. P. 613—622. 5. *Ortega J., Wschebor M.* On the increments of the Wiener process // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. 1984. 65, N 3. S. 329—339. 6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 2 т. М., 1973. Т. 2. 640 с. 7. *Скороход А. В.* Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения // Докл. АН СССР. 1954. 98, № 5. С. 732—754. 8. *Калинаускайте Н. Б.* О верхних и нижних функциях для устойчивых процессов // Лит. мат. сб. 1965. 5, № 4. С. 541—553. 9. *Mijnheer J. L.* Properties of the sample functions of completely asymmetric stable process // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. 1973. 27, N 2. S. 153—170.

Надійшла до редколегії 10.09.90

Предложены интегральные критерии для изучения скорости роста приращений устойчивого процесса без положительных скачков $\xi_{\alpha,\beta}(t)$, $\beta=-1$, $\alpha\in$ $\in(1,2)$ на интервалах длиной a_T, где a_T растет не быстрее чем T.

УДК 519.21

О. М. КУЗНЄЦОВА, асп., Київ. ун-т

ПРО ЗАДАЧУ ФІЛЬТРАЦІЇ ІЗОТРОПНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Отриманий розв'язок задачі фільтрації двовимірного ізотропного випадкового поля на сепарабельному гільбертовому просторі H за спостереженнями однієї з компонент поля на сфері в H. Як допоміжний засіб вказаний ортогональний розклад ізотропного векторного випадкового поля на H.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір. Елемент $t\in H$ записуватимемо у вигляді $t=r_t d_t$, де $r_t=\|t\|$, $\alpha_t=t/r_t$, тобто

α, належить S_∞ — одиничній сфері в H. Нехай $\bar{\xi}(t) = (\xi^1(t), \ldots, \xi^N(t))'$ — ізотропне N-вимірне випадкове поле на H, тобто неперервне в середньому квадратичному випадкове поле з нульовим математичним сподіванням $(M\bar{\xi}(t) = \bar{0})$, коваріаційна матрична функція якого $B(t, s) = M\bar{\xi}(t)\bar{\xi}'(s) = [b_{ij}(t, s)]_{i,j=\overline{1,N}}$ залежить лише від r_t, r_s та скалярного добутку (α_t, α_s).

Будемо позначати через $H(\{\cdot\})$ замикання в середньому квадратичному лінійних комбінацій випадкових величин, що стоять у дужках.

Теорема 1. Ізотропне N-вимірне випадкове поле на H можна зобразити у вигляді

$$\bar{\xi}(t) = \sum_{m \geqslant 0} \bar{\xi}_m(t), \tag{1}$$

де $\bar{\xi}_m(t)$ — ортогональні ізотропні N-вимірні випадкові поля на H, $M\bar{\xi}_m(t)\bar{\xi}'_m(s) = D_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m$, $D_m(x, y)$ — додатно визначені матричні ядра на $R_+ \times R_+$,

$$\sum_{m \geqslant 0} D_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m = B(t, s).$$

Доведення цього факту аналогічне доведенню теореми про ортогональний розклад ізотропного дійснозначного випадкового поля на H [1].

Наслідок 1. Для усіх $t \in H$, $i = \overline{1, N}$ $\xi^i_m(t) \in \mathcal{H}(\{\xi^i(r_t, \alpha), \alpha \in S_\infty\})$.

Це випливає із застосування до розкладу (1) леми 3.1 з роботи [2].

Нехай $\bar{\zeta}(t) = (\xi(t), \gamma(t))'$ — двовимірне ізотропне випадкове поле на H, $B(t, s) = M\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}'(s)$ — його коваріаційна функція. Розглянемо для $\bar{\zeta}(t)$ на H задачу фільтрації, подібну до задачі для двовимірного однорідного та ізотропного випадкового поля на R^n [3].

Нехай на сфері $S_\infty(r)$ радіуса r з центром у початку системи координат спостерігається поле $\xi(t)$. Знайдемо за результатами спостереження лінійну оцінку $\hat{\gamma}(t_0)$ значення $\gamma(t_0)$ в точці $t_0 \in H$, оптимальну щодо мінімуму середньої квадратичної похибки.

Теорема 1 дозволяє зобразити поле $\bar{\zeta}(t)$ у вигляді

$$\bar{\xi}(t) = \sum_{m \geqslant 0} \bar{\xi}_m(t),$$

де $\bar{\xi}_m(t) = (\xi_m(t), \gamma_m(t))'$ — ортогональні ізотропні двовимірні випадкові поля на H, $M\bar{\xi}_m(t)\bar{\xi}_m(s) = D_m(r_t, r_s)(\alpha_t, \alpha_s)^m$, $D_m(x, y) = [d^{ij}_m(x, y)]_{i,j=1,2}$ — додатно визначені ядра.

Введемо позначення $K = \{m \geqslant 0 : d^{11}_m(x, y) \not\equiv 0\}$.

Теорема 2. Лінійна оптимальна щодо мінімуму середньої квадратичної похибки оцінка $\hat{\gamma}(t_0)$ значення $\gamma(t_0)$ має вигляд

$$\hat{\gamma}(t_0) = \sum_{m \in K} (d_m^{21}(r_{t_0}, r)/d_m^{11}(r, r))\, \xi_m(r\alpha_{t_0}). \tag{2}$$

Середньоквадратична похибка фільтрації

$$\sigma^2(t_0, r) = b_{22}(t_0, t_0) - \sum_{m \in K} (d_m^{21}(r_{t_0}, r))^2/d_m^{11}(r, r).$$

Похибка фільтрації дорівнює нулеві тоді та лише тоді, коли для усіх $m \geqslant 0$

$$(d_m^{21}(r_{t_0}, r))^2 = d_m^{11}(r, r)\, d_m^{22}(r_{t_0}, r_{t_0}). \tag{3}$$

Доведення. Як відомо, лінійною оптимальною щодо мінімуму середньої квадратичної похибки оцінкою значення $\gamma(t_0)$ за результатами спостереження $\gamma(t)$ на $S_\infty(r)$ є випадкова величина $\hat{\gamma}(t_0)$, яка належить до $\mathcal{H}(\{\xi(t),\ t \in S_\infty(r)\})$ та задовольняє умову

$$M\hat{\gamma}(t_0)\,\xi(x) = M\gamma(t_0)\,\xi(x), \quad x \in S_\infty(r). \tag{4}$$

Випадкова величина (2) згідно з наслідком 1 задовольняє першу в цих вимог. Як показує ланцюжок перетворень

$$M\hat{\gamma}(t_0)\,\xi(x) = M\Big(\sum_{m \in K} (d_m^{21}(r_{t_0}, r)/d_m^{11}(r, r))\, \xi_m(r\alpha_t)\Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{m \geqslant 0} \xi_m(x)\Big) = \sum_{m \in K} d_m^{21}(r_{t_0}, r)\,(\alpha_{t_0}, \alpha_x)^m = M\gamma(t_0)\,\xi(x),$$

вона задовольняє також і умову (4). Знайдемо похибку фільтрації:

$$\sigma^2(t_0, r) = M\gamma^2(t_0) - M\hat{\gamma}^2(t_0) = b_{22}(t_0, t_0) - \sum_{m \in K} (d_m^{21}(r_{t_0}, r))^2/d_m^{11}(r, r).$$

Оскільки $D_m(x, y)$ — додатно визначені ядра, то

$$\sum_{m \in K} (d_m^{21}(r_{t_0}, r))^2/d_m^{11}(r, r) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m \in K} (d_m^{11}(r, r)\, d_m^{22}(r_{t_0}, r_{t_0}))/d_m^{11}(r, r) = B_{22}(t_0, t_0).$$

Рівність досягається тоді, коли виконано (3).

Наслідок 2. Середньоквадратична похибка фільтрації дорівнює нулеві тоді та лише тоді, коли для усіх $m \geqslant 0$

$$\gamma_m(t_0) = (d_m^{12}(r_{t_0}, r)/d_m^{11}(r, r))\, \xi_m(r\alpha_{t_0}).$$

Теорема 3. $\sigma^2(r\alpha, r) = 0$ для усіх $r > 0$ та деякого $\alpha \in S_\infty$ тоді та лише тоді, коли з імовірністю 1

$$\gamma(t) = \sum_{m \geqslant 0} f_m(r_t)\, \xi_m(t). \tag{5}$$

Доведення. Нехай $\sigma^2(r\alpha, r)=0$ для усіх $r>0$ та деякого $\alpha\in S_\infty$. Тоді за наслідком 2 для усіх $t\in H$ $\gamma_m(t)=f_m(t)\xi_m(t)$, де $f_m(t)=d_m^{12}(r_t,r_t)/d_m^{11}(r_t,r)=f_m(r_t)$. Навпаки, для $\gamma(t)$ вигляду (5) та усіх $r>0$ $\sigma^2(r\alpha, r)=0$.

Наслідок 3. Нехай $\zeta(t)=(\xi(t), \eta(t))$ — двовимірне однорідне та ізотропне випадкове поле на H, тобто ізотропне поле, коваріаційна матрична функція якого $B(t, s)$ залежить лише від відстані між t та s. Нехай $\sigma^2(r\alpha, r)=0$ для усіх $r>0$ та деякого $\alpha\in S_\infty$. Тоді існує константа C така, що з імовірністю 1 $\eta(t)=C\xi(t)$.

Доведення. Якщо $\xi(t)$ — однорідне та ізотропне випадкове поле на H, то поле $\eta(t)$ вигляду (5) може бути однорідним та ізотропним, а також однорідно та ізотропно зв'язаним з $\xi(t)$ лише за умови $f_m(r)=\text{const}$ для усіх $m\geqslant 0$ та $r>0$. Дійсно, з вимоги $M\gamma(t)\xi(s)=M\gamma(s)\xi(t)$ випливає, що для усіх $r_t, r_s, \alpha_t, \alpha_s$

$$\sum_{m\geqslant 0} f_m(r_t)\,d_m^{11}(r_t, r_s)(\alpha_t,\alpha_s)^m \sum_{m\geqslant 0} f_m(r_s)\,d_m^{11}(r_t, r_s)(\alpha_t,\alpha_s)^m,$$

звідки $f_m(r)=f_m$ для усіх $r>0$. Тепер $b_{22}(r\sqrt{2})=f_0 d_0(r,r)=f_0 b_{11}(r\sqrt{2})$, отже, для усіх $m\geqslant 0$ $f_m=f_0$ та $\eta(t)=f_0\xi(t)$.

Список використаної літератури

1. *Кузнецова О. М.* О задачах прогноза изотропного случайного поля на гильбертовом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика. 1991. Вып. 45. С. 62—69. 2. *Berman S. M.* Isotropic Gaussian processes on the Hilbert sphere // Ann. Probab. 1980. 9, N 6. P. 1093—1106. 3. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. К., 1980. 208 с.

Надійшла до редколегії 24.11.89

Получено решение задачи фильтрации двумерного изотропного случайного поля на сепарабельном гильбертовом пространстве H по наблюдениям одной из компонент поля на сфере в H. Как вспомогательное средство указано ортогональное разложение изотропного векторного случайного поля на H.

УДК 519.21

ЛЕ ФЕ ДО, асп., Київ. ун-т

СТАТИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ МОМЕНТНОЇ ФУНКЦІЇ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ СТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ

Вивчена асимптотична поведінка коваріації та дисперсії статистичної оцінки моментної функції третього порядку стаціонарного процесу, а також доведена теорема про сильну слушність цієї оцінки.

Оцінювати моментні функції старших порядків необхідно в різних галузях статистичного аналізу випадкових процесів, наприклад при дослідженні оцінок спектральних щільностей старших порядків стаціонарних процесів [1, с. 37]. У нашій статті досліджуються властивості оцінки моментної функції третього порядку стаціонар-